

CURSO : TEORÍA DE CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

PROFESOR : Ing. JORGE MONTAÑO PISFIL

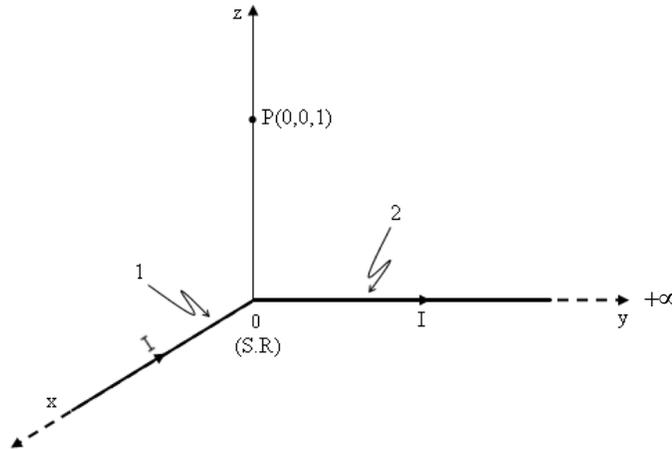
PROBLEMAS RESUELTOS DE MAGNETOSTÁTICA EN EL VACÍO

Problema N° 1

Una corriente filamentaria de 10 A se dirige del infinito hasta el origen, sobre el eje x positivo, y luego regresa al infinito a lo largo del eje y positivo. Utilice la ley de Biot- Savart para encontrar \vec{B} y \vec{H} en el punto P(0,0,1).

Resolución

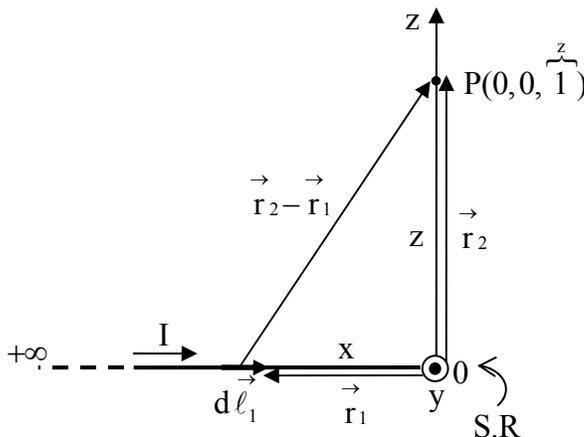
Para resolver este problema vamos a dividir el alambre rectilíneo infinito en dos partes a las cuales denominaremos "1" y "2", tal como se observa en la figura.



a) Cálculo de \vec{B}_p

Por principio de Superposición: $\vec{B}_p = \vec{B}_p(1) + \vec{B}_p(2) \dots (1)$

Aplico Ley de Biot y Savart para el segmento (1):



De la figura:

$$\vec{r}_2 = z \hat{a}_z$$

$$\vec{r}_1 = x \hat{a}_x$$

$$\left| \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right| = \sqrt{x^2 + z^2}$$

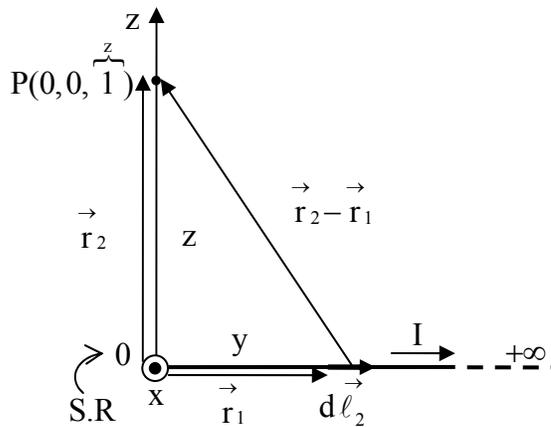
$$d\vec{\ell}_1 = -dx \hat{a}_x$$

$$\vec{B}_{P(1)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \dots (2)$$

Reemplazando: $\vec{B}_{P(1)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{-dx \hat{a}_x \times (z\hat{a}_z - x\hat{a}_x)}{(x^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{z dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \hat{a}_y$

$$\vec{B}_{P(1)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi z} \hat{a}_y = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} (10)}{4\pi (1)} \hat{a}_y = (10^{-6} \text{T}) \hat{a}_y$$

Aplico Ley de Biot y Savart para el segmento (2):



De la figura:

$$\vec{r}_2 = z \hat{a}_z$$

$$\vec{r}_1 = y \hat{a}_y$$

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{y^2 + z^2}$$

$$d\vec{\ell}_1 = dy \hat{a}_y$$

$$\vec{B}_{P(2)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \dots (3)$$

Reemplazando: $\vec{B}_{P(2)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dy \hat{a}_y \times (z\hat{a}_z - y\hat{a}_y)}{(y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{+\infty} \frac{z dy}{(y^2 + z^2)^{3/2}} \hat{a}_x$

$$\vec{B}_{P(2)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi z} \hat{a}_x = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} (10)}{4\pi (1)} \hat{a}_x = (10^{-6} \text{T}) \hat{a}_x$$

