UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

CURSO: TEORÍA DE CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

PROFESOR: Ing. JORGE MONTAÑO PISFIL

PROBLEMAS RESUELTOS DE MÉTODOS GENERALES PARA RESOLVER PROBLEMAS ELECTROSTÁTICOS

Problema Nº 1

Cierta densidad de carga volumétrica en el espacio libre varía como $\rho = 100\varepsilon_0 / r^{2,5}$.

a) Utilizando la ecuación de Poisson encuentre $\varphi_{(r)}$ si se supone que $r^2 E_r \to 0$ cuando $r \to 0$, mientras que $\varphi \to 0$ cuando $r \to \infty$. b) Ahora encuentre $\varphi_{(r)}$ usando la ley de Gauss y una integral de línea.

Resolución

a) Cálculo de $\varphi_{(r)}$ utilizando la ecuación de Poisson

En el espacio libre o vacío, la ecuación de Poisson viene dada por:

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_o} \quad . . . \textbf{(1)}$$

Por condición: $\rho = 100\varepsilon_0 / r^{2,5}$

Reemplazando "ρ" en **(1)**, tenemos:

$$\nabla^2\varphi = \frac{-100}{r^{2,5}} \quad . . . \textbf{(2)}$$

Se sabe que en coordenadas esféricas, cuando $\varphi = \varphi_{(r)}$ (el potencial eléctrico sólo depende de la coordenada r), el Laplaciano queda:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) \Longrightarrow \nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right)$$

Luego, la ecuación **(2)** equivale a: $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = \frac{-100}{r^{2,5}}$

Esta ecuación es una ecuación diferencial de 2do grado. Para resolverla, despejo $r^2\,dr$ e integro por primera vez y obtengo:

$$\int d\left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = -100 \int \frac{dr}{r^{0,5}}$$

$$\Rightarrow r^2 \frac{d\varphi}{dr} = -200\ r^{0,5} + C_1$$, luego:

$$d\varphi = (-200\ r^{-1,5} + C_1 r^{-2})dr$$

A continuación, integro por segunda vez y obtengo:

$$\varphi_{(r)} = \frac{400}{r^{0,5}} - \frac{C_1}{r} + C_2 \quad \textbf{. . . (3)}$$

De la ecuación **(3)** se observa que para conocer el potencial $\varphi_{(r)}$ necesito conocer el valor de las constantes C_1 y C_2. Para hallar estas constantes, primero calculo el campo eléctrico $\vec{E}$, aplicando gradiente de potencial, y luego aplicamos las condiciones de frontera dadas en el problema. Es decir:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \quad \Longrightarrow \quad \vec{E}_{(r)} = -\nabla\varphi_{(r)} = \left(\frac{200}{r^{1,5}} - \frac{C_1}{r^2} \right)\hat{a}_r \quad \textbf{. . . (4)}$$

Hallo las constantes C_1 y C_2 aplicando las Condiciones de Frontera (C.F.):

1ra C.F.) $r^2 E_r \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$

Evaluando esta condición en la ecuación **(4)**, queda:

$$r^2 \left(\frac{200}{r^{1,5}} - \frac{C_1}{r^2} \right) = 0 \quad \text{cuando} \quad r \rightarrow 0$$

Resolviendo obtengo que: $C_1 = 0$

2da C.F.) $\varphi \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow \infty$

Evaluando esta condición en la ecuación **(3)**, queda:

$$\frac{400}{r^{0,5}} - C_1 + C_2 = 0 \quad \text{cuando} \quad r \rightarrow \infty$$; (se halló que $C_1 = 0$)

Luego: $C_2 = \dfrac{-400}{\infty} \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$

Finalmente reemplazo las constantes C_1 y C_2 en la ecuación **(3)** y obtengo la función potencial $\varphi_{(r)}$: $\varphi_{(r)} = \dfrac{400}{r^{0,5}} = \dfrac{400}{\sqrt{r}}(\text{Volt})$

b) *Cálculo de $\varphi_{(r)}$ utilizando la Ley de Gauss y una integral de línea:*

Por Ley de Gauss, en su forma integral, tenemos:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad ; \quad Q = \int_V \rho\, dV \quad . . . \textbf{(I)}$$

Por condición del problema: $\rho = \dfrac{100\varepsilon_0}{r^{2.5}}$

Reemplazando esta condición, así como los vectores $\vec{E} = E\,\hat{a}_r$ y

$d\vec{S} = r^2\, sen\theta\; d\theta\; d\phi\; \hat{a}_r$, y el elemento diferencial de volumen $dV = r^2\, sen\theta\; d\theta\; d\phi\; dr$, la ecuación **(I)** queda:

$$\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} E\,r^2 \mathrm{sen}\theta\, d\theta\, d\phi = \frac{1}{\varepsilon_o}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{r}\frac{100\varepsilon_o}{r^{2,5}}\, r^2 \mathrm{sen}\theta\, d\theta\, d\phi\, dr$$

$$E\,r^2(2)(2\pi) = 100\int_{r=0}^{r} r^{-0,5} dr \int_{\theta=0}^{\pi}\mathrm{sen}\theta\, d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi$$

$$E(4\pi\, r^2) = 800\pi\, r^{0,5} \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{200}{r^{1,5}} \quad \therefore \quad \vec{E} = \frac{200}{r^{1,5}}\hat{a}_r$$

Para hallar $\varphi_{(r)}$, conociendo el campo eléctrico $\vec{E}$, utilizo: $\varphi = -\int \vec{E}\cdot d\vec{r}$

Al reemplazar $\vec{E} = \dfrac{200}{r^{1,5}}\hat{a}_r$ y $d\vec{r} = dr\;\hat{a}_r$, tenemos:

$$\varphi_{(r)} = -\int \frac{200}{r^{1,5}}\, dr \quad \Longrightarrow \quad \varphi_{(r)} = \frac{400}{r^{0,5}} + C \quad . . . \textbf{(II)}$$

Para hallar la constante "C" aplicamos la condición de frontera siguiente:

$$\text{Si} \quad r \to \infty \quad \Rightarrow \quad \varphi_{(r\to\infty)} = 0$$

Luego: $0 = \dfrac{400}{\infty} + C \quad \Longrightarrow \quad C = 0$

Reemplazando la constante C en la ecuación **(II)**, tenemos:

$$\varphi_{(r)} = \frac{400}{\sqrt{r}} \;\; \text{(Volt)}$$

Problema Nº 2

Desde el punto de vista electrostático la tierra puede considerarse como una esfera conductora con carga negativa y rodeada de una atmósfera cargada positivamente. La magnitud del campo eléctrico en la superficie es de unos 200 V/m, y a una altura de 2 000 m disminuye hasta unos 20 V/m. Hasta esa altura, **h** = 2 000 m, la densidad volumétrica de carga puede considerarse constante. Considere que el radio de la tierra es R = 6 400 Km.

a) Determine la densidad de carga superficial media de la tierra.

