UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA
ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

CURSO : TEORÍA DE CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

PROFESOR : Ing. JORGE MONTAÑO PISFIL

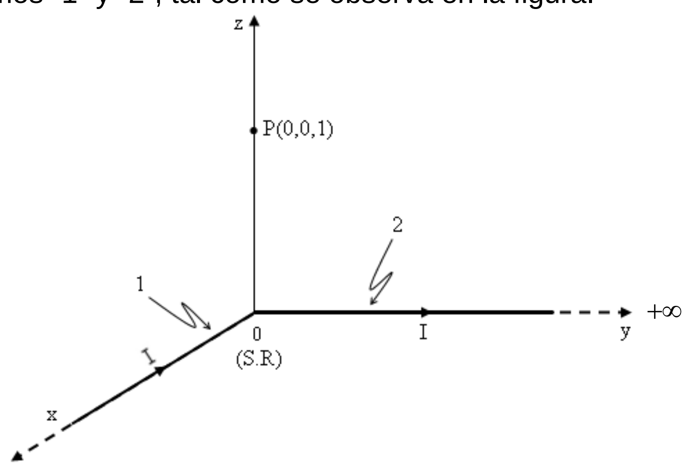
PROBLEMAS RESUELTOS DE MAGNETOSTÁTICA EN EL VACÍO

Problema Nº 1

Una corriente filamentaria de 10 A se dirige del infinito hasta el origen, sobre el eje x positivo, y luego regresa al infinito a lo largo del eje y positivo. Utilice la ley de Biot- Savart para encontrar $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en el punto P(0,0,1).

Resolución

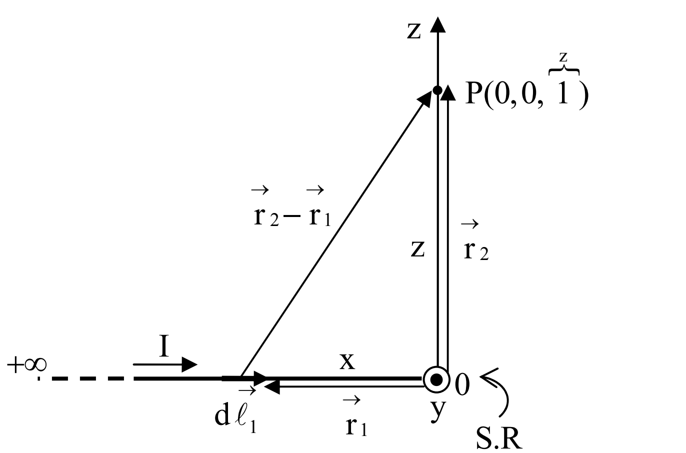
Para resolver este problema vamos a dividir el alambre rectilíneo infinito en dos partes a las cuales denominaremos “1” y “2”, tal como se observa en la figura.



a) Cálculo de $\vec{B}_P$

Por principio de Superposición: $\vec{B}_P = \vec{B}_P(1) + \vec{B}_P(2)$ ... (1)

Aplico Ley de Biot y Savart para el segmento (1):



De la figura:

$$\vec{r}_2 = z\,\hat{a}_z$$

$$\vec{r}_1 = x\,\hat{a}_x$$

$$\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = \sqrt{x^2 + z^2}$$

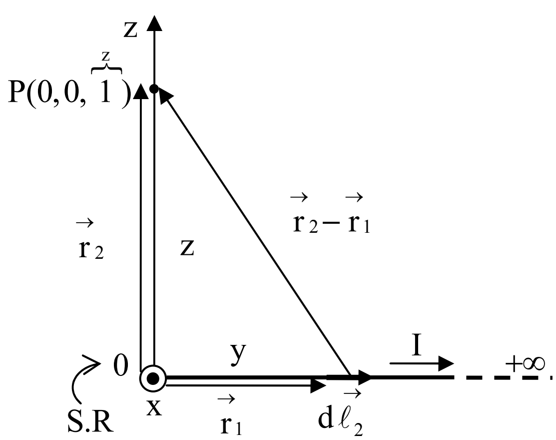
$$d\vec{\ell}_1 = -dx\,\hat{a}_x$$

$$\vec{B}_{P(1)} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3} \quad \text{... (2)}$$

Reemplazando: $\vec{B}_{P(1)} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{+\infty}^{0} \frac{-dx\hat{a}_x \times (z\hat{a}_z - x\hat{a}_x)}{(x^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{+\infty}^{0} \frac{zdx}{(x^2+z^2)^{3/2}}\ \hat{a}_y$

$$\vec{B}_{P(1)} = \frac{\mu_o I}{4\pi z}\ \hat{a}_y = \frac{4\pi * 10^{-7}(10)}{4\pi\,(1)}\ \hat{a}_y = (10^{-6}\,T)\ \hat{a}_y$$

