UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

CURSO: TEORÍA DE CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

PROFESOR: Ing. JORGE MONTAÑO PISFIL

PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE CAMPO ELECTROSTÁTICO EN MEDIOS DIELÉCTRICOS

Problema Nº 1

Un capacitor de placas paralelas tiene sus placas en $x=0$ y en $x=d$, y el espacio entre las placas está lleno de un material no homogéneo con permitividad $\varepsilon=\dfrac{2d\varepsilon_0}{(x+d)}$. Si la placa en $x=d$ se mantiene a φ_0 cuando está a tierra la placa en $x=0$, encuentre:

a) La intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$

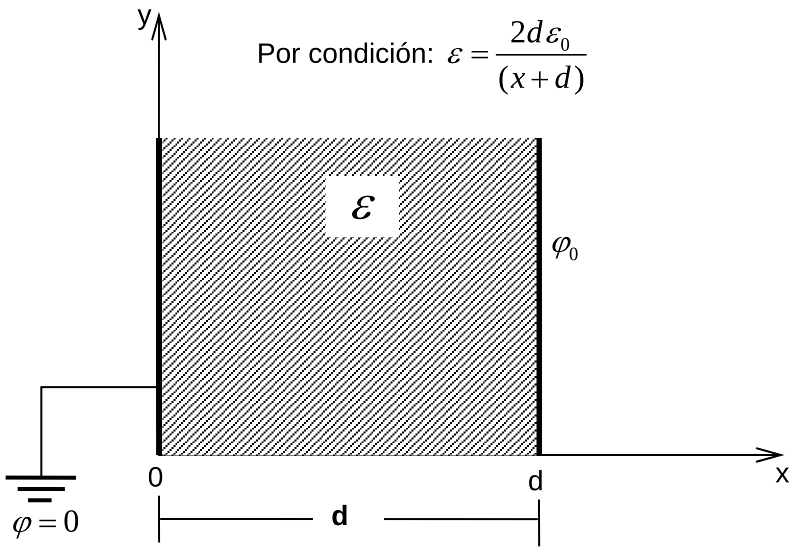
b) La polarización $\vec{P}$

c) La densidad superficial de carga de polarización σ_{Pol}

d) La capacitancia cuando $d=2,5mm$ y cada placa tiene un área de 200 cm^2. Desprecie el efecto de borde.

Resolución

Según el enunciado la figura es la que se muestra a continuación.



Como se observa en la figura, se trata de un capacitor plano con dieléctrico, y con una de sus placas conectada a tierra.

Sabemos que:

- En un capacitor plano el campo eléctrico sólo existe en su interior, es decir en la región comprendida entre las placas del capacitor.
- El campo eléctrico $\vec{E}$ está dirigido de la placa de mayor potencial eléctrico hacia la placa de menor potencial. Por lo tanto, en nuestro caso el vector $\vec{E}$ está dirigido hacia la izquierda.
- La magnitud de $\vec{E}$ en las cercanías de un conductor, cualesquiera que sea, viene dada por: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$

  Donde σ es la densidad superficial de carga de una las placas conductoras del capacitor.

a) *Cálculo de $\vec{E}$ (intensidad de campo eléctrico)*

Tal como se explicó, en este caso el vector $\vec{E}$ está dirigido hacia la izquierda (de la placa de mayor potencial hacia la menor potencial), por lo tanto se cumple:

$$\vec{E} = E(-\hat{a}_x)$$

Luego:

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{a}_x$$

Reemplazando $\varepsilon = \frac{2d\varepsilon_0}{(x+d)}$ queda: $\vec{E} = -\frac{\sigma(x+d)}{2d\varepsilon_0}\hat{a}_x$ . . . (1)

Para hallar "σ" utilizo la ecuación que relaciona el potencial φ con el campo eléctrico $\vec{E}$. Es decir:

$$\varphi_a - \varphi_b = -\int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Reemplazo $\vec{E}$:

$$\varphi_0 - \varphi_{Tierra} = -\int_0^d -\frac{\sigma(x+d)}{2d\varepsilon_0} \cdot dx\,\hat{a}_x$$

$$\varphi_0 = \frac{\sigma}{2d\varepsilon_0}\int_0^d (x+d)dx = \frac{\sigma}{2d\varepsilon_0}\left(\frac{3d^2}{2}\right) \Rightarrow \sigma = \frac{4\varphi_0\varepsilon_0}{3d}$$