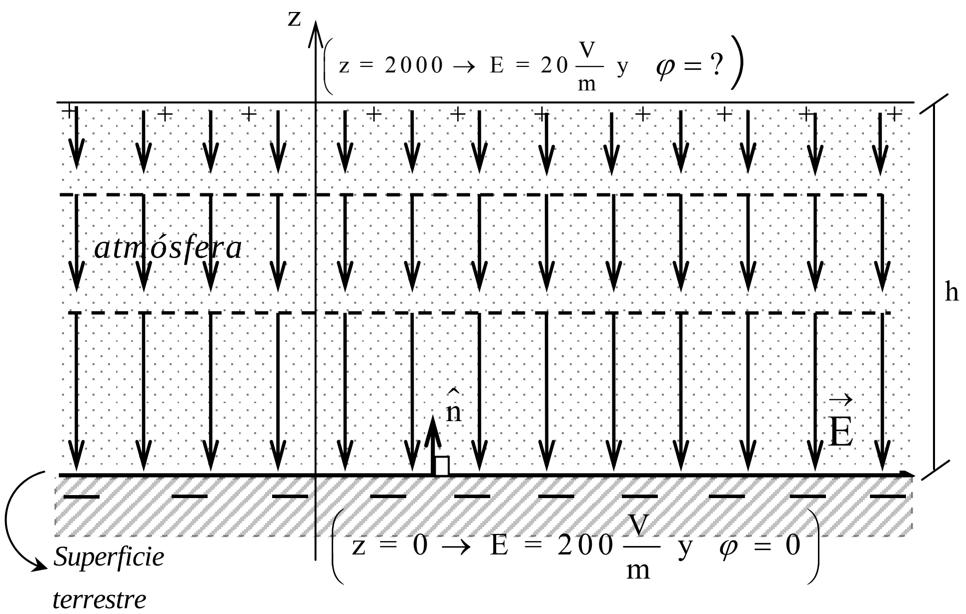
b) Calcule la densidad de carga volumétrica de la atmósfera hasta la altura **h** indicada.

c) Si tomamos el potencial de la tierra como referencia (0 volt) ¿Cuál será su valor a 2000 m?

Nota: puede aproximarse el problema mediante una geometría plana, ya que $h << R$.

Resolución

Según el enunciado nuestro modelo de atmósfera es el siguiente:



(Se observa que el modelo de atmósfera se va ha comportar como un capacitor plano)

a) Cálculo de σ (densidad de carga superficial) de la tierra:

Se sabe que la densidad de carga superficial viene dada por: $\sigma = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n}$

Según datos: $\vec{E} = -200\ \hat{a}_z \dfrac{V}{m}$ (para z = 0) ; además $\hat{n} = +\hat{a}_z$

Luego: $\sigma = \varepsilon_0 (-200\ \hat{a}_z) \cdot \hat{a}_z \Rightarrow \sigma = -200\varepsilon_0$

Reemplazando $\varepsilon_0 = 8,85.10^{-12}\,\dfrac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$, se obtiene que: $\sigma = -1\ 770\,\dfrac{pC}{m^2}$

b) Calculo de "ρ" (densidad de carga volumétrica)

Por ecuación de Poisson: $\nabla^2\varphi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ **. . . (1)**

En coordenadas rectangulares, cuando $\varphi = \varphi_{(z)}$ (el potencial sólo depende de la coordenada z), el laplaciano de φ queda:

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{d^2\varphi}{dz^2}$$

Reemplazando en **(1)**: $\dfrac{d^2\varphi}{dz^2} = -\dfrac{\rho}{e_0}$

Resolviendo esta ecuación diferencial de segundo grado (integro dos veces), obtenemos:

$$\varphi = -\frac{\rho\, z^2}{2\varepsilon_0} + C_1 z + C_2 \quad \textbf{. . . (2)}$$

Aplico la condición de frontera: $\varphi = 0$; si $z = 0$

Evaluando la ecuación **(2)** para $z = 0$, obtenemos: $C_2 = 0$

Además, sabemos que: $\vec{E} = -\nabla\varphi = -\dfrac{d\varphi}{dz}\hat{a}_z$, entonces:

$$\vec{E} = (C_1 - \frac{\rho z}{\varepsilon_0})(-\hat{a}_z) \Rightarrow \quad E = C_1 - \frac{\rho z}{\varepsilon_0} \quad \textbf{. . . (3)}$$

Aplico condición de frontera: $z = 0 \rightarrow E = 200\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \Rightarrow C_1 = 200\dfrac{V}{m}$

Reemplazando C_1 en **(3) obtengo**: $E = \left(200 - \dfrac{\rho z}{\varepsilon_0}\right)\dfrac{V}{m}$ **. . . (4)**

Por condición de frontera: si $z = 2\,000\,m \rightarrow E = 20\dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

Evaluando la ecuación **(4)** para $z = 2\,000\,m$ obtenemos:

$$\rho = 9.10^{-2}\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \rho = 7,965.10^{-13}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}$$

c) Cálculo de φ para z = 2 000 m :

Se halló que: $\varphi = -\dfrac{\rho\, z^2}{2\varepsilon_0} + 200z$

Luego, si z = 2 000 m $\Rightarrow \varphi = 2,2\ .\ 10^5$ **Volt**

Problema Nº 3

En coordenadas cilíndricas, la densidad volumétrica de carga es $\rho_v = \left(\frac{10}{\rho}\right)\frac{\text{pC}}{\text{m}^3}$. Si $\varphi = 0$ en $\rho = 1\text{m}$ y $\varphi = 100\text{V}$ en $\rho = 4\text{m}$, los cuales se deben a la distribución de la carga, halle:

a) φ en $\rho = 3\text{m}$; b) $\vec{E}$ en $\rho = 2\text{m}$

* Considere que se trata de un problema de electrostática en el vacío.

Resolución

a) Cálculo de "φ" en $\rho = 3\text{m}$

Por ecuación de Poisson, en el vacío, se cumple: $\nabla^2\varphi = -\frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$ . . . (1)

Por condición: $\rho_v = \left(\frac{10^{-11}}{\rho}\right)\frac{\text{C}}{\text{m}^3}$, luego, la ecuación queda: $\nabla^2\varphi = -\frac{10^{-11}}{\rho\varepsilon_0}$ ..... (2)

En coordenadas cilíndricas, cuando "φ" (potencial eléctrico) sólo depende de "ρ", el laplaciano queda:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)$$

Por lo tanto la ecuación **(2)** equivale: $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) = -\frac{10^{-11}}{\rho\varepsilon_0}$

Resolviendo esta ecuación diferencial, obtenemos:

$$\varphi = -\frac{10^{-11}}{\varepsilon_0}\rho + \text{A}\,\text{Ln}\rho + \text{B} \quad . . . (3)$$

Hallamos las constantes *A* y *B* aplicando las condiciones de frontera (**C.F.**) siguientes:

1ra C.F.) Si $\rho = 1\text{m}$: $\varphi_{(\rho = 1)} = 0\text{ V}$

Evaluando la ecuación (3) para $\rho = 1m$, tenemos:

$$0 = -\frac{10^{-11}}{\varepsilon_0} + \text{B} \quad \Rightarrow \quad \text{B} = \frac{10^{-11}}{\varepsilon_0}$$

2da C.F.) Si $\rho = 4\text{m}$: $\varphi_{(\rho\ =\ 4)} = 100\ \text{V}$

Evaluando la ecuación **(3)** para $\rho = 4\,m$, tenemos:

$$100V = -\frac{4\cdot 10^{-11}}{\varepsilon_0} + \text{A Ln4} + \frac{10^{-11}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \text{A} = \left(100V + \frac{3\cdot 10^{-11}}{\varepsilon_0}V\right)\frac{1}{\text{Ln4}}$$

$$\therefore\ \text{A} = 72{,}1348V + \frac{2{,}164\cdot 10^{-11}}{\varepsilon_0}V$$

Reemplazando en **(3)**:

$$\varphi = -\frac{10^{-11}}{\varepsilon_0}\rho + \left(72{,}1348 + \frac{2{,}164\cdot 10^{-11}}{\varepsilon_0}\right)\text{Ln}\rho + \frac{10^{-11}}{\varepsilon_0} \quad (V)$$