<u>Aplico Ley de Biot y Savart para el segmento (2):</u>



De la figura:

$\vec{r}_2 = z\ \hat{a}_z$

$\vec{r}_1 = y\ \hat{a}_y$

$\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = \sqrt{y^2 + z^2}$

$d\vec{\ell}_1 = dy\ \hat{a}_y$

$$\vec{B}_{P(2)} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell}_2 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3} \quad \text{... (3)}$$

Reemplazando: $\vec{B}_{P(2)} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{dy\hat{a}_y \times (z\hat{a}_z - y\hat{a}_y)}{(y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_o I}{4\pi} \int_{0}^{+\infty} \frac{zdy}{(y^2+z^2)^{3/2}}\ \hat{a}_x$

$$\vec{B}_{P(2)} = \frac{\mu_o I}{4\pi z}\ \hat{a}_x = \frac{4\pi * 10^{-7}(10)}{4\pi\,(1)}\ \hat{a}_x = (10^{-6}\,T)\ \hat{a}_x$$

Finalmente, reemplazo $\vec{B}_{P(1)}$ y $\vec{B}_{P(2)}$ en la ecuación (1) y obtengo:

$$\vec{B}_P = (10^{-6}T)(\hat{a}_x + \hat{a}_y)$$

b) Cálculo de $\vec{H}_P$ ***:***

$\vec{H}_P = \vec{H}_{P(1)} + \vec{H}_{P(2)}$; siendo : $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

Reemplazando obtenemos:

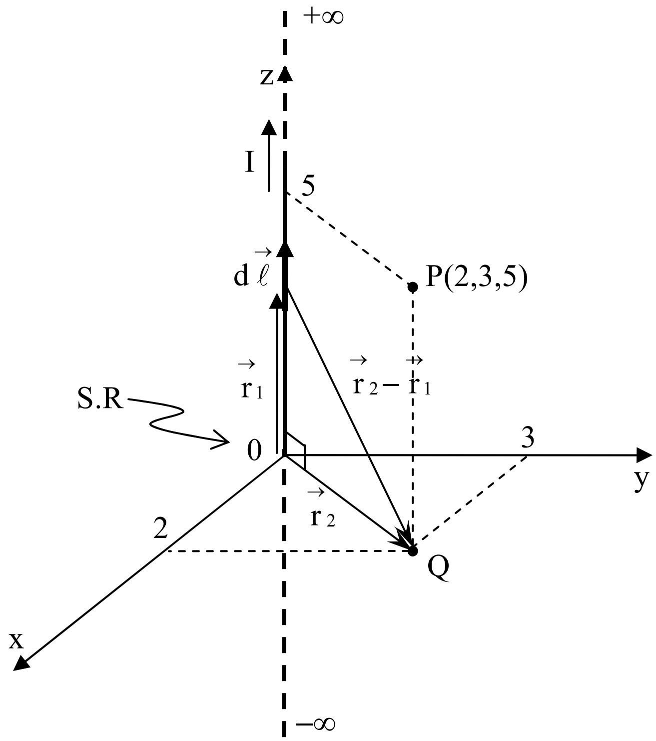
$$\vec{H}_P = 0,796\ (\hat{a}_x + \hat{a}_y)\frac{A}{m}$$

Problema Nº 2

Encuentre $\vec{H}$ en P (2; 3; 5) en coordenadas cartesianas, si existe un filamento portador de corriente de longitud infinita, que pasa a través del origen y el punto C . Una corriente de 50 A se dirige desde el origen hasta C, donde la localización de C es (0; 0; 1).

Resolución:

1er Caso: Cálculo de $\vec{H}$ en el punto P (2; 3; 5) debido a I = 50 A que se dirige desde el origen hasta C (0; 0; 1).



Por simetría de la figura se cumple que: $\vec{H}_P = \vec{H}_Q$

Es decir, en los puntos P y Q el vector intensidad de campo magnético tiene la misma magnitud y la misma dirección. Por lo tanto, el valor calculado de $\vec{H}$ en el punto Q es el mismo valor que corresponde a $\vec{H}$ en el punto P.