Reemplazando "σ" en la ecuación (1) y simplificando obtenemos:

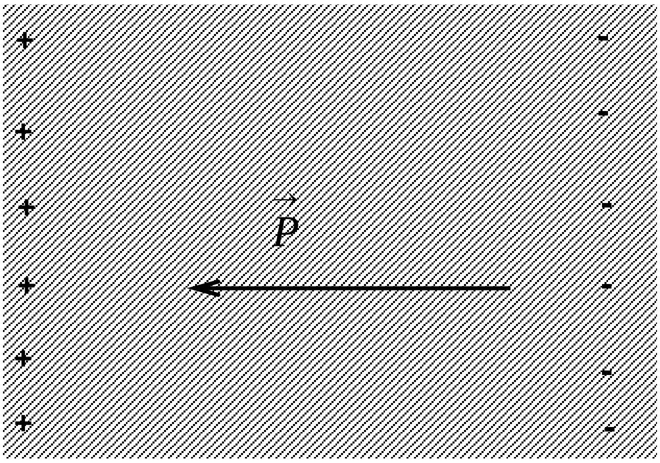
$$\vec{E} = -\frac{2\varphi_0(x+d)}{3d^2}\hat{a}_x$$

b) Cálculo de $\vec{P}$ (vector polarización)

Se sabe que: $\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}$

Reemplazando $\vec{E}$ y ε obtenemos: $\vec{P} = -\dfrac{2\varphi_0\varepsilon_0(d-x)}{3d^2}\hat{a}_x$

En la figura mostrada a continuación se observa al dieléctrico polarizado y al vector polarización $\vec{P}$.



c) Cálculo de σ_{Pol}

Se sabe que: $\sigma_{Pol} = \vec{P}\cdot\hat{n}$

* Para $x = 0$: $\hat{n} = -\hat{a}_x$ ⇒ $\sigma_{Pol} = \dfrac{2\varphi_0\varepsilon_0}{3d}$

* Para $x = d$: $\hat{n} = +\hat{a}_x$ ⇒ $\sigma_{Pol} = 0$

d) Cálculo de "C" (capacitancia)

La capacitancia se define por: $C = \dfrac{Q}{\varphi_{ab}}$

Luego: $C = \dfrac{\sigma A}{\varphi_0} = \dfrac{4\varepsilon_0 A}{3d}$ ⇒ $C = 94,4\,pF$

Problema Nº 2

Dos esferas conductoras concéntricas con radios de 3 y 5 cm, tienen la región entre ellas rellena de un dieléctrico homogéneo para el cual $\varepsilon_r = 5$. Si el potencial de la esfera interior es 100 V mientras que la del exterior es de -100 V, determine:

a) El potencial eléctrico $\varphi_{(r)}$

b) La intensidad de campo eléctrico $\vec{E}_{(r)}$

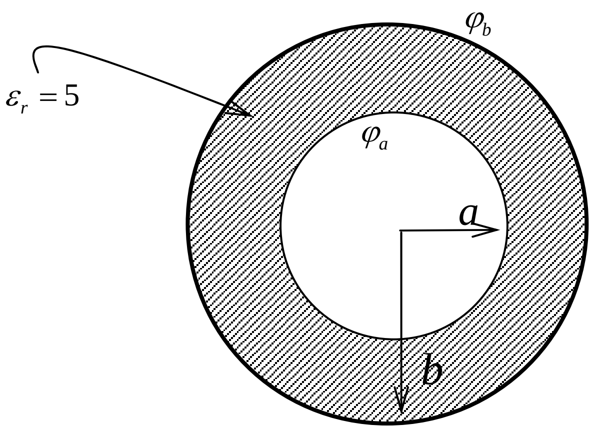
c) El valor de r para el cual $\varphi = 0$

d) La carga Q sobre la esfera interior

e) La capacitancia entre las dos esferas

Resolución

Según el enunciado la figura es:



Datos:

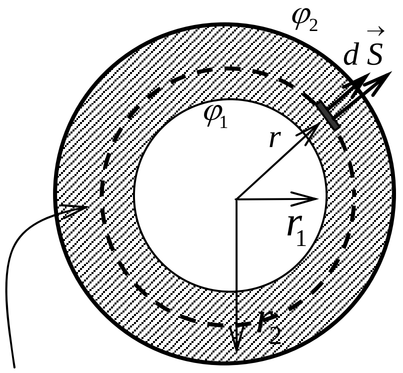
$a = 3cm = 0,03m$

$b = 5cm = 0,05m$

$\varphi_a = 100V$

$\varphi_b = -100V$

a) Cálculo del potencial eléctrico $\varphi_{(r)}$



Superficie Gaussiana

Por ley de Gauss en dieléctricos:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{LIBRE}$$

$$D(4\pi r^2) = Q \quad \Rightarrow \quad D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Luego:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \quad \therefore \quad \vec{E} = \frac{Q}{20\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r \; ; \quad a < r < b$$

Para conocer el valor del campo eléctrico $\vec{E}$ necesito conocer Q (carga libre encerrada por la superficie gaussiana = carga de la esfera conductora de radio 3 cm). Esta carga Q la hallo aplicando la ecuación que relaciona el potencial con el campo eléctrico:

$$\varphi_a - \varphi_b = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$200V = -\int_{0,05}^{0,03} \frac{Q}{20\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{a}_r \; dr\,\hat{a}_r \Longrightarrow Q = 300\pi\varepsilon_0$$

Reemplazando la carga Q tenemos que el campo eléctrico $\vec{E}$ es: $\vec{E} = \frac{15}{r^2}\hat{a}_r$

Luego, el potencial $\varphi_{(r)}$ viene dado por: $\varphi = -\int \vec{E}\cdot d\vec{r}$

Es decir: $\varphi_{(r)} = -\int \frac{15}{r^2}dr = \frac{15}{r} + C$

* Si $r = 0,03m \Longrightarrow \varphi_{(r=0,03\,m)} = 100V = \frac{15}{0,03m} + C \Longrightarrow C = -400V$

$$\therefore \quad \varphi_{(r)} = \left(\frac{15}{r} - 400\right)V$$

b) Cálculo de la intensidad de campo eléctrico $\vec{E}_{(r)}$

Como ya se conoce el potencial eléctrico $\varphi_{(r)}$, entonces el campo eléctrico $\vec{E}_{(r)}$ se halla aplicando gradiente de potencial. Es decir:

$$\vec{E}_{(r)} = -\nabla\varphi_{(r)}$$

Al hallar el gradiente de potencial, obtenemos que el campo eléctrico $\vec{E}_{(r)}$ viene dado por:

$$\vec{E}_{(r)} = \frac{15}{r^2}\hat{a}_r \left(\frac{V}{m}\right)$$

c) Cálculo de r ***para el cual*** $\varphi = 0$

Se halló que el potencial eléctrico es igual a $\varphi_{(r)} = \left(\frac{15}{r} - 400\right)V$.

Igualando a cero esta ecuación y despejando r obtengo que:

$$r = 0{,}0375\,m = 3{,}75\,cm$$

d) Cálculo de la carga eléctrica Q sobre la esfera interior

Para calcular la carga eléctrica Q sobre la esfera conductora interior, utilizo:

$$Q = \int_S \sigma\, dA$$

Donde:

$$\sigma = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \bullet \hat{n} \quad \Longrightarrow \quad \sigma = \varepsilon_0 (5)\left(\frac{15}{r^2}\hat{a}_r\right) \bullet \hat{a}_r = \frac{75\varepsilon_0}{r^2}\left(\frac{C}{m^2}\right)$$

$$dA = r^2\, sen\theta\, d\theta\, d\phi$$

La carga eléctrica Q queda expresada por:

$$Q = \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} \frac{75\varepsilon_0}{r^2} r^2 sen\theta\, d\theta\, d\phi \quad \Longrightarrow \quad Q = 300\pi\varepsilon_0 = 8{,}34\,nC$$

e) Cálculo de la capacitancia entre las dos esferas

La capacitancia se define por $C = \dfrac{Q}{\Delta\varphi}$; donde: $\Delta\varphi = \varphi_a - \varphi_b = 200V$

$$\Longrightarrow \quad C = \frac{8{,}34\,nC}{200\,V} = 41{,}7\ pF$$