UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

CURSO: **TEORÍA DE CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS**

PROFESOR: Ing. JORGE MONTAÑO PISFIL

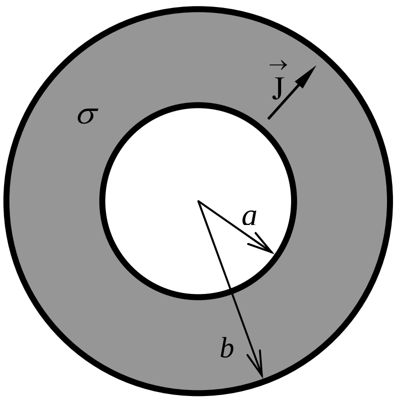
PROBLEMAS RESUELTOS DE CORRIENTE ELÉCTRICA

Problema Nº 1

Las superficies esféricas, de radios $a = 2cm$ y $b = 6cm$, son perfectamente conductoras y la región entre ellas está rellena con un material conductor para el cual $\sigma = 80 \ \ siemens/m$. Si la densidad de corriente es $\vec{J} = (10/\pi r^2)\hat{a}_r$ A/m^2 para 2 cm < r < 6 cm, encuentre: a) el flujo de corriente de un conductor perfecto al otro por unidad de longitud; b) el campo eléctrico $\vec{E}$; c) la diferencia de potencial entre los conductores perfectos; d) la potencia total disipada en el material conductor por metro de longitud.

Resolución

Por tratarse de dos superficies esféricas de radios a = 2 cm y b = 6 cm, con un material conductor entre ellas, la figura correspondiente es la que se muestra a continuación:



Datos:

$$a = 2cm = 0{,}02m$$

$$b = 6cm = 0{,}06m$$

$$\sigma = 80 \ \ siemens/m$$

$$\vec{J} = \left(\frac{10}{\pi r^2}\hat{a}_r\right)\frac{A}{m^2}$$

a) Cálculo de "I" (intensidad de corriente eléctrica)

Cuando se conoce la densidad de corriente $\vec{J}$, la intensidad de corriente eléctrica I se halla aplicando:

$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \quad . \ . \ . \ \textbf{(1)}$$

En coordenadas esféricas: $d\vec{S} = r^2 \, \text{Sen}\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{a}_r$

Reemplazando $\vec{J}$ y $d\vec{S}$ en la ecuación (1) y resolviendo dicha ecuación obtenemos: **I = 40 A**

b) Cálculo de $\vec{E}$ ***(intensidad de campo eléctrico) :***

Por ley de Ohm: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$

Despejando $\vec{E}$ tenemos:

$$\rightarrow \vec{E} = \left(\frac{10}{\pi r^2}\hat{a}_r\right)\left(\frac{1}{80}\right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{8\pi r^2}\hat{a}_r$$

c) Cálculo de " $\Delta\varphi$ ***" (diferencia de potencial):***

Conocido $\vec{E}$ (ver cálculos en (b)), la diferencia de potencial $\Delta\varphi$ se calcula utilizando la siguiente relación:

$$\Delta\varphi = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{r} \quad ;$$

Luego: $\Delta\varphi = -\int_{0,06}^{0,02} \frac{1}{8\pi r^2}\hat{a}_r \cdot dr\,\hat{a}_r \Longrightarrow \Delta\varphi = 1{,}326\ V$

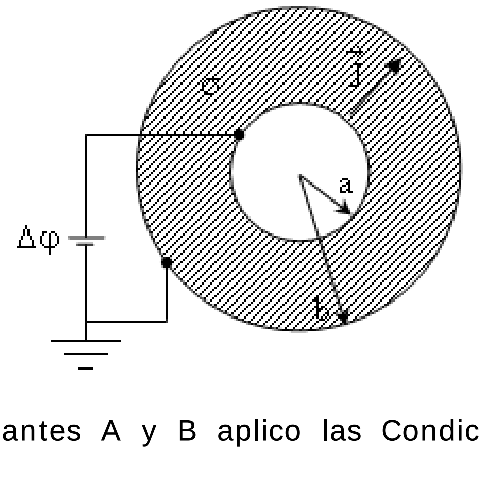
<u>Otro método para hallar "</u> $\Delta\varphi$ ***<u>":</u>***

Por condición: σ = 80 s/m, es decir "σ" es una cantidad constante, luego se cumple la ecuación de Laplace.

