UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

CURSO : TEORÍA DE CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

PROFESOR : Ing. JORGE MONTAÑO PISFIL

PROBLEMAS RESUELTOS DE CAMPO MAGNÉTICO EN LA MATERIA

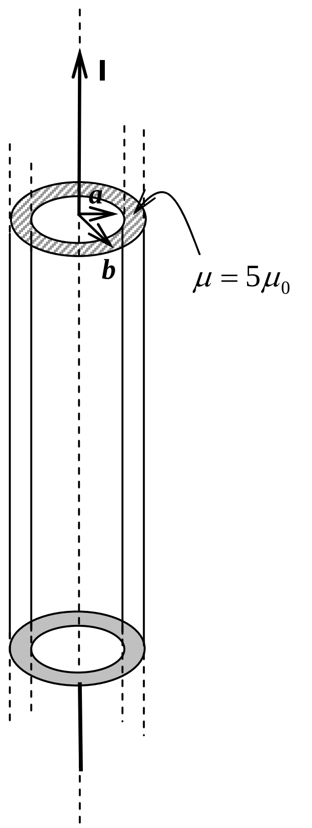
Problema Nº1

Un hilo largo por el que circula una corriente I = 10 A está rodeado por un tubo cilíndrico de radio interior a = 5 cm y radio exterior b = 8 cm. El tubo es concéntrico con el hilo y podemos suponerlo también muy largo. El tubo tiene una permeabilidad magnética $\mu = 5\mu_0$. Calcular:

a) La intensidad de campo magnético $\vec{H}$ en todo el espacio
b) La densidad de flujo magnético $\vec{B}$ en todo el espacio.
c) La magnetización $\vec{M}$ en todo el espacio.
d) La densidad superficial de corriente de magnetización $\vec{J}_{SM}$ para $\rho = a$ y $\rho = b$.
e) La densidad volúmica de corriente de magnetización $\vec{J}_M$.

Resolución

De acuerdo con el enunciado, la figura correspondiente es la que se muestra en la figura.



Para resolver este problema debemos tener en cuenta que:

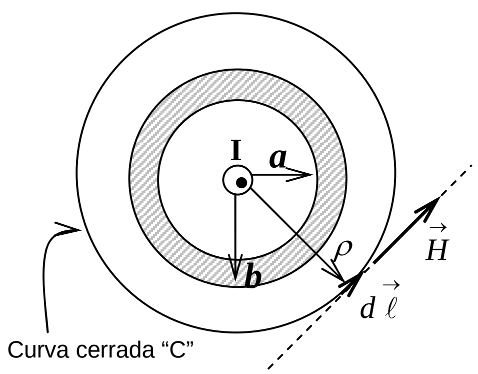
- La corriente eléctrica "I" crea a su alrededor un campo magnético.

- El campo magnético creado por la corriente "I" magnetiza al material con el cual está hecho el tubo cilíndrico, originándose en su interior corrientes de magnetización.

- Las corrientes de magnetización alteran finalmente el campo magnético inicial, por lo tanto en la región donde se halla el material magnético, el campo magnético $\vec{B}$ tendrá un valor diferente.

a) Cálculo de $\vec{H}$ en todo el espacio

Vista de planta



Por ley de Ampere:

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{\ell} = I_{Libre}$$

$$H(2\pi\rho) = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi\rho} = \frac{5}{\pi\rho}\frac{A}{m}$$

Vectorialmente: $\vec{H} = \frac{5}{\pi\rho}\hat{a}_\phi \left(\frac{A}{m}\right)$

b) Cálculo de $\vec{B}$ en todo el espacio

- Para $0 < \rho < a$ y $\rho > b$ (En ambos casos el medio es el vacío)

En el vacío se cumple: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Luego: $\vec{B} = \frac{5\mu_0}{\pi\rho}\hat{a}_\phi \ (T)$

- Para $a < \rho < b$ (en este caso el medio es un material magnético, donde: $\mu = 5\mu_0$)