Por Ley de Biot y Savart: $$\vec{H}_Q = \frac{I}{4\pi}\int \frac{d\vec{\ell}\times(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|^3} \quad ...\ (1)$$

De la figura: $d\vec{\ell} = dz\ \hat{a}_z$; $\vec{r}_2 = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y = 2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y$

$$\vec{r}_1 = z\,\hat{a}_z \;\; ; \;\; \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{13 + z^2}$$

En (1):

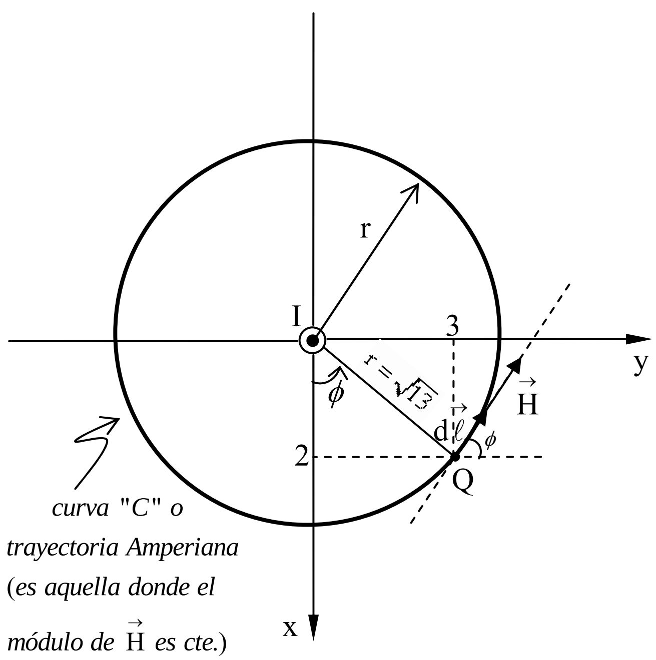
$$\vec{H}_Q = \frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz\,\hat{a}_z \times (2\hat{a}_x + 3\hat{a}_y - z\hat{a}_z)}{(13+z^2)^{3/2}} = \frac{I}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(13+z^2)^{3/2}}\,\hat{a}_y - \frac{3I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{(13+z^2)^{3/2}}\,\hat{a}_x$$

$$\vec{H}_Q = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{2}{13}\right)\hat{a}_y - \frac{3I}{4\pi}\left(\frac{2}{13}\right)\hat{a}_x = \frac{50}{13\pi}\hat{a}_y - \frac{75}{13\pi}\hat{a}_x$$

$$\therefore\; \vec{H}_Q = (1{,}224\,\hat{a}_y - 1{,}84\,\hat{a}_x)\ \text{A/m}$$

<u>Otro método</u>**:** Por ley de Ampere

<u>Vista de planta</u>



Por Ley de Ampere:

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = I_{enc}$$

$$H\,(2\pi r) = I \;\Longrightarrow\; H = \frac{I}{2\pi\, r}$$

Vectorialmente: $\vec{H} = \dfrac{I}{2\pi\, r}\hat{a}_\phi$

De la figura: $\hat{a}_\phi = -\mathrm{Sen}\phi\ \hat{a}_x + \mathrm{Cos}\phi\ \hat{a}_y$

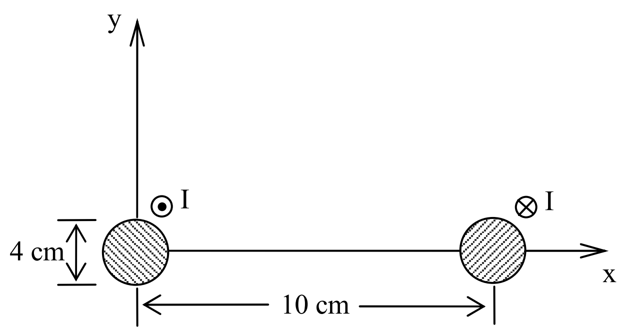
Luego:

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\, r}\left(-\mathrm{Sen}\phi\ \hat{a}_x + \mathrm{Cos}\phi\ \hat{a}_y\right) \ \rightarrow\ \vec{H} = (1{,}224\ \hat{a}_y - 1{,}84\ \hat{a}_x)\ \mathrm{A/m}$$

Problema Nº 3

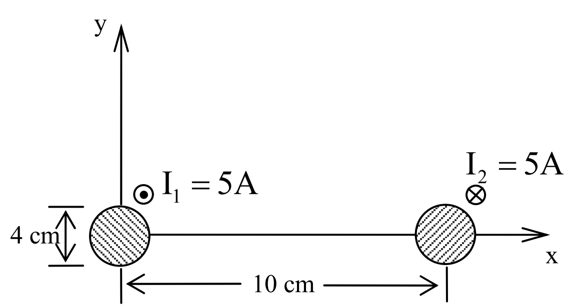
Considere la línea de transmisión de dos hilos cuya sección transversal se ilustra en la figura. Cada uno de los alambres tiene 2 cm de radio y están separados por 10 cm**.** Por el alambre con centro en (0,0) fluye una corriente de 5 A**,** Mientras que por el otro, centrado en (10cm, 0) fluye la corriente de retorno. Calcule $\vec{B}\ y\ \vec{H}$ en:

a) (5 cm, 0) ; b) (10 cm, 5 cm)