Finalmente, reemplazo $\vec{B}_{P(1)}$ y $\vec{B}_{P(2)}$ en la ecuación (1) y obtengo:

$$\vec{B}_P = (10^{-6} \text{T})(\hat{a}_x + \hat{a}_y)$$

b) Cálculo de \vec{H}_P :

$$\vec{H}_P = \vec{H}_{P(1)} + \vec{H}_{P(2)} ; \text{ siendo : } \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

Reemplazando obtenemos:

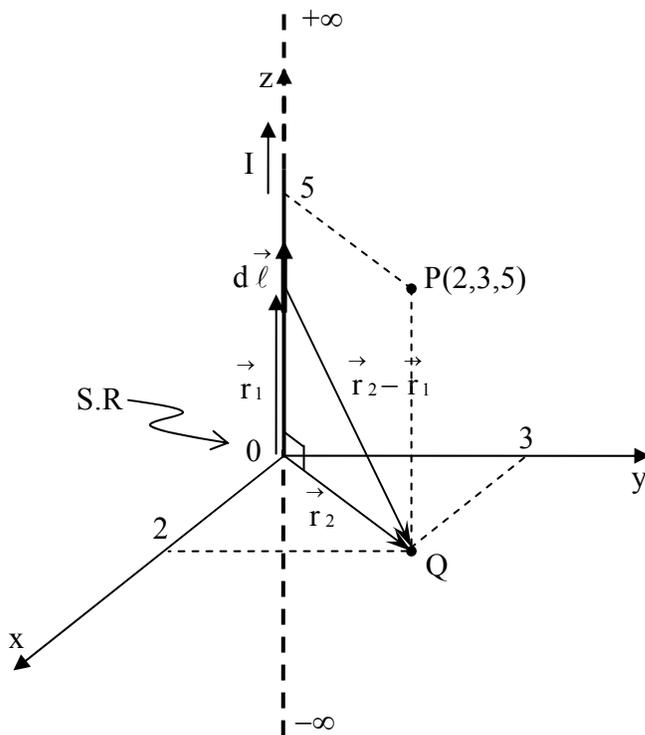
$$\vec{H}_P = 0,796 (\hat{a}_x + \hat{a}_y) \frac{A}{m}$$

Problema N° 2

Encuentre \vec{H} en P (2; 3; 5) en coordenadas cartesianas, si existe un filamento portador de corriente de longitud infinita, que pasa a través del origen y el punto C. Una corriente de 50 A se dirige desde el origen hasta C, donde la localización de C es (0; 0; 1).

Resolución:

1er Caso: Cálculo de \vec{H} en el punto P (2; 3; 5) debido a $I = 50$ A que se dirige desde el origen hasta C (0; 0; 1).



Por simetría de la figura se cumple

$$\text{que: } \vec{H}_P = \vec{H}_Q$$

Es decir, en los puntos P y Q el vector intensidad de campo magnético tiene la misma magnitud y la misma dirección. Por lo tanto, el valor calculado de \vec{H} en el punto Q es el mismo valor que corresponde a \vec{H} en el punto P.

Por Ley de Biot y Savart:
$$\vec{H}_Q = \frac{I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \dots (1)$$

De la figura: $d\vec{\ell} = dz \hat{a}_z$; $\vec{r}_2 = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y = 2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y$

$$\vec{r}_1 = z \hat{a}_z ; \left| \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{13 + z^2}$$

En (1):

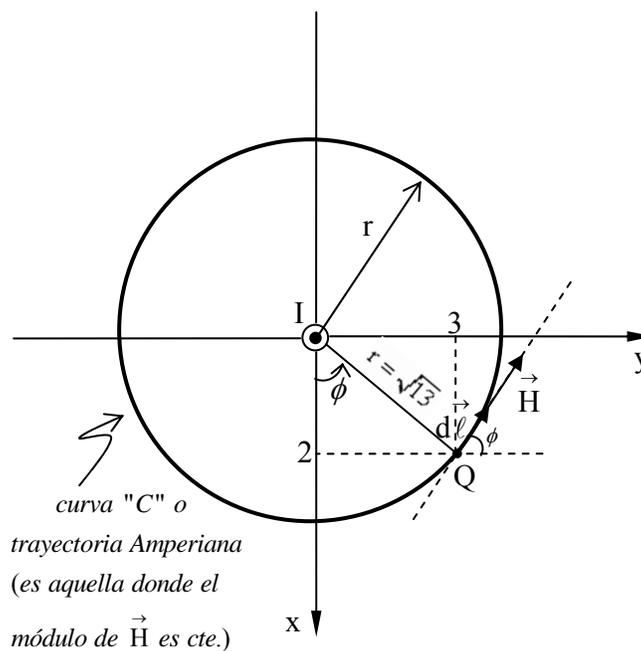
$$\vec{H}_Q = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz \hat{a}_z \times (2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y - z\hat{a}_z)}{(13 + z^2)^{3/2}} = \frac{I}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(13 + z^2)^{3/2}} \hat{a}_y - \frac{3I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(13 + z^2)^{3/2}} \hat{a}_x$$