Evaluamos "φ" para $\rho = 3\text{m}$: $\varphi_{(\rho\ =\ 3)} = 79{,}67\ \text{V}$

b) Cálculo de $\vec{\text{E}}$ cuando $\rho = 2\text{m}$:

Se sabe que: $\boxed{\vec{\text{E}} = -\nabla\varphi}$

En coordenadas cilíndricas, cuando "φ" sólo depende de la coordenada "ρ", el gradiente será: $\nabla\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\rho}\hat{\text{a}}_\rho$

Luego:

$$\vec{\text{E}} = -\nabla\varphi = \left(\frac{10^{-11}}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\rho}\left(72{,}1348 + \frac{2{,}164\cdot 10^{-11}}{\varepsilon_0}\right)\right)\hat{\text{a}}_\rho$$

Evaluando $\vec{\text{E}}$ para $\rho = 2\text{m}$ obtenemos:

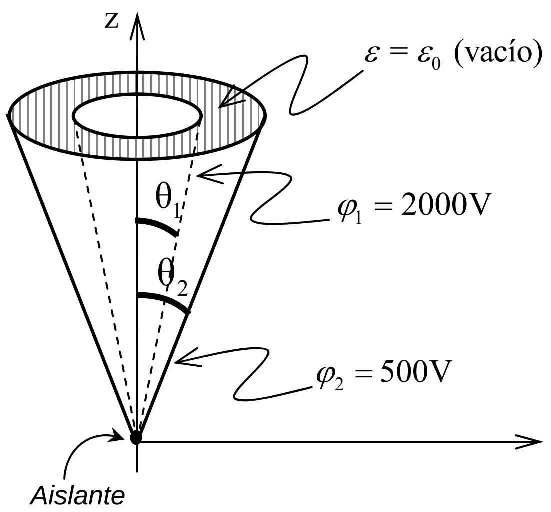
$$\vec{\text{E}} = \left(-36{,}16\ \hat{\text{a}}_\rho\right)\frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Problema Nº 4

Dos conos conductores coaxiales tienen sus vértices en el origen y están definidos por $\theta_1 = 40^o$ y $\theta_2 = 55^o$. El cono interior está a un potencial de 2 000 V, mientras que el exterior está a 500 V. Una pequeña cantidad de aislante impide que los conos se toquen; a) encuentre $\varphi_{(\theta)}$; b) determine φ en $P_1(r = 0,6\,m \,;\, \theta = 45^o \,;\, \phi = 60^o)$; c) Calcule $\vec{E}_{(r\,;\,\theta)}$; d) encuentre $\vec{E}$ en P_1; e) especifique la carga total sobre la superficie $\theta = 40^o$; $0,1m < r < 0,5m$; $100^o < \phi < 170^o$, suponiendo $\varepsilon = \varepsilon_0$ para $40^o < \theta < 55^o$.

Resolución

Según el enunciado la figura es la que se muestra a continuación:



Donde:

$\theta_1 = 40^o$

$\theta_2 = 55^o$

a) Cálculo de "$\varphi_{(\theta)}$" :

Cuando el potencial "φ" sólo depende de la coordenada "θ", la solución a la ecuación de Laplace a utilizar, en coordenadas esféricas, es:

$$\boxed{\varphi_{(\theta)} = A\,Ln\left(tg\frac{\theta}{2}\right) + B} \quad \textbf{. . . (1)}$$

Hallamos las constantes *A* y *B* aplicando las condiciones de frontera (**C.F.**) siguientes:

1ra C.F.) Si $\theta = 40°$ $\Rightarrow$ $\varphi_{(\theta\,=\,40^o)} = 2\,000\,V$

Evaluando la ecuación **(1)** para $\theta = 40^o$, tenemos:

$$2\,000\,V = A\,Ln\,(tg\,20^o) + B \quad ...\ (2)$$

2da C.F.) Si θ = 55° $\Rightarrow \varphi_{(\theta=55°)} = 500V$

Evaluando la ecuación (1) para $\theta = 55^o$, tenemos:

$$500V = \text{Ln}(\text{tg}\,27{,}5°) + \text{B} \;\; ...\; (3)$$

Resolviendo las ecuaciones **(2)** y **(3)**, obtenemos:

$$A = -4\;191{,}7473\;V \quad ; \quad B = -2\;236{,}53\;V$$

Reemplazando en la ecuación **(1)** tenemos:

$$\varphi_{(\theta)} = \left[-4\;191{,}7473\;\text{Ln}(\;\text{tg}\frac{\theta}{2}) - 2\;236{,}53 \right] V$$

O también:

$$\varphi_{(\theta)} = \left[-4{,}19\;\text{Ln}(\text{tg}\frac{\theta}{2}) - 2{,}24 \right] \text{kV}$$

b) Cálculo de "φ" para P_1 (r = 0,6 m ; θ = 45º ; ϕ = 60º)

Evaluando en la ecuación del potencial obtenida en a), tenemos: $\varphi = 1{,}458\;\text{kV}$

c) Cálculo de $\vec{\text{E}}_{(r\,,\,\theta)}$

Como ya se calculó el potencial eléctrico "φ", el campo eléctrico se halla aplicando gradiente de potencial. Es decir: $\vec{\text{E}} = -\nabla\varphi$.

Hallando el gradiente de φ, en coordenadas esféricas, resulta:

$$\vec{\text{E}} = \left(\frac{4{,}19}{\text{r sen}\theta} \hat{\text{a}}_\theta \right) \frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

d) Cálculo de $\vec{\text{E}}$ ***en P_1 (0,6 m ; 45º ; 60º):***

Evaluando en el punto P_1 obtenemos: $\vec{\text{E}} = \left(9{,}88\;\hat{\text{a}}_\theta \right) \dfrac{\text{kV}}{\text{m}}$

e) Cálculo de la carga total sobre la superficie $\theta = 40^o$; $0{,}1m < r < 0{,}5m$; $100^o < \phi < 170^o$***, suponiendo*** $\varepsilon = \varepsilon_0$ ***para*** $40^o < \theta < 55^o$***.***

Por ley de Gauss: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$. Despejando Q obtenemos: $Q = \oint_S \varepsilon_0\, \vec{E} \cdot d\vec{S}$

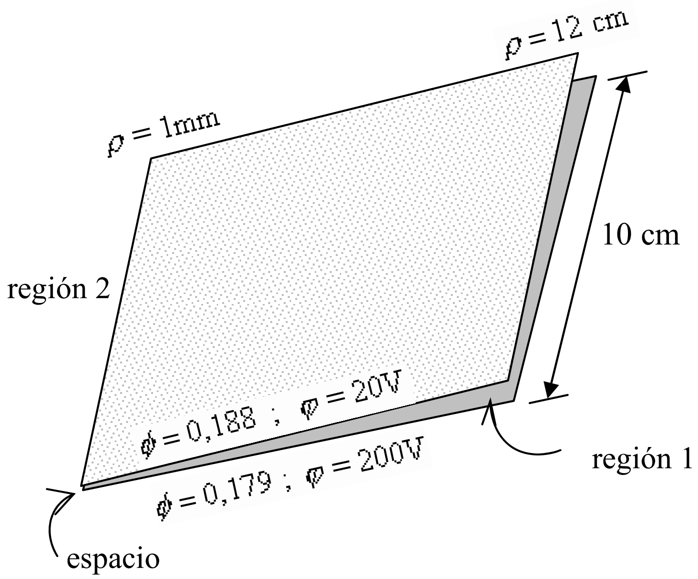
Reemplazando los vectores $\vec{E}$ y $d\vec{S}$ tenemos:

$$\text{Q} = \int_{0,1}^{0,5} \int_{100^o}^{170^o} \varepsilon_0 \left(\frac{4{,}19}{\text{r sen}40^o} \hat{\text{a}}_\theta \right) \cdot \left(\text{r sen}40^o\;\text{d}\phi\,\text{dr}\;\hat{\text{a}}_\theta \right) = 4{,}19\varepsilon_0 \left(\int_{0,1}^{0,5} \text{dr} \right) \left(\int_{100^o}^{170^o} \text{d}\phi \right)$$

$$\therefore \;\; Q = 18{,}14nC$$

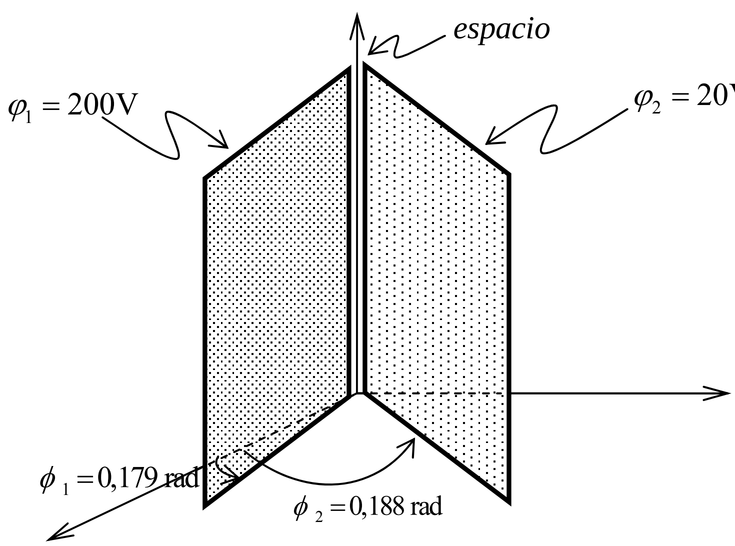
Problema Nº 5

Los dos planos conductores mostrados en la figura están definidos por *0,001 m <* ρ *< 0,120 m* ; *0 < z < 0,1m* ; ϕ *= 0,179 rad* y ϕ *= 0,188 rad*. El medio que rodea a los planos es aire. Para la región 1; *0,179 rad <* ϕ *< 0,188 rad* desprecie los efectos de borde y calcule: **a)** el potencial eléctrico φ en función de ϕ; **b)** el campo eléctrico $\vec{E}$ en función de ρ; **c)** la densidad de flujo eléctrico $\vec{D}$ en función de ρ. **d)** la densidad superficial de carga σ en la superficie superior del plano inferior. **e)** la carga Q en la superficie superior del plano inferior.



Resolución

La figura dada equivale a:



a) Cálculo de "$\varphi_{(\phi)}$"***:***

En este caso el potencial "φ" sólo depende de la coordenada "ϕ", luego la solución de la ecuación de Laplace a utilizar, en coordenadas cilíndricas, es:

$$\boxed{\varphi_{(\phi)} = \mathrm{A}\phi + \mathrm{B}} \quad \textbf{. . . (1)}$$

Hallamos las constantes $A \ y \ B$ aplicando las condiciones de frontera (**C.F.**) siguientes:

1ra C.F.) Si ϕ = 0,179 rad : φ = 200 V

Evaluando en la ecuación (1) tenemos:

A (0,179 rad) + B = 200 V **. . . (2)**

2da C.F.) Si ϕ = 0,188 rad : φ = 20V

Evaluando en la ecuación (1) tenemos:

A (0,188 rad) + B = 20 V **. . . (3)**

Resolviendo las ecuaciones **(2)** y **(3)** obtenemos:

A = - 20 000 V y **B = 3 780 V**

Reemplazando las constantes $A \ y \ B$ en la ecuación **(1)** obtengo:

$$\varphi_{(\phi)} = (-20\,000\,\phi + 3\,780)\,\mathrm{V}$$

b) Cálculo de $\vec{\mathrm{E}}$: Si se sabe que : $\vec{\mathrm{E}} = -\nabla\varphi$

$$\vec{\mathrm{E}} = \left(\frac{20\,000}{\rho}\,\hat{\mathrm{a}}_\phi\right)\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

c) Cálculo de "$\vec{\mathrm{D}}$"***: Se sabe :*** $\vec{\mathrm{D}} = \varepsilon_o \vec{\mathrm{E}}$

$$\vec{\mathrm{D}} = \left(\frac{177}{\rho}\,\hat{\mathrm{a}}_\phi\right)\frac{\mathrm{nC}}{\mathrm{m}^2}$$

d) Cálculo de "σ"

Se sabe que la densidad de carga superficial "σ" viene dada por:

$$\sigma = \varepsilon_0\,\vec{E}\cdot\hat{n} = \vec{D}\cdot\hat{n} \quad ; \quad \hat{\mathrm{n}} = \text{Vector unitario normal}$$

Reemplazando : $\vec{D} = \left(\dfrac{177}{\rho}\ \hat{a}_{\phi} \right) \dfrac{nC}{m^2}$ y $\hat{n} = \hat{a}_{\phi}$, tenemos: $\sigma = \dfrac{177}{\rho} \dfrac{nC}{m^2}$

e) Cálculo de "Q"

La carga "Q" en la superficie superior del plano inferior se halla por:

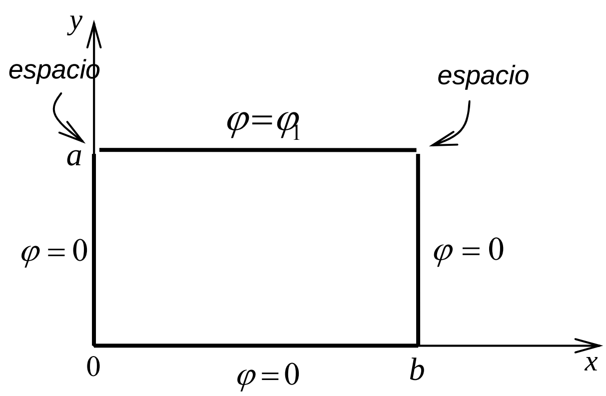
$$Q = \int_S \sigma\, dS = \int_{z=0}^{z=0,1} \int_{\rho=0,001}^{\rho=0,12} \frac{177}{\rho}\, d\rho\, dz = 177 \cdot 0,1 \cdot Ln\left(\frac{0,12}{0,001} \right)$$

$$\therefore \quad Q = 84.74\ nC$$

Problema Nº 6

Determine la función potencial para la región interior de la artesa rectangular de longitud infinita cuya sección transversal se ilustra en la figura.

Se sabe que: $\varphi_1 = \varphi_0\, sen(7\pi x / b), \quad y = a,\ 0 \le x \le b$



Resolución

Por los datos dados en el enunciado deducimos que se trata de un problema bidimensional en coordenadas rectangulares o cartesianas.