Se Sabe que cuando la función potencial "φ" depende sólo de la coordenada "r", la solución a la ecuación de Laplace a utilizar, es:

$$\varphi_{(r)} = -\frac{A}{r} + B \quad \textbf{. . . (2)}$$

Si la superficie de radio "b" la conectamos a tierra (potencial igual a cero), entonces la superficie de radio "a" estará a un potencial $\Delta\varphi$ (ver la figura).



Para hallar las constantes A y B aplico las Condiciones de Frontera (C.F.) siguientes:

1ra C.F.) Si r = b: $\varphi_{(r\,=\,b)} = 0$

Evaluando la ecuación (2) para r = b, tenemos:

$$0 = -\frac{A}{0{,}06} + B \quad \textbf{. . . (3)}$$

2da C.F.) Si r = a: $\varphi_{(r\,=\,a)} = \Delta\varphi$

Luego: $$\Delta\varphi = -\frac{A}{0,02} + B \quad \textbf{. . . (4)}$$

Resolviendo las ecuaciones (3) y (4) obtenemos: A = $-0,03\Delta\varphi$; B = $-0,5\,\Delta\varphi$

Reemplazando en (2) obtengo: $\varphi_{(r)} = \dfrac{0,03\Delta\varphi}{r} - 0,5\Delta\varphi$

Hallo $\vec{E}$ aplicando gradiente de potencial. Es decir: $\vec{E} = -\nabla\varphi \Rightarrow \vec{E} = \dfrac{0,03\Delta\varphi}{r^2}\hat{a}_r$

Se halló que (ver cálculos en (b)): $\vec{E} = \dfrac{1}{8\pi\, r^2}\hat{a}_r$

Igualando ambas ecuaciones de $\vec{E}$, tenemos:

$$\frac{0,03\Delta\varphi}{r^2}\hat{a}_r = \frac{1}{8\pi\, r^2}\hat{a}_r \Rightarrow \Delta\varphi = 1,326 \text{ V}$$

d) Cálculo de "P" (Potencia disipada por el conductor)

La potencia disipada por un conductor de resistencia R se calcula por:

$$P = I^2 R$$

Se halló que I = 40 A. La resistencia eléctrica R se halla dividiendo $\Delta\varphi$ con I (1,326V/40A). Reemplazando "I" y "R" obtenemos:

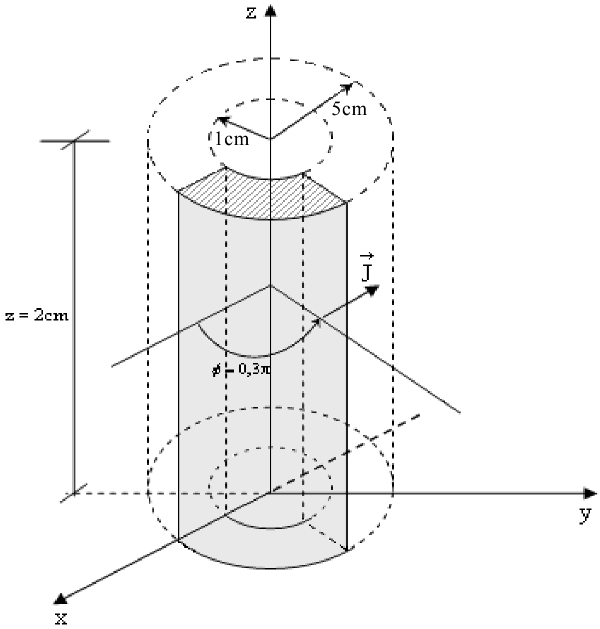
$$P = 53,04 \;\; watts$$

Problema Nº 2

Dentro de la región 1 < ρ < 5cm, 0 < ϕ < 0,3π, 0 < z < 2cm, se tiene una densidad de corriente dada como $\vec{J} = (200\cos\phi)\hat{a}_\phi/(\rho + 0,01)$ A/m^2. a) ¿Cuál es la corriente en la dirección de $\hat{a}_\phi$ que cruza la superficie: a) $\phi = 0,\ \ 1 < \rho < 5\text{cm}$, $0 < z < 2\text{cm}$? b) $\phi = 0,3\pi$, $1 < \rho < 5\text{cm},\ 0 < z < 2\text{cm}$? c) Calcule $\nabla \cdot \vec{J}$ en $\rho = 2\text{cm}$, $\phi = 0,15\pi$ y $z = 1\text{cm}$.

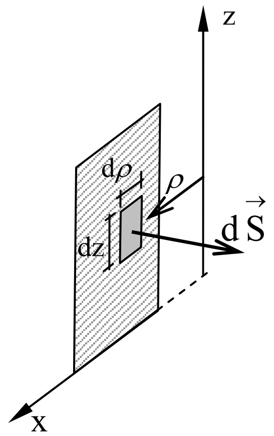
Resolución

Según el enunciado la figura es la mostrada a continuación:



Por condición:

$$\vec{J} = \frac{200\cos\phi}{(\rho + 0,01)}\hat{a}_\phi \ \ \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$$



a) Cálculo de "I" que cruza la superficie: $\phi = 0,\ \ 1 < \rho < 5\text{cm}\ ,0 < z < 2\text{cm}$

Sabemos: $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$; donde: $d\vec{S} = d\rho\, dz\, \hat{a}_\phi$

Luego: $$I = \int_{\rho=0,01}^{0,05} \int_{z=0}^{0,02} \frac{200\,\text{Cos}0^\circ}{(\rho + 0,01)}\hat{a}_\phi \cdot d\rho\, dz\, \hat{a}_\phi$$

$$I = 200\left(\int_{\rho=0,01}^{0,05} \frac{d\rho}{(\rho + 0,01)}\right)\left(\int_{z=0}^{0,02} dz\right) \Longrightarrow \quad I = 4\ \text{Ln}3 = 4,39\ \text{A}$$

b) Cálculo de "I" que cruza la superficie: $\phi = 0,3\pi$, $1 < \rho < 5\text{cm}$, *0< z < 2cm.*

En este caso, la expresión de "I" queda de la siguiente forma:

$$I = \int_{\rho=0,01}^{0,05} \int_{z=0}^{0,02} \frac{200\,\text{Cos}(54^\circ)}{(\rho + 0,01)}\hat{a}_\phi \cdot \rho\, dz\, \hat{a}_\phi = \mathbf{2,58\ A}$$

c) Cálculo de $\nabla \cdot \vec{J}$ ***en*** $\rho = 2\text{cm},\ \phi = 0,15\pi$ y $z = 1\text{cm}$.

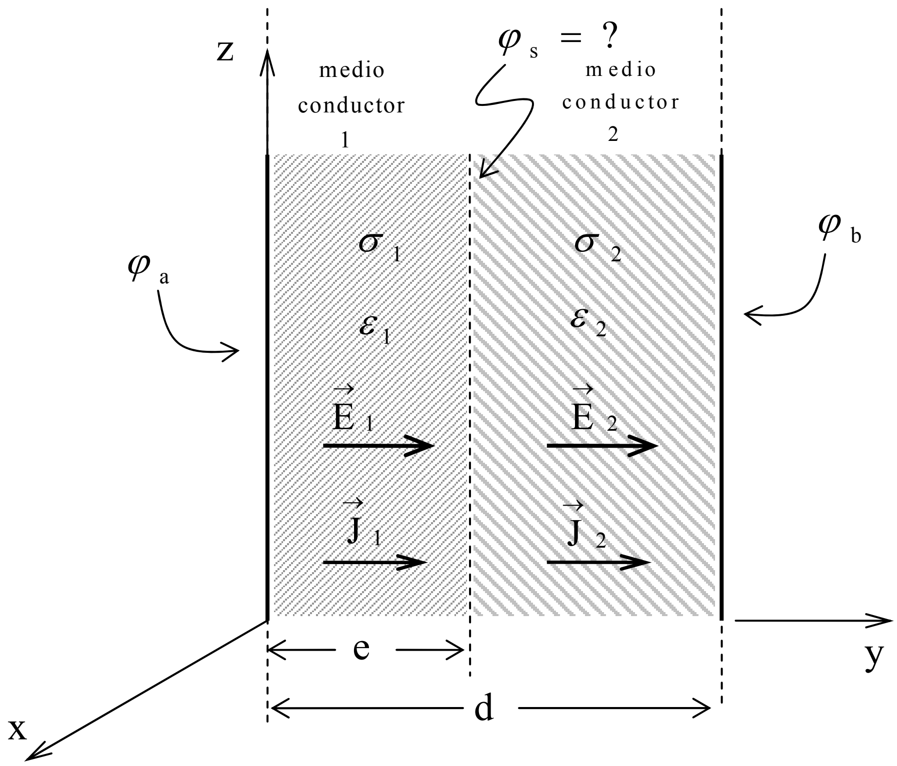
En coordenadas cilíndricas, la divergencia de $\vec{J}$ sólo depende de la coordenada ϕ, luego la divergencia de $\vec{J}$ es igual a:

$$\nabla \cdot \vec{J} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\frac{200\cos\phi}{\rho+0,01}\right] = \frac{-200\mathrm{sen}\phi}{\rho(\rho+0,01)} = -151330,2$$

Problema Nº 3

Dos placas paralelas planas e infinitas de metal, están separadas una distancia **d**. El espacio entre las placas se llena con dos medios conductores, siendo la superficie de separación entre estos medios un plano paralelo entre las placas metálicas. El primer medio (conductividad σ_1, permitividad ε_1) es de espesor **e**, y el segundo medio (conductividad σ_2, permitividad ε_2) es de espesor **d – e**. Las placas metálicas se mantienen a los potenciales φ_a y φ_b, respectivamente. En el estado estacionario, ¿Cuál es el potencial de la superficie de separación de los dos medios y cuál es la densidad superficial de carga libre en esta superficie de separación?

Resolución:
En la figura siguiente se muestra las dos placas planas de metal descritas en el enunciado. Observe que en la región entre las placas hay dos medios conductores a los cuales denominaremos: medio conductor (1) y medio conductor (2).



Como en el medio (1): $\sigma_1 = cte$, y en el medio (2): $\sigma_2 = cte$, entonces para resolver este problema podemos aplicar la ecuación de Laplace.

a) Cálculo de "$\varphi_{(S)}$" (Potencial en la superficie de separación)

En este caso el potencial "φ" sólo depende de la coordenada "y", por lo tanto se trata de un problema unidimensional en coordenadas rectangulares. Para resolver este problema utilizamos la solución a la ecuación de Laplace siguiente:

$$\varphi_{(y)} = \mathrm{A}y + \mathrm{B}$$

Aplicando esta ecuación a cada medio por separado, tenemos:

En el medio (1): $\varphi_{1(y)} = A_{1}y + B_1$ . . . **(1)**

En el medio (2): $\varphi_{2(y)} = A_{2}y + B_2$ . . . **(2)**

Para hallar las constantes A_1, B_1, A_2 y B_2 aplico las Condiciones de Frontera (C.F.) siguientes:

1ra C.F.) Si y = 0: $\varphi_{1(y=0)} = \varphi_a \Rightarrow B_1 = \varphi_a$ ... (I)

2da C.F.) Si y = d: $\varphi_{2(y=d)} = \varphi_b \Rightarrow A_2(d) + B_2 = \varphi_b$ ... (II)

3ra C.F.) Si y = e: $\varphi_{1(y=e)} = \varphi_{2(y=e)}$ (φ es continuo en todos los puntos donde $\vec{E}$ es finito)

Luego: $A_1(e) + B_1 = A_2(e) + B_2$ ... (III)