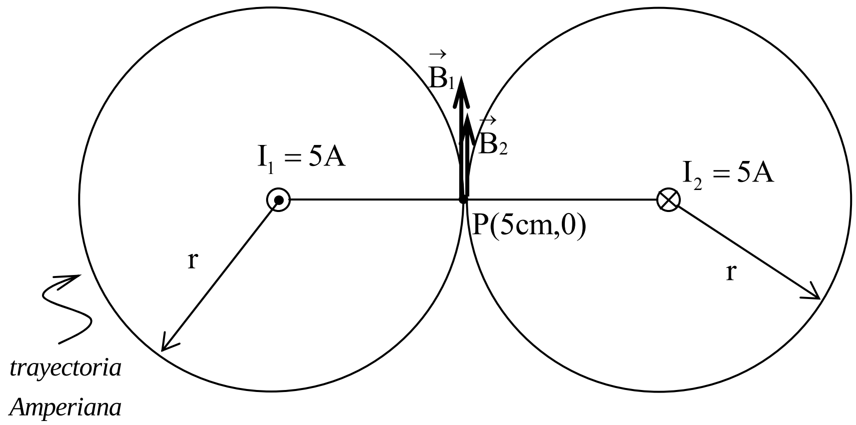
Resolución

Llamaremos I_1 a la corriente de ida e I_2 a la corriente de retorno, como se muestra en la figura siguiente.



a) Cálculo de $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en el punto (5cm; 0):

En el punto P (5 cm; 0) se crean dos Campos magnéticos, porque hay dos corrientes eléctricas. A continuación se muestran los vectores $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$, debido a las corrientes I_1 e I_2.



Por el principio de Superposición aplicado a los campos magnéticos se cumple:

$$\vec{B}_p = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad \text{... (1)}$$

Hallo $\vec{B}_1$ aplicando ley de Ampere

$$\int_C \vec{B} . d\vec{\ell} = \mu_o \, I \quad ; \quad I = I_{encerrada}$$

$B_1 (2\pi r) = \mu_0 \, I_1 \Rightarrow B_1 = \dfrac{\mu_0 \, I_1}{2\pi \, r}$; Vectorialmente: $\vec{B}_1 = \dfrac{\mu_0 \, I_1}{2\pi \, r} \, \hat{a}_y$

Análogamente tenemos que $\vec{B}_2$ quedará expresado por: $\vec{B}_2 = \dfrac{\mu_0 \, I_2}{2\pi \, r} \, \hat{a}_y$

Reemplazo en (1):

$$\vec{B}_p = 2\vec{B}_1 \; ;\text{porque } \vec{B}_2 = \vec{B}_1 \; (\text{dado que } I_2 = I_1)$$

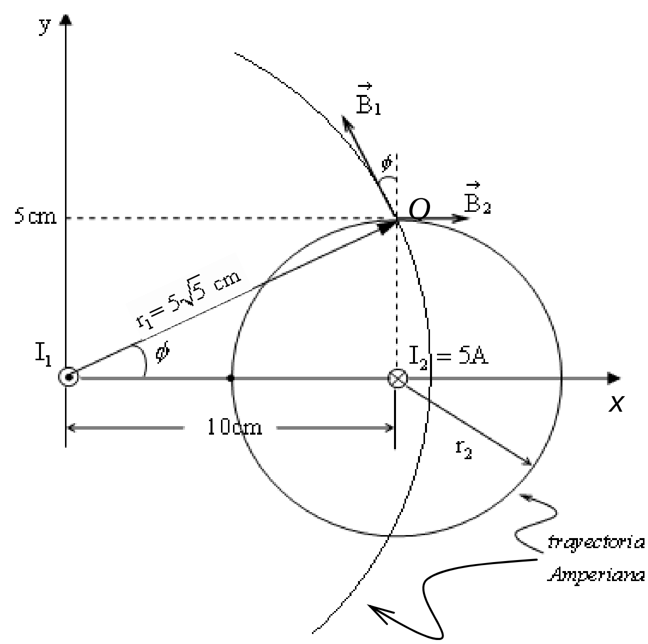
$$\Rightarrow \vec{B}_P = \frac{\mu_0 I_1}{\pi r} \hat{a}_y = (4 \cdot 10^{-5} \, \hat{a}_y) T$$

Para hallar $\vec{H}$ aplico: $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0}$ (en el vacío)

$$\Rightarrow \quad \vec{H}_P = \frac{\vec{B}_P}{\mu_0} = \frac{I_1}{\pi r}\hat{a}_y = (31{,}83\,\hat{a}_y)\ \frac{A}{m}$$

b) Cálculo de $\vec{B}$ y $\vec{H}$ en el punto Q (10cm; 5cm)

En el punto Q, los vectores $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ tienen las direcciones mostradas en la figura siguiente.



