UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

CURSO: TEORÍA DE CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

PROFESOR: Ing. JORGE MONTAÑO PISFIL

PROBLEMAS RESUELTOS DE ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

Problema Nº 1

La distribución de una carga esférica está expresada por:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0\left(1-\dfrac{r^2}{a^2}\right) , & r \le a \\ 0 , & r > a \end{cases}$$

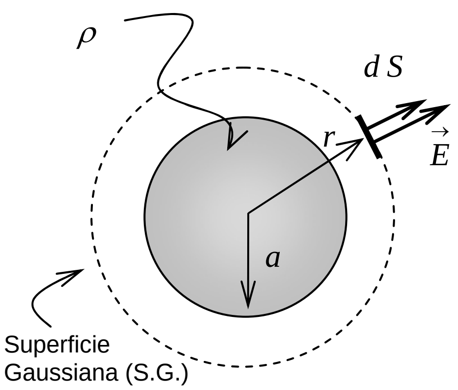
a) Halle la intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$ y el potencial eléctrico φ para $r \ge a$

b) Halle la intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$ y el potencial eléctrico φ para $r \le a$

Resolución

Por tratarse de una distribución esférica, hay simetría en la figura, por lo tanto la resolución de este problema puede hacerse aplicando la ley de Gauss.

a) Cálculo de $\vec{E}$ y φ para $r \ge a$



Por ley de Gauss:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\;;\; Q = \text{carga neta encerrada por S.G.}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{r=0}^{a}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \rho_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right) r^2\, sen\theta\; d\theta\; d\phi\; dr$$

$$\Rightarrow E = \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r^2} \quad \therefore\quad \vec{E} = \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r \quad ;\; r \ge a$$

Para calcular φ utilizamos la ecuación: $\varphi = -\int \vec{E}\cdot d\vec{r}$

Reemplazando $\vec{E}$ y resolviendo luego la integral tenemos:

$$\varphi = -\int \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r \cdot dr\,\hat{a}_r \quad\Longrightarrow\quad \varphi = \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r} + C \quad . . . \quad (1)$$

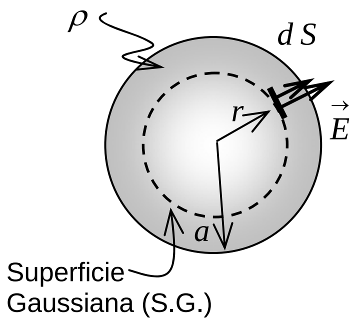
La constante C la hallo aplicando la condición de frontera (C.F.) siguiente:

Si $r = \infty$ $\Longrightarrow$ $\varphi_{(r=\infty)} = 0$

Evaluando en la ecuación (1) obtenemos que la constante C es igual a cero: $C = 0$

Luego: $$\varphi = \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r} \quad ; \quad \text{para } r \geq a$$

b) *Cálculo de $\vec{E}$ y φ para $r \leq a$*



Por ley de Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}; \quad Q = \text{carga neta encerrada por S.G.}$$

$$E(4\pi r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{r=0}^{r} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 \, sen\theta \; d\theta \; d\phi \; dr$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2}\right] \;\therefore\; \vec{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2}\right]\hat{a}_r \quad ; \; r \leq a$$

Hallo φ:

Se cumple: $\varphi = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Entonces:

$$\varphi = -\int \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2}\right]\hat{a}_r \cdot dr\,\hat{a}_r \Longrightarrow \varphi = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{r^2}{6} - \frac{r^4}{20a^2}\right] + C \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Si $r = a$: $\varphi_{(r=a)} = \dfrac{2a^2\rho}{15\varepsilon_0} = -\dfrac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{20}\right) + C$ $\Longrightarrow$ $C = \dfrac{a^2\rho_0}{4\varepsilon_0}$

Reemplazando la constante C en la ecuación (2) obtenemos:

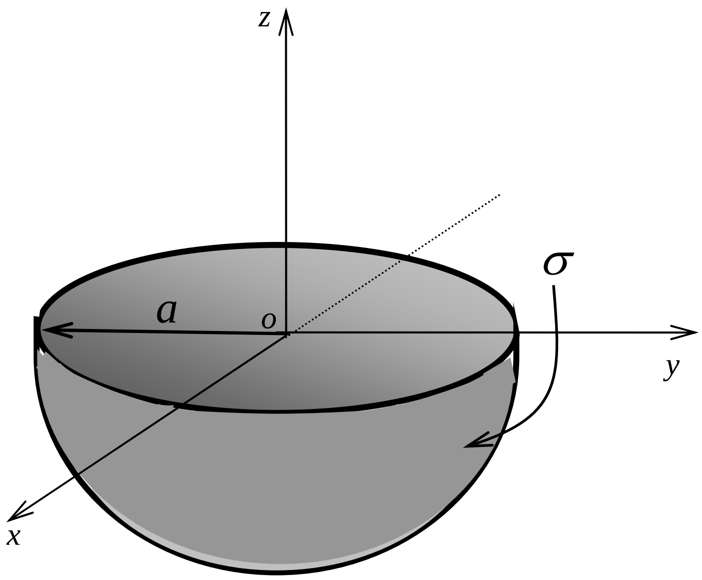
$$\varphi = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}\left[\frac{a^2}{4} - \frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{20a^2}\right] \quad , \quad \text{para } r \leq a$$