$$\vec{H}_Q = \frac{I}{2\pi} \left(\frac{2}{13} \right) \hat{a}_y - \frac{3I}{4\pi} \left(\frac{2}{13} \right) \hat{a}_x = \frac{50}{13\pi} \hat{a}_y - \frac{75}{13\pi} \hat{a}_x$$

$$\therefore \vec{H}_Q = (1,224 \hat{a}_y - 1,84 \hat{a}_x) \text{ A/m}$$

Otro método: Por ley de Ampere

Vista de planta



Por Ley de Ampere:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{enc}}$$

$$H (2\pi r) = I \implies H = \frac{I}{2\pi r}$$

Vectorialmente:
$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} \hat{a}_\phi$$

De la figura:
$$\hat{a}_\phi = -\text{Sen}\phi \hat{a}_x + \text{Cos}\phi \hat{a}_y$$

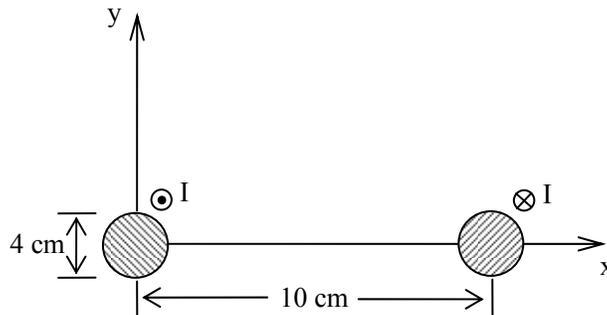
Luego:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi r} (-\text{Sen}\phi \hat{a}_x + \text{Cos}\phi \hat{a}_y) \rightarrow \vec{H} = (1,224 \hat{a}_y - 1,84 \hat{a}_x) \text{ A/m}$$

Problema N° 3

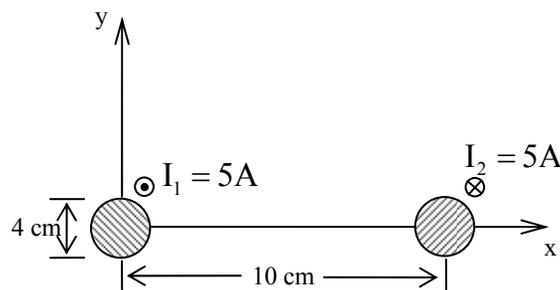
Considere la línea de transmisión de dos hilos cuya sección transversal se ilustra en la figura. Cada uno de los alambres tiene 2 cm de radio y están separados por 10 cm. Por el alambre con centro en (0,0) fluye una corriente de 5 A, Mientras que por el otro, centrado en (10cm, 0) fluye la corriente de retorno. Calcule \vec{B} y \vec{H} en:

- a) (5 cm, 0) ; b) (10 cm, 5 cm)



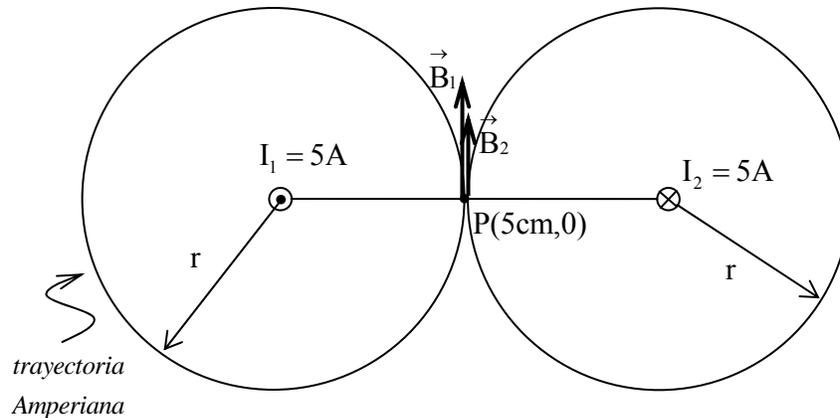
Resolución

Llamaremos I_1 a la corriente de ida e I_2 a la corriente de retorno, como se muestra en la figura siguiente.



a) Cálculo de \vec{B} y \vec{H} en el punto (5cm; 0):

En el punto P (5 cm; 0) se crean dos Campos magnéticos, porque hay dos corrientes eléctricas. A continuación se muestran los vectores \vec{B}_1 y \vec{B}_2 , debido a las corrientes I_1 e I_2 .