Por el principio de Superposición: $\vec{B}_Q = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ ... (2)

Donde:

* $\vec{B}_2 = B_2\hat{a}_x$; $B_2 = \dfrac{\mu_o I_2}{2\pi r_2}$ $\left(\text{módulo de } \vec{B} \text{ para un alambre } \infty\right)$

$$\Rightarrow \quad \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}\hat{a}_X = (2\cdot 10^{-5}\,\hat{a}_X)T$$

$$* \quad \vec{B}_1 = B_1 \hat{a}_\phi \begin{cases} B_1 = \dfrac{\mu_o \, I_1}{2\pi \, r_1} \\ \hat{a}_\phi = -\text{Sen}\phi \; \hat{a}_x + \text{Cos}\phi \; \hat{a}_y \end{cases} \Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_o \, I_1}{2\pi \, r_1}(-\text{Sen}\phi \; \hat{a}_x + \text{Cos}\phi \; \hat{a}_y)$$

$$\therefore \quad \vec{B}_1 = (-0{,}4 \cdot 10^{-5} \hat{a}_x + 0{,}8 \cdot 10^{-5} \hat{a}_y) T$$

Finalmente, reemplazando en (2):

$$\Longrightarrow \quad \vec{B}_Q = (1{,}6 \cdot 10^{-5} \hat{a}_x + 0{,}8 \cdot 10^{-5} \vec{a}_y) T$$

Para hallar $\vec{H}$ aplico: $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_0}$ (en el vacío)

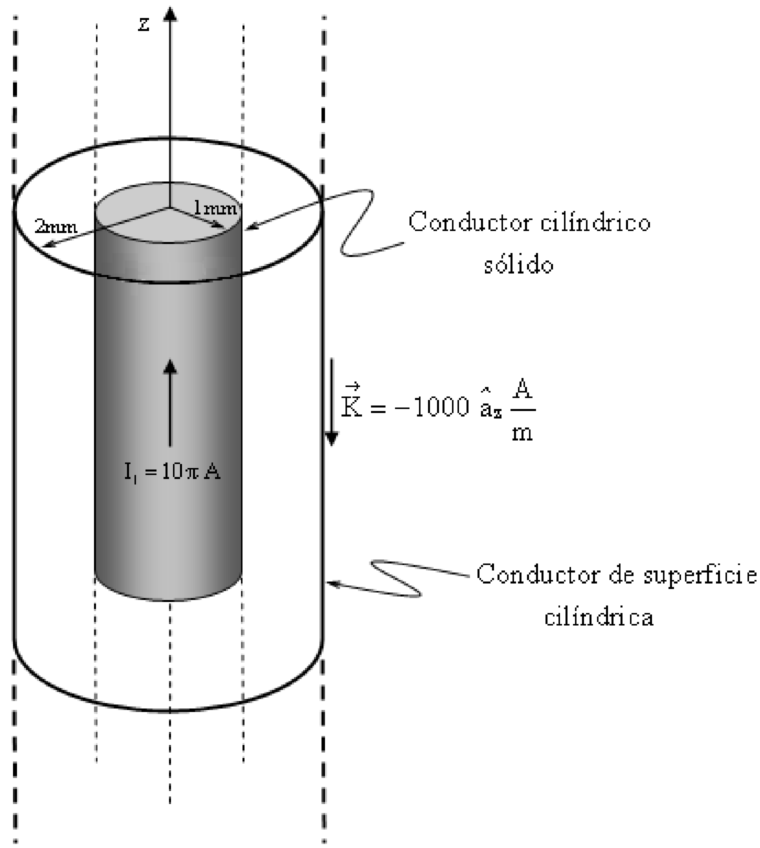
$$\Longrightarrow \quad \vec{H}_Q = \frac{\vec{B}_Q}{\mu_0} = (12{,}74 \; \hat{a}_x + 6{,}366 \, \hat{a}_y) \; \frac{A}{m}$$

Problema Nº 4

Un conductor sólido tiene una sección transversal circular de radio $1 \, mm$**,** centrado en el eje *z*, y porta una corriente total distribuida uniformemente de 10π A en la dirección $\hat{a}_z$. Hay una corriente laminar $\vec{K} = -1000 \; \hat{a}_z \; \text{A/m}$ en $\rho = 2\text{mm}$. Encontrar $\vec{H}$ en la región: a) $0 \le \rho \le 1\text{mm}$; b) $1 \le \rho \le 2\text{mm}$; c) $2 \le \rho \le 4\text{mm}$ d) ¿Qué valor de la corriente laminar debe estar colocada en $\rho = 4\text{mm}$; tal que $\vec{H} = 0$ para $\rho > 4\text{mm}$?