Problema Nº 2

Se tiene un casquete semiesférico de radio "a", cargado con densidad superficial de carga constante σ y ubicado tal como se muestra en la figura. Calcule:

a) La intensidad de campo eléctrico en puntos sobre el eje "z".

b) La intensidad de campo eléctrico en el punto "*o*".



Resolución:

Para resolver este problema se recomienda calcular primero el potencial eléctrico, porque es más fácil resolver una integral cuyo denominador tiene potencia uno, a diferencia del exponente tres que tiene el denominador de la integral del campo eléctrico.

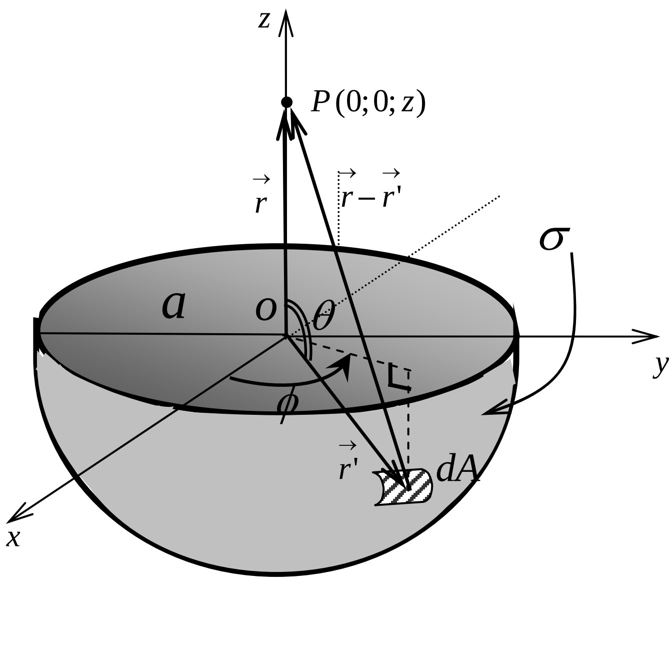
De la figura mostrada tenemos que:

$dA = r^2 sen\theta \, d\theta \, d\phi$ (en coordenadas esféricas)

donde: $r = a$ = radio de la semiesfera.

Además, por ley de cosenos se cumple:

$$\left| \vec{r} - \vec{r}' \right| = \sqrt{a^2 + z^2 - 2az\cos\theta}$$



Cálculo del potencial eléctrico "φ" en el punto P (0; 0; z)

Sabemos que para una distribución de carga superficial, el potencial eléctrico φ se halla por:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma\, dA}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|} \qquad . \; . \; . \; \textbf{(1)}$$

Reemplazando dA en la ecuación **(1)**, tenemos:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{\sigma\, r^2 sen\theta\, d\theta\, d\phi}{\sqrt{a^2+z^2-2az\cos\theta}} \quad ; \text{ donde: } r = a$$

Resolviendo se obtiene: $\varphi = \dfrac{\sigma a}{2\varepsilon_0 z}\left(a+z-\sqrt{a^2+z^2}\right)$

Cálculo del campo eléctrico "$\vec{E}$" en el punto P (0; 0; z)

Cuando ya se conoce el potencial eléctrico, el campo eléctrico se puede calcular utilizando gradiente de potencial. Es decir, se cumple que: $\vec{E}$ = -$\nabla\varphi$.

Recordar también que: $\nabla\varphi = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{a}_x + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{a}_y + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{a}_z\right)$ (en coordenadas cartesianas)

Calculando el gradiente del potencial y aplicando $\vec{E}$ = -$\nabla\varphi$ obtenemos:

$$\vec{E} = \frac{\sigma a^2}{2\varepsilon_0 z^2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+z^2}}\right)\hat{a}_z$$

Cálculo del campo eléctrico "$\vec{E}$" en el punto "O"

En el punto "*O*" (origen de coordenadas): $z = 0$ (Cero).