Por el principio de Superposición aplicado a los campos magnéticos se cumple:

$$\vec{B}_p = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad \dots (1)$$

Hallo \vec{B}_1 aplicando ley de Ampere

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I \quad ; \quad I = I_{\text{encerrada}}$$

$$B_1 (2\pi r) = \mu_0 I_1 \Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \quad ; \quad \text{Vectorialmente: } \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{a}_y$$

$$\text{Análogamente tenemos que } \vec{B}_2 \text{ quedará expresado por: } \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \hat{a}_y$$

Reemplazo en (1):

$$\vec{B}_p = 2\vec{B}_1 \quad ; \quad \text{porque } \vec{B}_2 = \vec{B}_1 \text{ (dado que } I_2 = I_1)$$

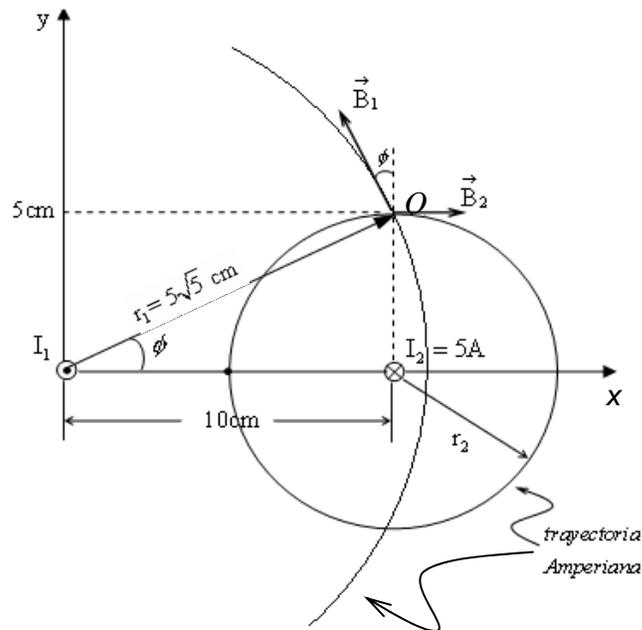
$$\Rightarrow \vec{B}_p = \frac{\mu_0 I_1}{\pi r} \hat{a}_y = (4 \cdot 10^{-5} \hat{a}_y) T$$

Para hallar \vec{H} aplico: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ (en el vacío)

$$\Rightarrow \vec{H}_P = \frac{\vec{B}_P}{\mu_0} = \frac{I_1}{\pi r} \hat{a}_y = (31,83 \hat{a}_y) \frac{A}{m}$$

b) Cálculo de \vec{B} y \vec{H} en el punto Q (10cm; 5cm)

En el punto Q, los vectores \vec{B}_1 y \vec{B}_2 tienen las direcciones mostradas en la figura siguiente.



Por el principio de Superposición: $\vec{B}_Q = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \dots (2)$

Donde:

$$* \vec{B}_2 = B_2 \hat{a}_x ; B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} \left(\text{módulo de } \vec{B} \text{ para un alambre } \infty \right)$$

$$\Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} \hat{a}_x = (2 \cdot 10^{-5} \hat{a}_x) T$$

$$* \vec{B}_1 = B_1 \hat{a}_\phi \begin{cases} B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} \\ \hat{a}_\phi = -\text{Sen}\phi \hat{a}_x + \text{Cos}\phi \hat{a}_y \end{cases} \Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} (-\text{Sen}\phi \hat{a}_x + \text{Cos}\phi \hat{a}_y)$$

$$\therefore \vec{B}_1 = (-0,4 \cdot 10^{-5} \hat{a}_x + 0,8 \cdot 10^{-5} \hat{a}_y) T$$

Finalmente, reemplazando en (2):

$$\Rightarrow \vec{B}_Q = (1,6 \cdot 10^{-5} \hat{a}_x + 0,8 \cdot 10^{-5} \hat{a}_y) T$$

Para hallar \vec{H} aplico: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$ (en el vacío)

$$\Rightarrow \vec{H}_Q = \frac{\vec{B}_Q}{\mu_0} = (12,74 \hat{a}_x + 6,366 \hat{a}_y) \frac{A}{m}$$