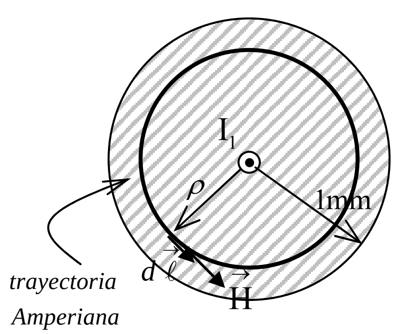
Resolución:

De acuerdo con lo señalado en el enunciado, la figura correspondiente es:



a) Cálculo de $\vec{H}$ en la región $0 \le \rho \le 1mm$

Sección transversal del conductor sólido



Por ley de Ampere:

$$\oint \vec{H}.d\vec{\ell} = I\,; \quad I = I_{encerrada}$$

$$H(2\pi\rho) = I_{encerrada} \quad ... \ (1)$$

Hallo $I_{encerrada}$:

Si la corriente está uniformemente distribuida, se cumple que:

$$J = cte \ \Rightarrow \frac{I_1}{\pi(1\cdot10^{-3})^2} = \frac{I_{enc.}}{\pi\rho^2} \qquad I_{enc} = 10^7\pi\,\rho^2$$

Reemplazando en (1):

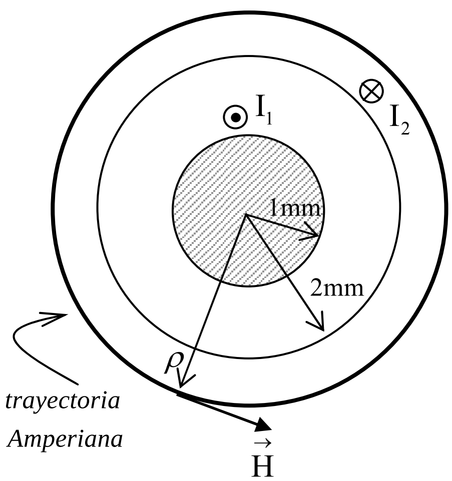
$$H(2\pi\rho) = 10^7\,\pi\rho^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = (5\cdot10^6\,\rho\,\hat{a}_\phi)\frac{A}{m}$$

b) Cálculo de $\vec{H}$ en la región $1mm < \rho < 2\ mm$

En este caso: $H = \dfrac{I_1}{2\pi\rho} \Rightarrow \vec{H} = \left(\dfrac{5}{\rho}\hat{a}_\phi\right)\dfrac{A}{m}$

c) Cálculo de $\vec{H}$ en la región $2mm < \rho < 4\ mm$

Sección transversal



Por ley de Ampère : $\oint \vec{H}.d\vec{\ell} = I_{enc}$

$$H(2\pi\rho) = I_1 + I_2 \ \ .... \ (2)$$

Donde:

$I_1 = 10\ \pi$ A

$$I_2 = I_{\substack{LAMINAR\\TOTAL}} = \left(-1000\ \hat{a}_z \dfrac{A}{m}\right)\left(2\pi(2\cdot 10^{-3})m\right) = -\ 4\pi\ A$$

En (2):

$$H(2\pi\rho) = 10\pi\ A + (-4\pi\ A) = 6\pi\ A = I'_{enc}$$

$$\Rightarrow H = \frac{3}{\rho} \quad , \quad \therefore \vec{H} = \left(\frac{3}{\rho}\hat{a}_\phi\right)\frac{A}{m}$$

d) Piden $\vec{K}_1$ tal que el $\vec{H}_{(\rho\ =\ 4mm)} = 0$

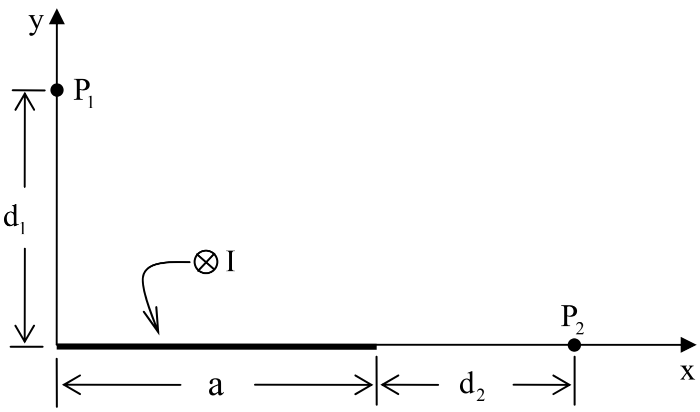
$\Rightarrow \vec{H}_{(\rho\ =\ 4mm)} = 0 \ \text{ si } \ I_{enc} = 0$

Del ejercicio anterior se obtuvo: $I'_{enc} = 6\pi \ \rightarrow \ 6\pi + I_{enc\ 1} = 0 \ \Rightarrow I_{enc\ 1} = -\ 6\pi\ A$