Al evaluar el campo eléctrico $\vec{E}$ en $z = 0$ (primero hay que levantar la indeterminación), obtenemos:

$$\vec{E}_{(z=0)} = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\hat{a}_z$$

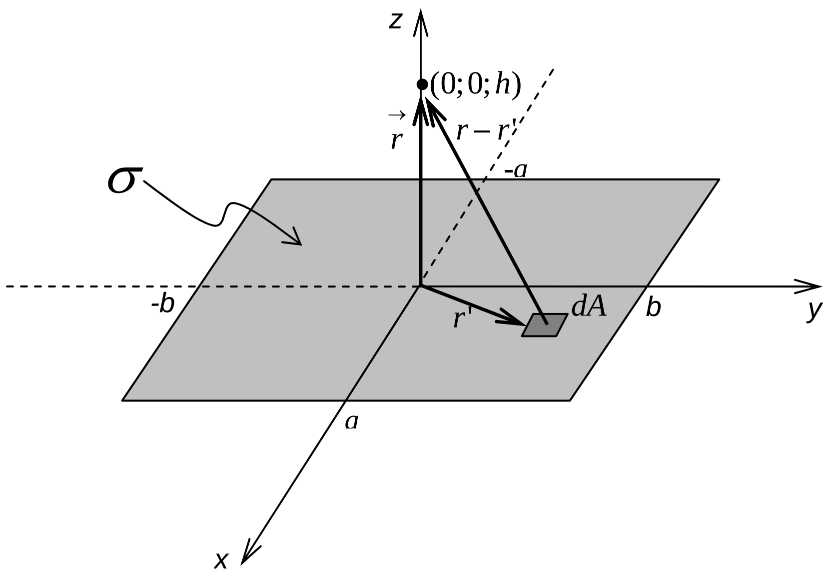
Problema Nº 3

Demostrar que el campo eléctrico en el punto (0, 0, h), debido al rectángulo descrito por $-a \le x \le a$; $-b \le y \le b$; $z = 0$ y que porta una carga uniforme de $\sigma(C/m^2)$ es:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0} arc\,tg\left(\frac{ab}{h(a^2+b^2+h^2)^{1/2}}\right)\hat{a}_z$$

Resolución

De acuerdo con el enunciado la figura correspondiente es:



La intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$ se determina de manera directa utilizando la siguiente ecuación:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma dA}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3}(\vec{r}-\vec{r}') \quad ...\ (1)$$

De la figura:

$$\vec{r} = h\hat{a}_y \quad ; \quad \vec{r}' = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y \quad ; \quad \left|\vec{r}-\vec{r}'\right| = (h^2+x^2+y^2)^{1/2} \quad ; \quad dA = dx\cdot dy$$

Reemplazamos en (1):

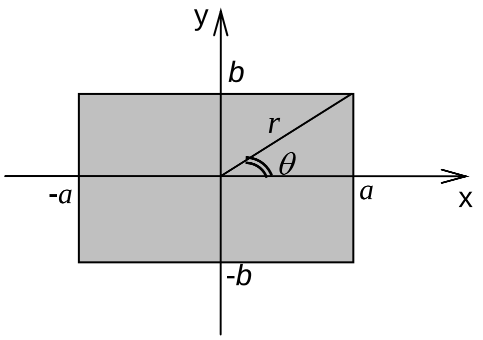
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dx\cdot dy}{(h^2+x^2+y^2)^{3/2}}(h\hat{a}_k - x\hat{a}_x - y\hat{a}_y)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{hdx\cdot dy}{(h^2+x^2+y^2)^{3/2}}\hat{a}_z - \iint \frac{xdx\cdot dy}{(h^2+x^2+y^2)^{3/2}}\hat{a}_x - \iint \frac{ydx\cdot dy}{(h^2+x^2+y^2)^{3/2}}\hat{a}_y$$

Debido a la simetría de la figura las dos últimas integrales son iguales a cero, por lo tanto la ecuación anterior queda:

$$\vec{E} = \frac{\sigma h}{4\pi\varepsilon_0} \int_{y=-b}^{y=b} \int_{x=-a}^{x=a} \frac{dx \cdot dy}{(h^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{a}_z \quad . \; . \; . \quad (2)$$

Pasando a coordenadas polares tenemos:



$x = r\cos\theta \quad ; \quad y = rsen\theta \quad ; \quad x^2 + y^2 = r^2$

Los límites de las integrales serán:

Para θ: 0 y $arco \ tg(b/a)$

* $tg\frac{b}{a} \Rightarrow \theta = arco \ tg(b/a)$

Para r: 0 y $a\sec\theta$

* $\cos\theta = \frac{a}{r} \Rightarrow r = a\sec\theta$

Luego, la ecuación (2) equivale a:

$$\vec{E} = \frac{\sigma h}{4\pi\varepsilon_0} \left[8 \int_{\theta=0}^{arco \ tg(b/a)} \int_{r=0}^{a\sec\theta} \frac{rdr \cdot d\theta}{(r^2 + h^2)^{3/2}} \hat{a}_z \right]$$

Evaluando esta integral obtenemos:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0} arco \ tg\left(\frac{ab}{h\left(a^2 + b^2 + h^2\right)^{1/2}} \right) \hat{a}_z \quad ,$$ lo cual queríamos demostrar.