En un medio magnético se cumple: $\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$

Luego: $\vec{B} = \frac{25\mu_0}{\pi\rho}\hat{a}_\phi \ (T)$

c) Cálculo de $\vec{M}$ en todo el espacio

Se sabe que: $\vec{M} = \chi_m \vec{H} = (\mu_r - 1)\vec{H}$

- Para $0 < \rho < a$ y $\rho > b$: $\vec{M} = 0$ (Porque no hay material magnético)

- Para $a < \rho < b$: $\vec{M} = 4\vec{H} = \left(\frac{20}{\pi\rho}\hat{a}_\phi\right)\frac{A}{m}$

d) Cálculo de $\vec{J}_{SM}$ para $\rho = a$ y $\rho = b$

Sabemos que: $\vec{J}_{SM} = \vec{M} \times \hat{n}$

- Para $\rho = a = 5cm = 0{,}05m$: $\hat{n} = -\hat{a}_\rho$

$$\vec{J}_{SM} = \left(\frac{20}{\pi a}\hat{a}\phi\right) \times (-\hat{a}_\rho) \quad \Longrightarrow \quad \vec{J}_{SM} = (127{,}3236\,\hat{a}_z)\frac{A}{m}$$

- Para $\rho = b = 8cm = 0{,}08m$: $\hat{n} = +\hat{a}_\rho$

$$\vec{J}_{SM} = \left(\frac{20}{\pi b}\hat{a}\phi\right) \times (+\hat{a}_\rho) \quad \Longrightarrow \quad \vec{J}_{SM} = (-79{,}577\,\hat{a}_z)\frac{A}{m}$$

e) Cálculo de $\vec{J}_M$ (densidad volúmica de corriente de magnetización)

Se sabe que: $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$

En coordenadas cilíndricas, cuando $\vec{M}$ sólo tiene componente M_ϕ, el rotacional de $\vec{M}$ queda:

$$\nabla \times \vec{M} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho M_\phi)\right]\hat{a}_z$$

Luego:

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{20}{\pi}\right)\hat{a}_z = 0$$

Problema Nº2

La región $0 \le z \le 2m$ está ocupada por una placa infinita de material permeable ($\mu_r = 2{,}5$). Si $\vec{B} = 10y\,\hat{a}_x - 5x\,\hat{a}_y$ *mWb/m²* dentro de la placa, determine:

a) La densidad de corriente $\vec{J}$

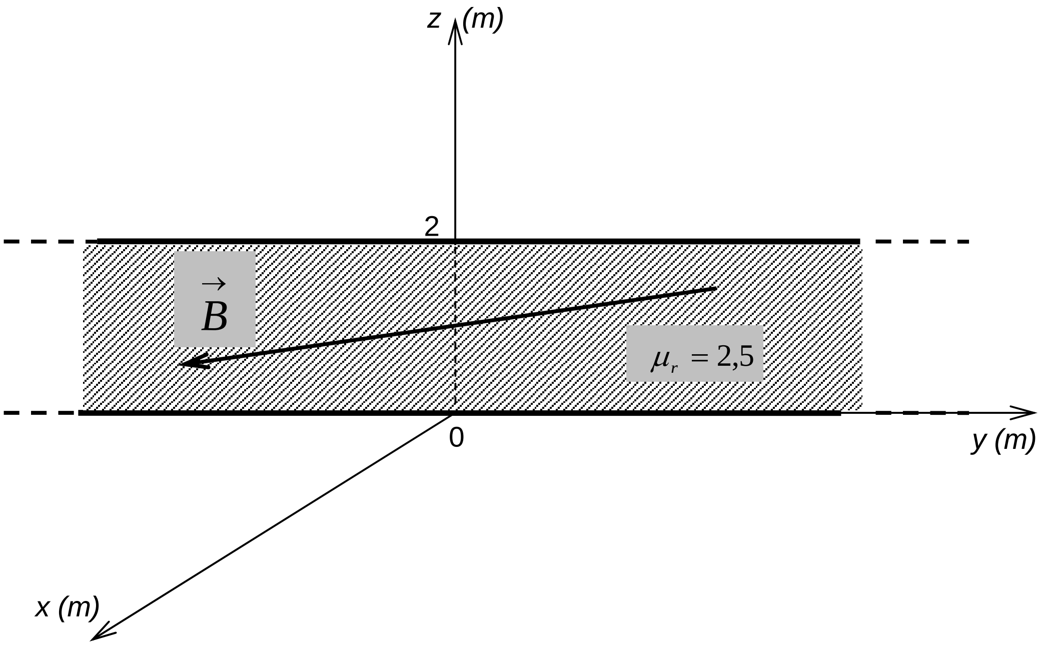
b) La magnetización $\vec{M}$

c) La densidad superficial de corriente de magnetización $\vec{J}_{SM}$ en z = 0.

d) La densidad volúmica de corriente de magnetización $\vec{J}_M$.

Resolución:

Según lo descrito en el enunciado, la figura correspondiente es la que se muestra a continuación. Donde $\vec{B}$ representan al campo magnético dentro de la placa infinita de material permeable que está ubicada en la región $0 \le z \le 2\,m$.



a) Cálculo de $\vec{J}$ (densidad de corriente)

La densidad de corriente $\vec{J}$ se puede determinar a partir de la Ley de Ampere en su forma diferencial. Es decir:

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{H} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Donde: $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r}$; por condición: $\vec{B} = (10y\,\hat{a}_x - 5x\,\hat{a}_y)\, mWb/m^2$

Reemplazo $\vec{H}$ en (1):

$$\vec{J} = \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} \right) = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \nabla \times \vec{B}$$

El rotacional de $\vec{B}$, en coordenadas rectangulares, cuando $\vec{B}$ tiene componentes B_x y B_y, se reduce a:

$$\nabla \times \vec{B} = \left[\frac{\partial}{\partial x} B_y - \frac{\partial}{\partial y} B_x \right] \hat{a}_z$$

Luego, $\vec{J}$ viene dado por:

$$\vec{J} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2{,}5}\left[\frac{\partial}{\partial x}(-5x) - \frac{\partial}{\partial y}(10y)\right]\hat{a}_z$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{J} = (-4{,}775\,\hat{a}_z)\,kA/m^2$$

b) *Cálculo de $\vec{M}$ (magnetización)*

Si se conoce $\vec{H}$, la magnetización $\vec{M}$ se calcula con la siguiente ecuación:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} = (\mu_r - 1)\frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r}$$

Reemplazando $\mu_r = 2{,}5$ y el vector $\vec{B}$ (dato del problema), obtengo:

$$\vec{M} = (4{,}775y\,\hat{a}_x - 2{,}387x\,\hat{a}_y)\frac{kA}{m}$$

c) *Cálculo de $\vec{J}_{SM}$ (densidad superficial de corriente de magnetización) en $z = 0$*

Se sabe que: $\vec{J}_{SM} = \vec{M} \times \hat{n}$

Como $z = 0$ en el lado inferior de la placa que ocupa la región $0 \le z \le 2\,m$, entonces:

$$\hat{n} = -\hat{a}_z$$

Luego:

$$\vec{J}_{SM} = (4{,}775y\,\hat{a}_x - 2{,}387x\,\hat{a}_y)\frac{kA}{m} \times (-\hat{a}_z)$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{J}_{SM} = (2{,}387x\,\hat{a}_x + 4{,}775y\,\hat{a}_y)\frac{kA}{m}$$

d) *Cálculo de $\vec{J}_M$ (densidad volúmica de corriente de magnetización)*

Se sabe que: $\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$

Calculando el rotacional de $\vec{M}$ en coordenadas rectangulares se obtiene:

$$\vec{J}_M = -7{,}162\,\hat{a}_z\,\frac{kA}{m^2}$$