4ta C.F.) Si y = e: $J_{1n} = J_{2n}$ (la componente normal de $\vec{J}$ es continua)
Como $J = \sigma E$, entonces la igualdad anterior equivale a:

$$\sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$$

Reemplazando los campos eléctricos por gradiente de potencial y simplificando la ecuación, obtenemos:

$$\Rightarrow \sigma_1 A_1 = \sigma_2 A_2 \ \text{... (IV)}$$

Resolviendo las ecuaciones (I), (II), (III) y (IV) obtenemos:

$$B_1 = \varphi_a \quad ; \quad A_1 = \frac{\sigma_2(\varphi_b - \varphi_a)}{\sigma_2 e + \sigma_1(d-e)}$$

$$A_2 = \frac{\sigma_1(\varphi_b - \varphi_a)}{\sigma_2 e + \sigma_1(d-e)} \quad ; \quad B_2 = \frac{e(\sigma_2 - \sigma_1)\varphi_b + d\sigma_1\varphi_a}{\sigma_2 e + \sigma_1(d-e)}$$

Reemplazando las constantes A_1, B_1, A_2 y B2 en las ecuaciones (1) y (2) tenemos:

$$\varphi_{1(y)} = \frac{\sigma_2(\varphi_b - \varphi_a)}{\sigma_2 e + \sigma_1(d-e)}y + \varphi_a \quad \textbf{. . . (3)}$$

$$\varphi_{2(y)} = \frac{\sigma_1(\varphi_b - \varphi_a)}{\sigma_2 e + \sigma_1(d-e)}y + \frac{e(\sigma_2 - \sigma_1)\varphi_b + d\sigma_1\varphi_a}{\sigma_2 e + \sigma_1(d-e)} \quad \textbf{. . . (4)}$$

Hallo el potencial "φ_S" evaluando la ecuación **(3)** o la ecuación **(4)** para y = e.

Al evaluar en la ecuación **(3)** obtengo:

$$\varphi_s = \varphi_1\big|_{y=e} = \frac{\sigma_2\varphi_b e - \sigma_1\varphi_a(d-e)}{\sigma_2 e - \sigma_1(d-e)}$$

b) Cálculo de σ_S (densidad superficial de carga libre)

La densidad superficial de carga libre "σ_S" se determina utilizando la siguiente ecuación:

$$\sigma_S = \sigma_2 - \sigma_1$$

Se cumple que: $\sigma = \varepsilon E$, luego: $\sigma_S = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1$

Aplico gradiente de potencial para hallar E_1 y E_2. Reemplazando estos gradientes en la ecuación anterior obtenemos finalmente que:

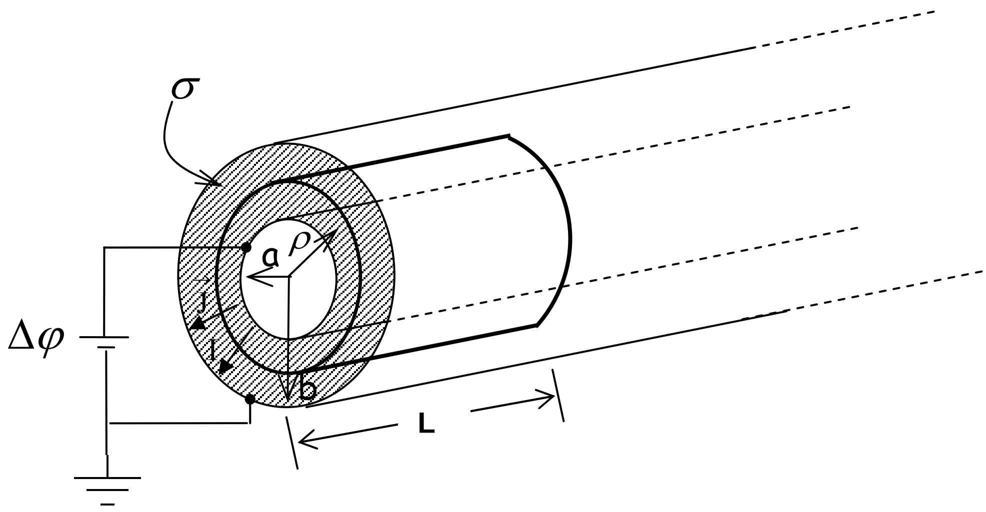
$$\therefore \sigma_s = \frac{(\varepsilon_1\sigma_2 - \varepsilon_2\sigma_1)(\varphi_b - \varphi_a)}{\sigma_2 e - \sigma_1(d-e)}$$