Luego : $\vec{K}_1 = \dfrac{-\ 6\pi\ A}{2\pi(4\cdot 10^{-3}m)}\hat{a}_z = \ -750\ \hat{a}_z \dfrac{A}{m}$

Problema Nº 5

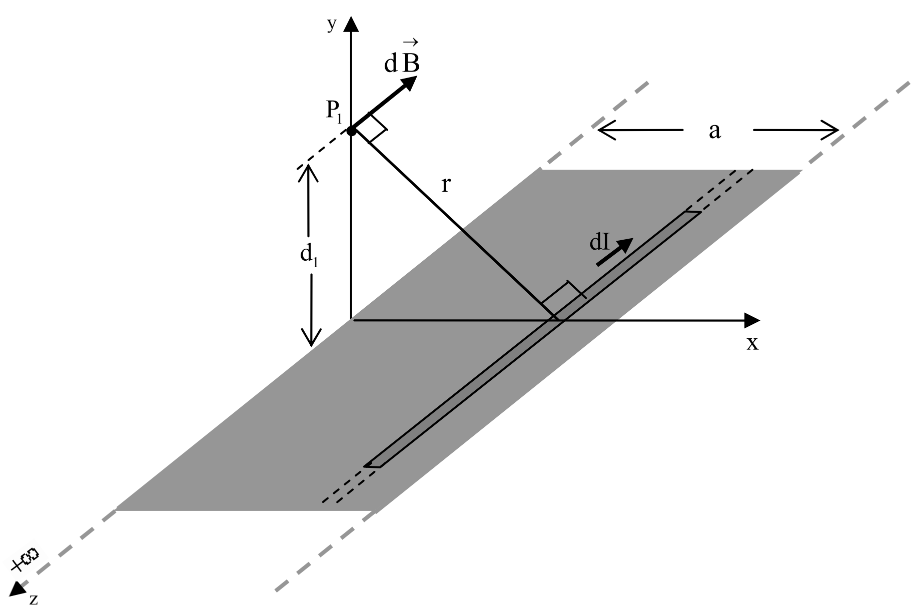
Una corriente I fluye longitudinalmente por una lámina conductora delgada y muy larga de anchura **a**, como se muestra en la figura. Suponga que la corriente fluye hacia el interior del papel y determine la densidad de flujo magnético $\vec{B}$ en los puntos P_1 (0; d_1) y P_2 (a + d_2; 0).



Resolución:

a) Cálculo de $\vec{B}$ en el punto P_1 (0; d_1) :

Para calcular $\vec{B}$ en el punto P_1, debido a la corriente I que fluye por la lámina conductora delgada y muy larga, analizo a partir de un elemento diferencial de la forma de un hilo infinito, tal como se indica en la figura mostrada a continuación.



Se sabe : $B_{\left(\substack{\text{Hilo} \\ \infty}\right)} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\ r}$, donde: r es la distancia perpendicular al hilo infinito.

En nuestro caso:

$$dB_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 dI}{2\pi\ r} \quad \Longrightarrow \quad d\vec{B}_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 dI}{2\pi\ r}\hat{u} \quad \text{... (1)}$$

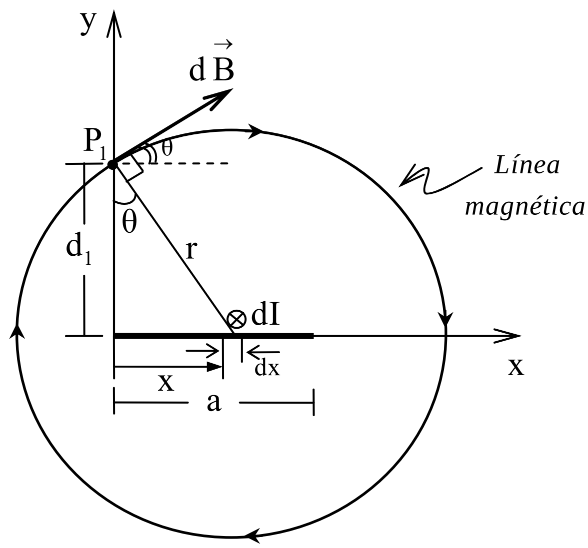
donde:

$$dI = \frac{I}{a}dx$$

$$r = \sqrt{d_1^{\,2} + x^2}$$

de la figura :

$$\hat{u} = \text{Cos}\theta\ \hat{a}_x + \text{Sen}\theta\ \hat{a}_y$$



Reemplazando en (1):

$$d\vec{B}_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 I\ dx}{2\pi\ a\sqrt{d_1^{\,2} + x^2}}(\text{Cos}\theta\ \hat{a}_x + \text{Sen}\theta\ \hat{a}_y)$$