Además, cuando el potencial "φ" es cero o nulo para las condiciones de frontera dependientes de x: $x = 0$ y $x = b$, la solución particular de la ecuación de Laplace que se utiliza es aquella donde las funciones seno y coseno dependen de x. Por lo tanto, la ecuación a utilizar es la siguiente:

$$\varphi_{(x,y)} = \left(A\cosh ky + Bsenhky \right)\left(C\cos kx + Dsenkx \right) \quad . \ . \ . \quad \textbf{(1)}$$

Hallamos las constantes A, B, C y D aplicando las condiciones de frontera (**C.F.**) siguientes:

1ra C.F.) Si $x = 0$: $\varphi_{(0,y)} = 0$ para $0 \le y \le a$

Evalúo la ecuación **(1)** para $x = 0$:

$$\varphi_{(0,y)} = \left(A\cosh ky + Bsenhky \right)\left(C\cos 0 + Dsen0 \right) = 0$$

Sabemos que un producto de dos factores es cero cuando por lo menos uno de ellos es cero. En este caso, el segundo factor debe ser igual a cero. Es decir:

$$C(1)+D(0)=0 \quad \therefore \quad C=0$$

2da C.F.) Si $y=0$: $\varphi_{(x,0)}=0$ para $0 \le x \le b$

Evalúo la ecuación (1) para $y=0$:

$$\varphi_{(x,0)}=\left(A\cos 0+Bsen0\right)\left(C\cos kx+Dsenkx\right)=0$$

En este caso, el primer factor debe ser igual a cero. Es decir:

$$A(1)+B(0)=0 \quad \therefore \quad A=0$$

Reemplazo las constantes *A* y *C* en la ecuación (1):

$$\varphi_{(x,y)}=\left(Bsenhky\right)\left(Dsenkx\right)$$

Hacemos: $B\cdot D=E$

Luego:

$$\varphi_{(x,y)}=E\left(senhky\right)\left(senkx\right) \quad . \; . \; . \quad \textbf{(2)}$$

3ra C.F.) Si $x=b$: $\varphi_{(b,y)}=0$ para $0 \le y \le a$

Evalúo la ecuación **(2)** para $x=b$:

$$\varphi_{(b,y)}=E\left(senhky\right)\left(senkb\right)=0$$

$$senkb=0=sen(n\pi)\,; \quad \forall n\ge 1$$

Luego:

$$kb=n\pi \quad \Longrightarrow \quad k=\frac{n\pi}{b} \quad ; \quad \forall n\ge 1$$

Reemplazo en la ecuación (2):

$$\varphi_{(x,y)}=E\left(senh\frac{n\pi}{b}y\right)\left(sen\frac{n\pi}{b}x\right)$$

En general, tenemos:

$$\varphi_{(x,y)}=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\left(senh\frac{n\pi}{b}y\right)\left(sen\frac{n\pi}{b}x\right) \quad . \; . \; . \quad \textbf{(3)}$$

4ta C.F.) Si $y=a$: $\varphi_{(x,a)}=\varphi_0 sen\left(\frac{7\pi}{b}x\right)$ para $0 \le x \le b$

Evalúo la ecuación (3) para $y=a$:

$$\varphi_{(x,a)}=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\left(senh\frac{n\pi a}{b}\right)\left(sen\frac{n\pi}{b}x\right)=\varphi_0 sen\left(\frac{7\pi}{b}x\right)$$

Desarrollando la serie tenemos:

$$E_1\left(senh\frac{\pi}{b}a\right)\left(sen\frac{\pi}{b}x\right)+....+E_7\left(senh\frac{7\pi}{b}a\right)\left(sen\frac{7\pi}{b}x\right)=\varphi_0 sen\left(\frac{7\pi}{b}x\right)$$

Comparando ambos miembros de la ecuación obtenemos:

$$E_7=\frac{\varphi_0}{\left(senh\frac{7\pi}{b}a\right)}$$

Además: $E_1=E_2=....=E_n=0$; $\forall n\neq 7$

Reemplazando $E_1, E_2, ..., E_n$ en la ecuación **(3)** tenemos que la solución general es:

$$\varphi_{(x,y)}=\frac{\varphi_0\left(senh\frac{7\pi}{b}y\right)\left(sen\frac{7\pi}{b}x\right)}{senh\frac{7\pi}{b}a}$$

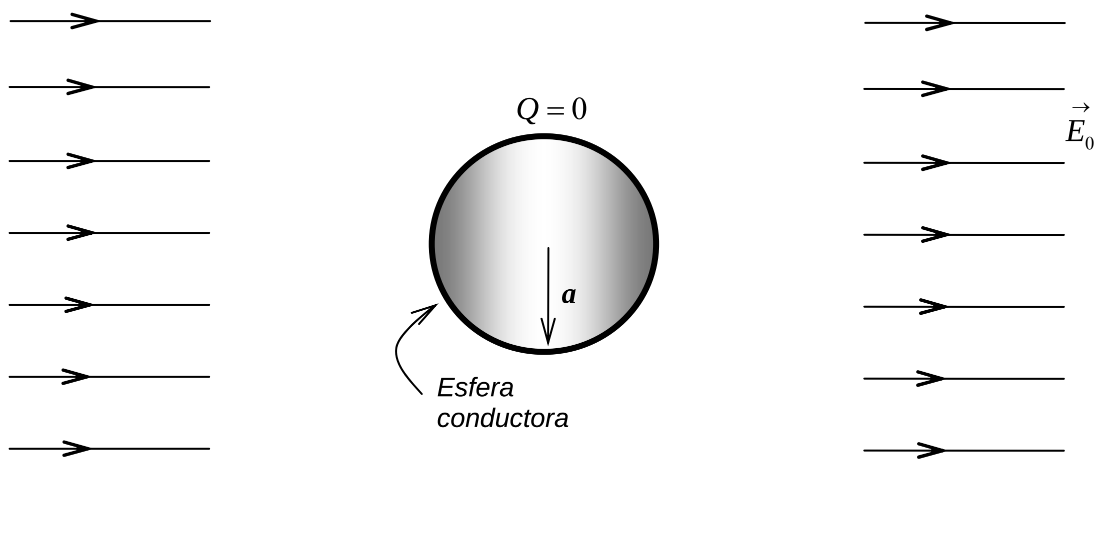
<u>Problema Nº 7</u>

Una esfera conductora descargada de radio a se coloca en un campo eléctrico inicialmente uniforme $\vec{E}_0$ (ver la figura). Calcule:

a) El potencial eléctrico en puntos exteriores a la esfera

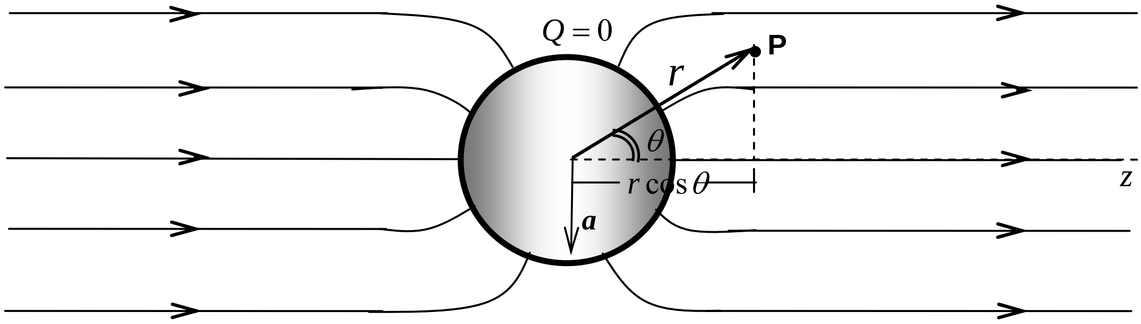
b) La intensidad de campo eléctrico en puntos exteriores a la esfera

c) La densidad de carga resultante "σ" en la esfera.