Problema N° 4

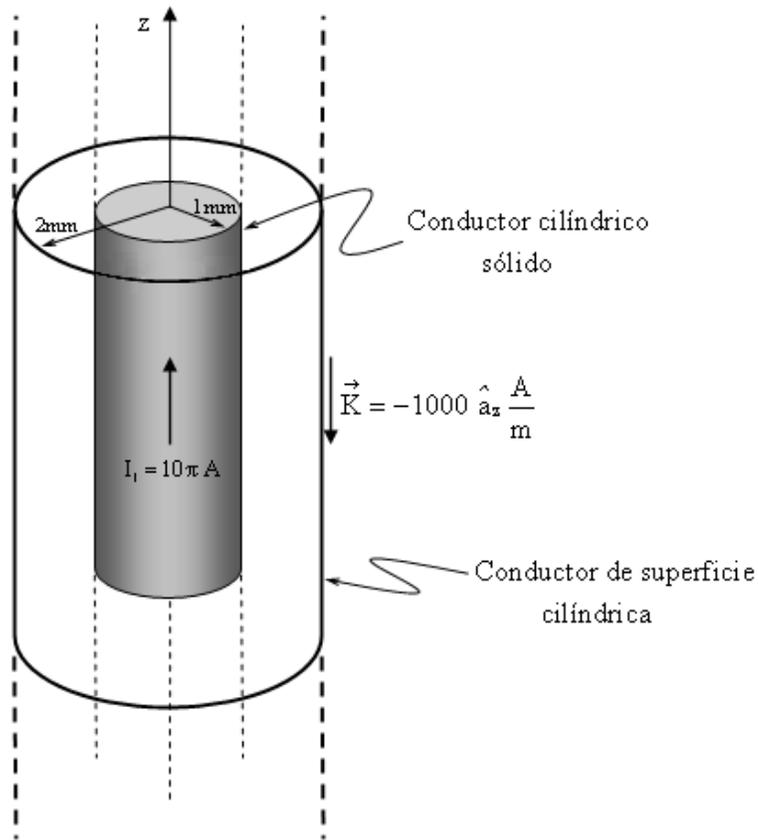
Un conductor sólido tiene una sección transversal circular de radio 1 mm , centrado en el eje z , y porta una corriente total distribuida uniformemente de $10\pi \text{ A}$ en la dirección \hat{a}_z .

Hay una corriente laminar $\vec{K} = -1000 \hat{a}_z \text{ A/m}$ en $\rho = 2 \text{ mm}$. Encontrar \vec{H} en la región: a) $0 \leq \rho \leq 1 \text{ mm}$; b) $1 \leq \rho \leq 2 \text{ mm}$; c) $2 \leq \rho \leq 4 \text{ mm}$ d) ¿Qué valor de la

corriente laminar debe estar colocada en $\rho = 4 \text{ mm}$; tal que $\vec{H} = 0$ para $\rho > 4 \text{ mm}$?

Resolución:

De acuerdo con lo señalado en el enunciado, la figura correspondiente es:



a) Cálculo de \vec{H} en la región $0 \leq \rho \leq 1\text{mm}$

Por ley de Ampere:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I; \quad I = I_{\text{encerrada}}$$

$$H(2\pi\rho) = I_{\text{encerrada}} \quad \dots (1)$$

Hallo $I_{\text{encerrada}}$:

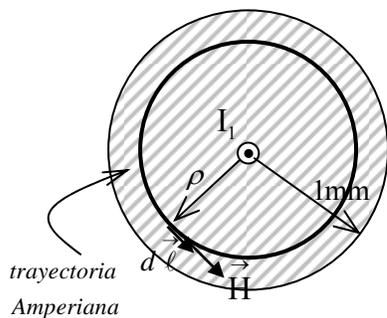
Si la corriente está uniformemente distribuida, se cumple que:

$$J = cte \Rightarrow \frac{I_1}{\pi(1 \cdot 10^{-3})^2} = \frac{I_{\text{enc.}}}{\pi\rho^2} \quad \Rightarrow \quad I_{\text{enc}} = 10^7 \pi \rho^2$$

Reemplazando en (1):

$$H(2\pi\rho) = 10^7 \pi \rho^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = (5 \cdot 10^6 \rho \hat{a}_\phi) \frac{A}{m}$$

Sección transversal del conductor sólido

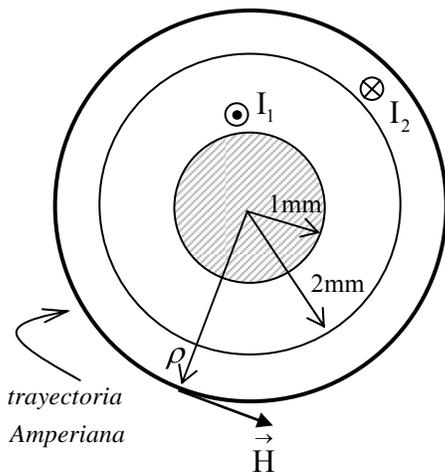


b) Cálculo de \vec{H} en la región $1\text{ mm} < \rho < 2\text{ mm}$

En este caso: $H = \frac{I_1}{2\pi\rho} \Rightarrow \vec{H} = \left(\frac{5}{\rho} \hat{a}_\phi\right) \frac{\text{A}}{\text{m}}$

c) Cálculo de \vec{H} en la región $2\text{ mm} < \rho < 4\text{ mm}$

Sección transversal



Por ley de Ampère : $\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{\text{enc}}$

$$H(2\pi\rho) = I_1 + I_2 \dots (2)$$

Donde:

$$I_1 = 10\pi \text{ A}$$

$$I_2 = I_{\text{LAMINAR TOTAL}} = \left(-1000 \hat{a}_z \frac{\text{A}}{\text{m}}\right) (2\pi(2 \cdot 10^{-3})\text{m}) = -4\pi \text{ A}$$