Problema Nº 4

Dos cáscaras cilíndricas largas de metal, de radios **a** y **b** (**b > a)**, se colocan coaxialmente y se mantienen a la diferencia de potencial $\Delta\varphi$. Si la región entre las cáscaras se llena de un medio de conductividad σ, calcule la intensidad de corriente por unidad de longitud y la resistencia eléctrica.
Considere que la conductividad de los cilindros es mucho mayor que σ.

Resolución:

Como la diferencia de potencial entre los conductores cilíndricos es $\Delta\varphi$, vamos a suponer que el conductor de radio **a** se halla a un potencial $\Delta\varphi$, por lo tanto el otro tendrá potencial nulo (o se halla conectado a tierra), tal como se muestra en la figura mostrada a continuación.



Si la conductividad "σ" es constante, entonces se cumple la ecuación de Laplace. Además, en este caso "φ" sólo depende de la coordenada "ρ", por lo tanto la solución a la ecuación de Laplace a utilizar, en coordenadas cilíndricas, es:

$$\varphi_{(\rho)} = \mathrm{ALn}\rho + \mathrm{B} \quad \textbf{. . . (1)}$$

Las constantes A y B se hallan utilizando las condiciones de frontera siguientes:

1ra C.F.) Si $\rho = b$: $\varphi_{(\rho\,=\,b)} = 0$

Luego: $0 = A\,\mathrm{Ln}b + B \;\Rightarrow\; B = -A\,\mathrm{Ln}b$ **. . . (2)**

2da C.F.) Si $\rho = a$: $\varphi_{(\rho\,=\,a)} = \Delta\varphi$

Luego: $\Delta\varphi = A\,\mathrm{Ln}a + B \;\Rightarrow\; \Delta\varphi = A\,\mathrm{Ln}a - A\,\mathrm{Ln}b$

$$\Rightarrow A = \frac{\Delta\varphi}{\mathrm{Ln}(a/b)} \;; \quad \text{o también:} \quad A = \frac{-\Delta\varphi}{\mathrm{Ln}(b/a)}$$

Reemplazando la constante A en la ecuación **(2)** tenemos:

$$B = -A\,\mathrm{Ln}b \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\Delta\varphi\ \mathrm{Lnb}}{\mathrm{Ln}(b/a)}$$

Finalmente reemplazo las constantes A y B en la ecuación **(1)**:

$$\varphi_{(\rho)} = -\frac{\Delta\varphi}{\mathrm{Ln(b/a)}}\mathrm{Ln}\rho + \frac{\Delta\varphi\ \mathrm{Lnb}}{\mathrm{Ln(b/a)}}$$

Para hallar aplico gradiente de potencial. Es decir:

$$\vec{E}_{(\rho)} = -\nabla\varphi_{(\rho)} \;\Rightarrow\; \vec{E}_{(\rho)} = \frac{\Delta\varphi}{\rho\,\mathrm{Ln(b/a)}}\,\hat{a}_{\rho}$$

Cálculo de I/L (corriente por unidad de longitud)

De acuerdo con la ley de Ohm se cumple que:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Reemplazando $\vec{J}$ y $\vec{E}$ tenemos:

$$\frac{I}{2\pi\rho L}\hat{a}_\rho = \sigma \frac{\Delta\varphi}{\rho \mathrm{Ln}(b/a)}\hat{a}_\rho$$

$$\therefore \frac{I}{L} = \frac{2\pi\sigma\Delta\varphi}{\mathrm{Ln}(b/a)}$$

Cálculo de R / L (resistencia por unidad de longitud)

En este caso utilizamos la ley macroscópica de ohm.

Es decir:

$$R = \frac{\Delta\varphi}{I} \Rightarrow \frac{R}{L} = \frac{\mathrm{Ln}(b/a)}{2\pi\sigma}$$