Resolución

Como la esfera conductora está descargada ($Q=0$), las líneas de fuerza del campo eléctrico en las cercanías de la esfera se comportan en la forma mostrada a continuación. Observe que estas líneas de fuerza ingresan (o salen) perpendicularmente a la superficie de la esfera, la cual a su vez es una superficie equipotencial. En este caso, el potencial de la esfera es igual a cero porque la carga de la esfera es cero.



a) Cálculo del potencial eléctrico "$\varphi_{(r,\theta)}$" en puntos exteriores a la esfera

Si el potencial "φ" depende sólo de las coordenadas r y θ, la solución a la ecuación de Laplace son los armónicos esféricos. Es decir:

$$\varphi_{(r,\theta)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n r^n + C_n r^{-(n+1)}\right]P_{n(\theta)}$$

Desarrollando la ecuación anterior tenemos:

$$\varphi_{(r,\theta)}=A_0+\frac{C_0}{r}+A_1 r\cos\theta+\frac{C_1}{r^2}\cos\theta+A_2 r^2\cdot\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta-1\right)+....+\frac{C_n}{r^{n+1}}P_{n(\theta)} \quad ... \quad \textbf{(1)}$$

Hallamos las constantes $A_{0,}A_1,....,A_n$ y $C_{0,}C_1,....,C_n$, aplicando las condiciones de frontera (**C.F.**) siguientes:

1ra C.F.) Si $r\to\infty$ (puntos lejanos de la esfera): $\vec{E}_{(r,\theta)}\big|_{r\to\infty}=\vec{E}_0$

Luego:

$$\varphi_{(r,\theta)}\big|_{r\to\infty}=-\int\vec{E}\cdot d\vec{r}\ ; \quad \text{donde: } \vec{E}=\vec{E}_0=E_0\hat{a}_z \quad \text{y} \quad d\vec{r}=dz\,\vec{a}_z$$

$$\varphi_{(r,\theta)}\big|_{r\to\infty}=-E_0 z+cte=-E_0 r\cos\theta+cte \quad ... \quad \textbf{(2)}$$

Igualamos las ecuaciones (1) y (2), y las evalúo para $r\to\infty$.

$$-E_0 r\cos\theta+cte=A_0+\frac{C_0}{r}+A_1 r\cos\theta+\frac{C_1}{r^2}\cos\theta+....$$

Comparando ambos miembros de la ecuación obtenemos:

$$A_0=cte \quad ; \quad A_1=-E_0$$

Además, todas las *A* a partir de *A2* son iguales a cero. Es decir:

$$A_2 = A_3 = ... = A_n = 0 \quad ; \quad \forall n \geq 2$$

Reemplazamos en la ecuación (1):

$$\varphi_{(r,\theta)} = A_0 + \frac{C_0}{r} - E_r r\cos\theta + \frac{C_1}{r^2}\cos\theta + ... + \frac{C_n}{r^{n+1}} P_{n(\theta)} \quad . \ . \ . \ \textbf{(3)}$$

2da C.F.) La esfera está descargada, es decir su carga es igual a cero

Si Q=0, entonces el término C_0 / r es igual a cero, por lo tanto la constante C_0 es igual a cero ($C_0 = 0$).

* Recuerde que el potencial de una esfera de radio r y carga Q, viene dado por $Q / 4\pi\varepsilon_0 r$.

Reemplazo en (3):

$$\varphi_{(r,\theta)} = A_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{C_1}{r^2}\cos\theta + ... + \frac{C_n}{r^{n+1}} P_{n(\theta)} \quad . \ . \ . \ \textbf{(4)}$$

3ra C.F.) Si $r = a$: $\varphi_{(a,\theta)} = 0$ (potencial propio de la esfera)

Evaluando la ecuación **(4)** para $r = a$ obtenemos: $C_1 = a^3 E_0$

Además: $C_n = 0 \quad \forall n \geq 2$

Reemplazando en la ecuación **(4)** tenemos:

$$\varphi_{(r,\theta)} = A_0 - E_0 r\cos\theta + \frac{a^3\varepsilon_0}{r^2}\cos\theta$$

O también: $\varphi_{(r,\theta)} = A_0 - E_0 r\cos\theta\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)$

b) Cálculo de $\vec{E}$ en puntos exteriores a la esfera

La intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$ lo hallamos aplicando gradiente de potencial, es decir:

$$\vec{E}_{(r,\theta)} = -\nabla\varphi_{(r,\theta)}$$

Hallando el gradiente del potencial en coordenadas esféricas, tenemos:

$$\vec{E}_{(r,\theta)} = E_0\cos\theta\left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right)\hat{a}_r + E_0 sen\theta\left(\frac{a^3}{r^3} - 1\right)\hat{a}_\theta$$

c) Cálculo de σ de la esfera

Se cumple: $\sigma = \varepsilon_0\, \vec{E} \cdot \hat{n}$

En nuestro caso: $r = a$ y $\hat{n} = \hat{a}_r$.

Luego, la densidad de carga superficial σ de la esfera es: $\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$

Problema Nº 8

Los conductores de un cable coaxial muy largo tienen radios *a* y *b* (*a* < *b*). El conductor interior se halla a un potencial φ y el conductor exterior se halla conectado a tierra. Si la región $a < \rho < c$ se llena con un dieléctrico de permitividad ε_1, y la región $c < \rho < b$ con un dieléctrico de permitividad ε_2. Calcular:

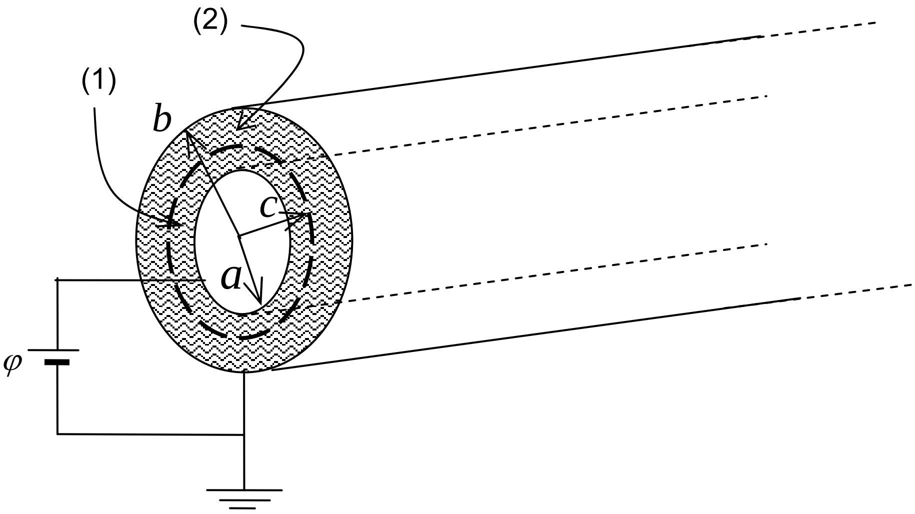
a) El potencial eléctrico φ, el campo eléctrico $\vec{E}$, la densidad de flujo eléctrico $\vec{D}$ y la polarización $\vec{P}$ en cualquier punto de la región $a < \rho < b$.

b) La densidad superficial de carga libre en cada superficie conductora.

c) Las densidades de polarización presentes

Resolución

Según el enunciado la figura correspondiente es:



Sabemos que un cable coaxial está constituido por dos conductores y uno o más materiales dieléctricos entre ellos. Además, en el enunciado nos dan los potenciales de estos conductores (condiciones de frontera), por lo tanto el problema se resuelve aplicando la ecuación de Laplace.