En (2):

$$H(2\pi\rho) = 10\pi \text{ A} + (-4\pi \text{ A}) = 6\pi \text{ A} = I'_{\text{enc}}$$

$$\Rightarrow H = \frac{3}{\rho}, \quad \therefore \vec{H} = \left(\frac{3}{\rho} \hat{a}_\phi\right) \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

d) Piden \vec{K}_1 tal que el $\vec{H}_{(\rho = 4\text{ mm})} = 0$

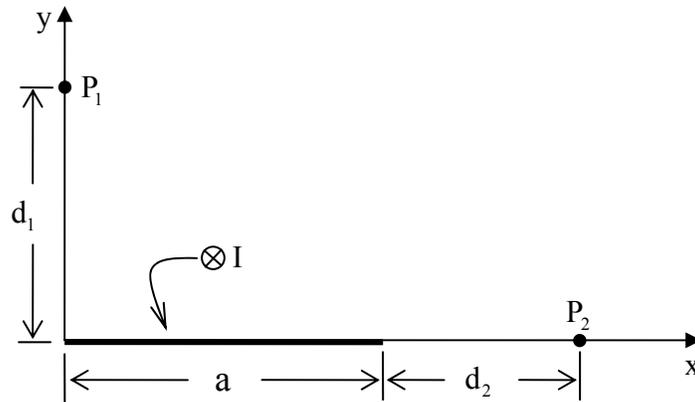
$$\Rightarrow \vec{H}_{(\rho = 4\text{ mm})} = 0 \text{ si } I_{\text{enc}} = 0$$

Del ejercicio anterior se obtuvo: $I'_{\text{enc}} = 6\pi \rightarrow 6\pi + I_{\text{enc } 1} = 0 \Rightarrow I_{\text{enc } 1} = -6\pi \text{ A}$

$$\text{Luego: } \vec{K}_1 = \frac{-6\pi \text{ A}}{2\pi(4 \cdot 10^{-3} \text{ m})} \hat{a}_z = -750 \hat{a}_z \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Problema N° 5

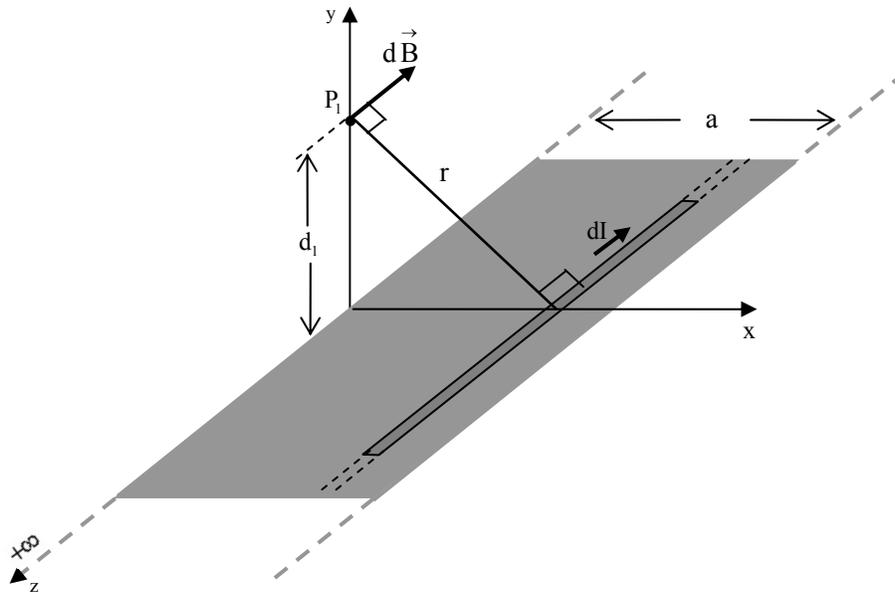
Una corriente I fluye longitudinalmente por una lámina conductora delgada y muy larga de anchura a , como se muestra en la figura. Suponga que la corriente fluye hacia el interior del papel y determine la densidad de flujo magnético \vec{B} en los puntos $P_1(0; d_1)$ y $P_2(a + d_2; 0)$.



Resolución:

a) Cálculo de \vec{B} en el punto $P_1(0; d_1)$:

Para calcular \vec{B} en el punto P_1 , debido a la corriente I que fluye por la lámina conductora delgada y muy larga, analizo a partir de un elemento diferencial de la forma de un hilo infinito, tal como se indica en la figura mostrada a continuación.



Se sabe : $B_{(\text{Hilo } \infty)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, donde: r es la distancia perpendicular al hilo infinito.

En nuestro caso:

$$dB_{(Lámina)} = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} \implies d\vec{B}_{(Lámina)} = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r} \hat{u} \dots (1)$$

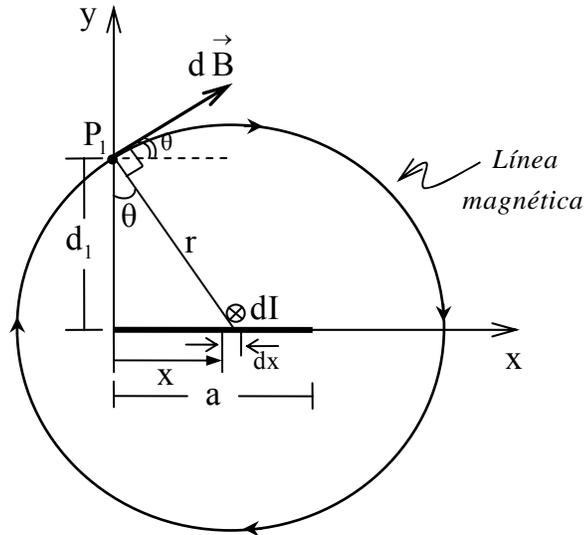
donde:

$$dI = \frac{I}{a} dx$$

$$r = \sqrt{d_1^2 + x^2}$$

de la figura :

$$\hat{u} = \text{Cos}\theta \hat{a}_x + \text{Sen}\theta \hat{a}_y$$



Reemplazando en (1):

$$d\vec{B}_{(Lámina)} = \frac{\mu_0 I dx}{2\pi a \sqrt{d_1^2 + x^2}} (\text{Cos}\theta \hat{a}_x + \text{Sen}\theta \hat{a}_y)$$

$$\text{Integrando tenemos: } \vec{B}_{(Lámina)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \int \frac{(\text{Cos}\theta \hat{a}_x + \text{Sen}\theta \hat{a}_y) dx}{\sqrt{d_1^2 + x^2}}$$

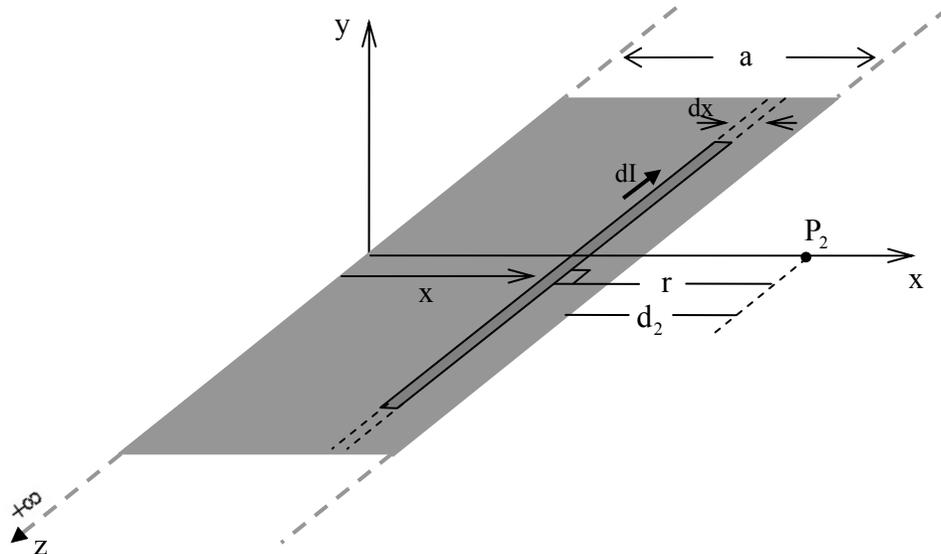
$$\vec{B}_{(Lámina)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left[\int_0^a \frac{d_1 dx}{d_1^2 + x^2} \hat{a}_x + \int_0^a \frac{x dx}{d_1^2 + x^2} \hat{a}_y \right]$$

Resolviendo, obtenemos:

$$\vec{B}_{(Lámina)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left[\text{Arctg}\left(\frac{a}{d_1}\right) \hat{a}_x + \text{Ln}\left(\frac{\sqrt{d_1^2 + x^2}}{d_1}\right) \hat{a}_y \right]$$

b) Cálculo de \vec{B} en el punto $P_2(a + d_2; 0)$

En este caso procedemos de manera similar que en a).