De la figura observamos que hay dos regiones, las cuales denominaremos: región (1) y región (2).

a) Cálculo de $\varphi, \vec{E}, \vec{D}$ **y** $\vec{P}$ **para puntos** $a < \rho < b$

Según el enunciado, el potencial eléctrico "φ" depende sólo de la coordenada ρ, por lo tanto la solución a la ecuación de Laplace a utilizar es:

$$\varphi_{(\rho)} = A\,Ln\rho + B$$

Como en la región entre los conductores hay dos materiales dieléctricos, entonces esta ecuación se aplica para cada región, por lo tanto tenemos:

Para la región (1) $a < \rho < c$: $\varphi_{1(\rho)} = A_1\,Ln\rho + B_1$ . . . **(1)**

Para la región (2) $c < \rho < b$: $\varphi_{2(\rho)} = A_2\,Ln\rho + B_2$ . . . **(2)**

Las constantes A_1, A_2, B_1 y B_2 se hallan aplicando las condiciones de frontera (C.F.) siguientes:

1ra C.F.: Si $\rho = b \Rightarrow \varphi_{2(\rho=b)} = 0$

Evaluando la ecuación **(2)** para $\rho = b$ tenemos:

$$0 = A_2\,Lnb + B_2 \Rightarrow B_2 = -A_2\,Lnb \quad . . . \textbf{(3)}$$

2da C.F.: Si $\rho = a \Rightarrow \varphi_{1(\rho=a)} = \varphi$

Evaluando la ecuación **(1)** para $\rho = a$ tenemos:

$$\varphi = A_1\,Lna + B_1 \Rightarrow B_1 = \varphi - A_1\,Lna \quad . . . \textbf{(4)}$$

3ra C.F.: Si $\rho = c$ (interfaz dieléctrico-dieléctrico) $\Rightarrow \varphi_{1(\rho=c)} = \varphi_{2(\rho=c)}$

Igualamos las ecuaciones **(1)** y **(2)** evaluando para $\rho = c$

$$A_1\,Lnc + B_1 = A_2\,Lnc + B_2 \quad . . . \textbf{(5)}$$

4ta C.F.: Si $\rho = c$ (interfaz dieléctrico-dieléctrico) :

$$D_{2n} = D_{1n} \ \ (siempre\ que\ \sigma = 0)$$

Luego, se cumple que: $\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n}$

En esta igualdad hallo $E_{2n}\ y\ E_{1n}$ utilizando gradiente de potencial. Finalmente obtengo:

$$A_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} A_1 \quad . . . \textbf{(6)}$$

Reemplazando las ecuaciones (3), (4), (6) en (5) obtenemos:

$$A_1 = \frac{\varphi}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} Ln(c/b) - Ln(c/a)} \quad ; \quad A_2 = \frac{\varphi}{Ln(c/b) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} Ln(c/a)}$$

$$B_1 = \varphi - \frac{\varphi\,Ln\,a}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} Ln(c/b) - Ln(c/a)} \quad ; \quad B_2 = -\frac{\varphi\,Ln\,b}{Ln(c/b) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} Ln(c/a)}$$

Finalmente reemplazo estas constantes en las ecuaciones **(1)** y **(2)** y obtengo la función potencial para cada región.

$$\varphi_{1(\rho)} = \frac{\varphi Ln\rho}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} Ln(c/b) - Ln(c/a)} + \varphi - \frac{\varphi Lna}{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} Ln(c/b) - Ln(c/a)} \quad ; \quad a < \rho < c$$

$$\varphi_{2(\rho)} = \frac{\varphi Ln\rho}{Ln(c/b) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} Ln(c/a)} - \frac{\varphi Lnb}{Ln(c/b) - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} Ln(c/a)} \quad ; \quad c < \rho < b$$

Hallo $\vec{E}$ ***aplicando gradiente de potencial***

Se sabe que: $\vec{E} = -\nabla \varphi$

Luego:

$$\vec{E}_{1(\rho)} = -\nabla \varphi_{1(\rho)} \Longrightarrow \vec{E}_{1(\rho)} = \frac{\varphi}{\rho\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} Ln(b/c) + Ln(c/a)\right)} \hat{a}_\rho \quad ; \quad a < \rho < c$$

$$\vec{E}_{2(\rho)} = -\nabla \varphi_{2(\rho)} \Longrightarrow \vec{E}_{2(\rho)} = \frac{\varphi}{\rho\left(Ln(b/c) + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} Ln(c/a)\right)} \hat{a}_\rho \quad ; \quad c < \rho < b$$

Hallo $\vec{D}$ **utilizando la relación:** $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$

Luego:

$$\vec{D}_{1(\rho)} = \frac{\varepsilon_1 \ \varphi}{\rho\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} Ln(b/c) + Ln(c/a)\right)} \hat{a}_\rho \quad ; \quad a < \rho < c$$

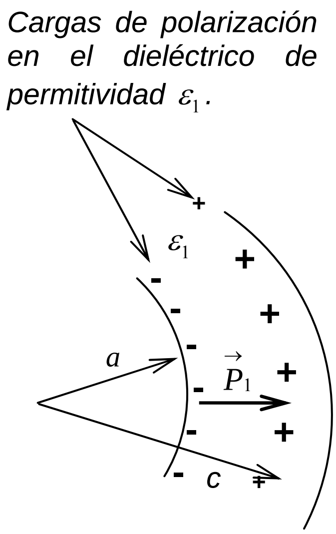
$$\vec{D}_{2(\rho)} = \frac{\varepsilon_2 \ \varphi}{\rho\left(Ln(b/c) + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} Ln(c/a)\right)} \hat{a}_\rho \quad ; \quad c < \rho < b$$

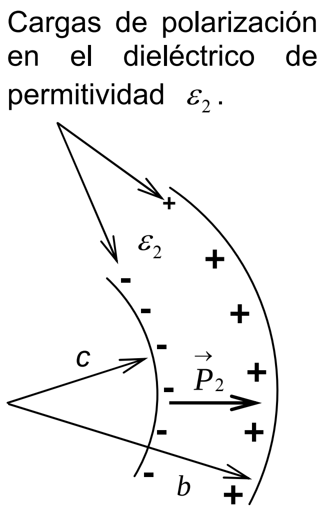
Hallo $\vec{P}$ **utilizando la relación:** $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$

$$\vec{P}_{1(\rho)} = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\varphi}{\rho\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} Ln(b/c) + Ln(c/a)\right)} \hat{a}_\rho \quad ; \quad a < \rho < c$$

$$\vec{P}_{2(\rho)} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\ \varphi}{\rho\left(Ln(b/c) + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} Ln(c/a)\right)} \hat{a}_\rho \quad ; \quad c < \rho < b$$

En las figuras mostradas a continuación se observa porciones de material dieléctrico polarizado, de las regiones (1) y (2), y los correspondientes vectores polarización.





b) Cálculo de "σ" para cada superficie conductora

Sabemos: $\sigma = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n}$

Para la superficie de radio $\rho = a$: $\hat{n} = +\hat{a}_\rho$

$$\sigma_{(\rho=a)} = +\frac{\varepsilon_1 \varphi}{a\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} Ln(b/c) + Ln(c/a)\right)}$$

Para la superficie de radio $\rho = b$: $\hat{n} = -\hat{a}_\rho$

$$\sigma_{(\rho=b)} = -\frac{\varepsilon_2 \varphi}{b\left(Ln(b/c) + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} Ln(c/a)\right)}$$

c) Cálculo de σ_{Pol} y ρ_{Pol}

Hallo σ_{Pol} aplicando la ecuación: $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \hat{n}$

Luego:

Si $\rho = a$: $\hat{n} = -\hat{a}_\rho$ $\Rightarrow$ $\sigma_{Pol(\rho=a)} = -\dfrac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\varphi}{a\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} Ln(b/c) + Ln(c/a)\right)}$

Si $\rho = b$: $\hat{n} = +\hat{a}_\rho$ $\Rightarrow$ $\sigma_{Pol(\rho=b)} = +\dfrac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\varphi}{b\left(Ln(b/c) + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} Ln(c/a)\right)}$

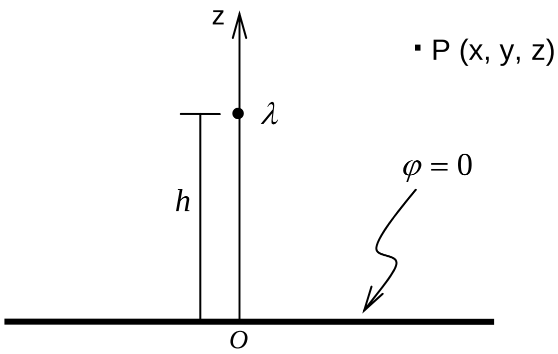
Para hallar ρ_{Pol} utilizo la ecuación: $\rho_{p\grave{o}l} = -\nabla \cdot \vec{P}$

Al hallar la divergencia del vector polarización $\vec{P}$ se obtiene como resultado cero, por lo tanto la densidad de carga volumétrica de polarización también es cero. Es decir:

$$\rho_{Pol} = 0$$

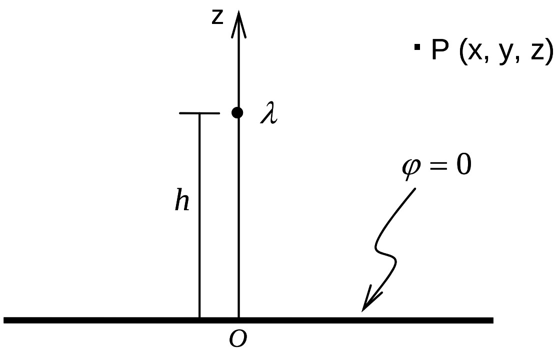
Problema Nº 9

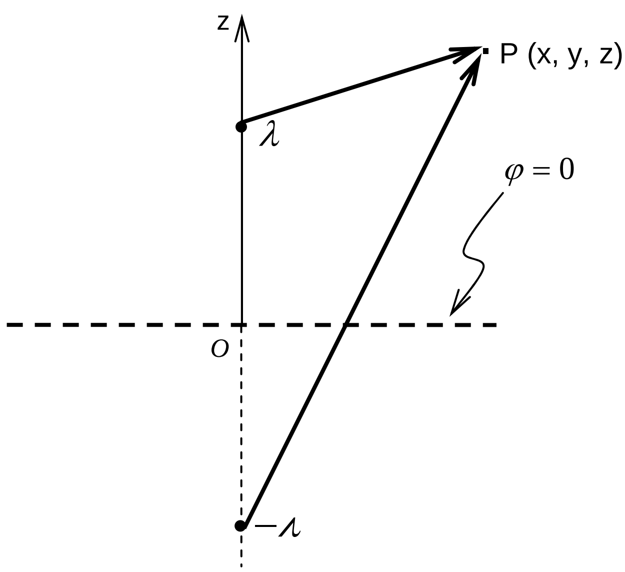
Sea un hilo muy largo con densidad de carga lineal $+\lambda$ situado a una distancia h de un plano conductor puesto a tierra, tal como se observa en la figura. Determine la intensidad de campo eléctrico y el potencial eléctrico en el punto P (x, y, z). Calcule asimismo la carga superficial inducida en el plano conductor.



Resolución

Si la carga $+\lambda$ está ubicada en $x = 0$, $z = h$, su imagen $-\lambda$ está ubicada en $x = 0$, $z = -h$, de manera que las dos son paralelas al eje y.





CÁLCULO DE LA INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO EN EL PUNTO P

Para calcular la intensidad de campo eléctrico en el punto P ($\vec{E}_P$) se utiliza el principio de superposición aplicado a los campos eléctricos. Esto significa que $\vec{E}_P$ es igual a la suma de las intensidades de campo eléctrico debido a la carga lineal $+\lambda$ y a su carga imagen $-\lambda$.

Es decir:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{P(+\lambda)} + \vec{E}_{P(-\lambda)}$$

Como se trata de un hilo muy largo (hilo infinito), la magnitud de $\vec{E}$ es conocida, por lo tanto la ecuación anterior queda:

$$\vec{E}_{(P)} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_1}\hat{a}_{r_1} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r_2}(-\hat{a}_{r_2}) \quad . \ . \ . \quad (1)$$

De la figura:

$$\vec{r}_1 = (x;y;z) - (0;y;h) = (x;0;z-h) \Longrightarrow r_1 = \sqrt{x^2 + (z-h)^2}$$

$$\vec{r}_2 = (x;y;z) - (0;y;-h) = (x;0;z+h) \Longrightarrow r_2 = \sqrt{x^2 + (z+h)^2}$$

Asimismo:

$$\hat{a}_{r_1} = \frac{(x;0;z-h)}{\sqrt{x^2+(z-h)^2}} = \frac{x\hat{a}_x + (z-h)\hat{a}_z}{\sqrt{x^2+(z-h)^2}}$$

$$\hat{a}_{r_2} = \frac{(x;0;z+h)}{\sqrt{x^2+(z+h)^2}} = \frac{x\hat{a}_x + (z+h)\hat{a}_z}{\sqrt{x^2+(z+h)^2}}$$

Reemplazando en la ecuación (1) y simplificando obtenemos:

$$\vec{E}_P = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\ \frac{x\hat{a}_x + (z-h)\hat{a}_z}{x^2+(z-h)^2} - \frac{x\hat{a}_x + (z+h)\hat{a}_z}{x^2+(z+h)^2}\ \right]$$

CÁLCULO DEL POTENCIAL ELÉCTRICO EN EL PUNTO P

El potencial eléctrico en el punto P (φ_P) lo hallo también aplicando el principio de superposición. Es decir:

$$\varphi_P = \varphi_{P(+\lambda)} + \varphi_{P(-\lambda)}$$

Reemplazando los potenciales en el punto P, debido a las cargas lineales $+\lambda$ y $-\lambda$, y simplificando, la ecuación anterior queda:

$$\varphi_P = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$$

Reemplazando r_1 y r_2 obtenemos:

$$\varphi_P = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} Ln\left(\frac{x^2+(z-h)^2}{x^2+(z+h)^2}\right)^{1/2} \quad , \quad \text{para} \quad z \geq 0$$

CÁLCULO DE LA CARGA SUPERFICIAL INDUCIDA EN EL PLANO CONDUCTOR

La carga superficial inducida en el plano conductor se halla evaluando el campo eléctrico $\vec{E}_P$ en $z = 0$. Es decir:

$$\sigma = \varepsilon_0 \, E_z \Big/_{z=0} \quad \Longrightarrow \quad \sigma = -\frac{\lambda h}{\pi(x^2+h^2)}$$

Nota.- se comprueba también que la carga inducida por unidad de longitud en el plano conductor es igual a $-\lambda$.