Ya sabemos que la magnitud de \vec{B} , debido a una corriente I , que circula por un hilo infinito, a una distancia r de dicho hilo, viene dada por:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

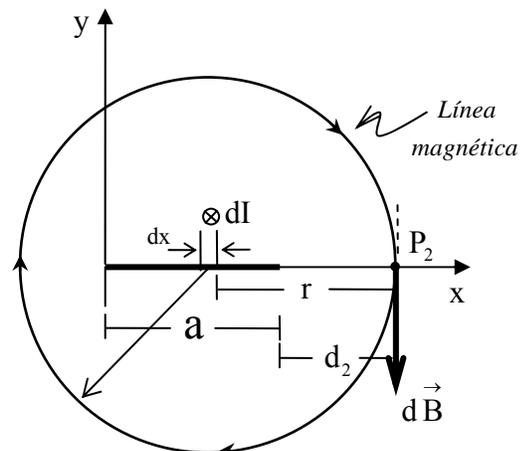
En nuestro caso, este campo "B" será un diferencial de campo para la lámina, es decir:

$$dB_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 dI}{2\pi r}, \text{ donde: } r = (a + d_2 - x). \text{ Además se cumple:}$$

$$\frac{I}{a} = \frac{dI}{dx} \Rightarrow dI = \frac{I}{a} dx, \quad \text{Luego: } dB_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 I dx}{2\pi a(a + d_2 - x)}$$

Vectorialmente sería:

$$d\vec{B}_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 I dx}{2\pi a(a + d_2 - x)} \hat{u} \dots (2)$$



Del gráfico: $\hat{u} = -\hat{a}_y$

Reemplazando en (2) e integrando:

$$\vec{B}_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \int_0^a \frac{dx}{(a + d_2 - x)} (-\hat{a}_y),$$

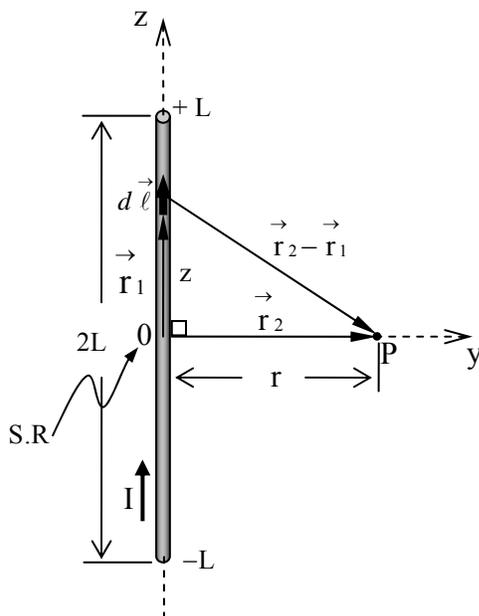
Resolviendo la integral obtenemos:
$$\vec{B}_{(\text{Lámina})} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \text{Ln} \left(\frac{a + d_2}{d_2} \right) \hat{a}_y$$

Problema N° 6

Una corriente continua I fluye por un alambre recto de longitud $2L$. Calcule la inducción magnética \vec{B} en un punto localizado a una distancia " r " del alambre y en el plano que lo divide en dos segmentos iguales. Determine primero el vector potencial magnético " \vec{A} ".

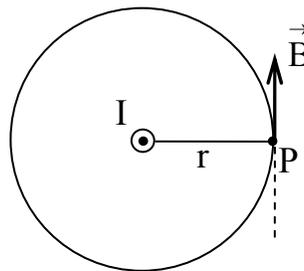
Resolución:

Por tratarse de un alambre recto de longitud $2L$, la figura es:



Aplicando la regla de la mano derecha el vector \vec{B} está entrando al punto P.

Vista de Planta



Para un Hilo con corriente I , se cumple que:

$$\vec{A}_{(\vec{r})} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell}}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

De la figura:

$$d\vec{\ell} = dz \hat{a}_z; \quad \vec{r}_2 = r \hat{a}_y; \quad \vec{r}_1 = z \hat{a}_z; \quad \left| \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \right| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Reemplazando: } \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{z=-L}^{+L} \frac{dz \hat{a}_z}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\text{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 + r^2} \right) \right]_{-L}^{+L} \hat{a}_z \\ &\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \text{Ln} \left(\frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{\sqrt{L^2 + r^2} - L} \right) \hat{a}_z \end{aligned}$$

Hallo $\vec{B}(\vec{r})$; aplicando rotacional :

Se cumple: $\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r})$

En este caso \vec{A} depende de la coordenada "r", por lo tanto su rotacional en coordenadas cilíndricas viene dado por:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{\partial}{\partial r} (A_{(z)}) \hat{a}_\phi$$

Resolviendo se obtiene:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I L}{2\pi r \sqrt{L^2 + r^2}} \hat{a}_\phi$$