Integrando tenemos: $\vec{B}_{(\text{Lámina})} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\ a}\displaystyle\int \frac{(\text{Cos}\theta\ \hat{a}_x + \text{Sen}\theta\ \hat{a}_y)dx}{\sqrt{d_1^{\,2} + x^2}}$

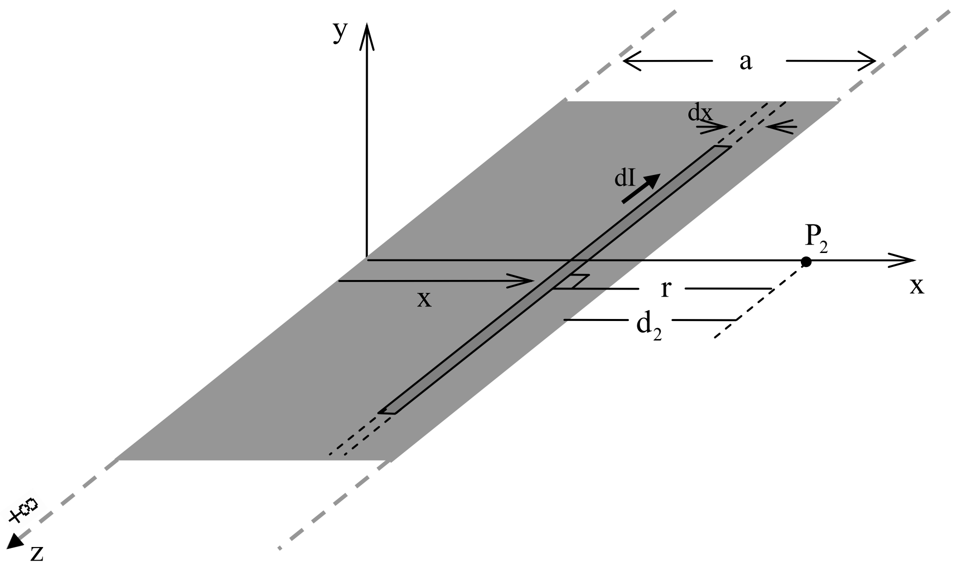
$$\vec{B}_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\ a}\left[\int_0^a \frac{d_1 dx}{d_1^{\,2} + x^2}\hat{a}_x + \int_0^a \frac{x dx}{d_1^{\,2} + x^2}\hat{a}_y\right]$$

Resolviendo, obtenemos:

$$\vec{B}_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\ a}\left[\text{Arctg}\left(\frac{a}{d_1}\right)\hat{a}_x + \text{Ln}\left(\frac{\sqrt{d_1^{\,2} + x^2}}{d_1}\right)\hat{a}_y\right]$$

b) Cálculo de $\vec{B}$ en el punto P_2 (a + d_2; 0)

En este caso procedemos de manera similar que en a).



Ya sabemos que la magnitud de $\vec{B}$, debido a una corriente I, que circula por un hilo infinito, a una distancia r de dicho hilo, viene dada por:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\ r}$$

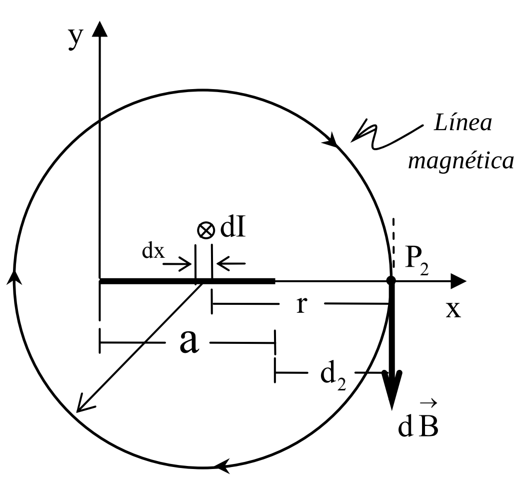
En nuestro caso, este campo "B" será un diferencial de campo para la lámina, es decir:

$$dB_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 dI}{2\pi\ r},$$ donde: r = (a + d_2 – x). Además se cumple:

$$\frac{I}{a} = \frac{dI}{dx} \Rightarrow dI = \frac{I}{a}dx, \qquad \text{Luego:} \quad dB_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 I\, dx}{2\pi\, a(a + d_2 - x)}$$

Vectorialmente sería:

$$d\vec{B}_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 I\, dx}{2\pi\, a(a + d_2 - x)}\hat{u} \quad \text{... (2)}$$



Del gráfico: $\hat{u} = -\hat{a}_y$

Reemplazando en (2) e integrando:

$$\vec{B}_{(\text{Lámina})} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\int_0^a \frac{dx}{(a + d_2 - x)}\,(-\hat{a}_y)\,,$$

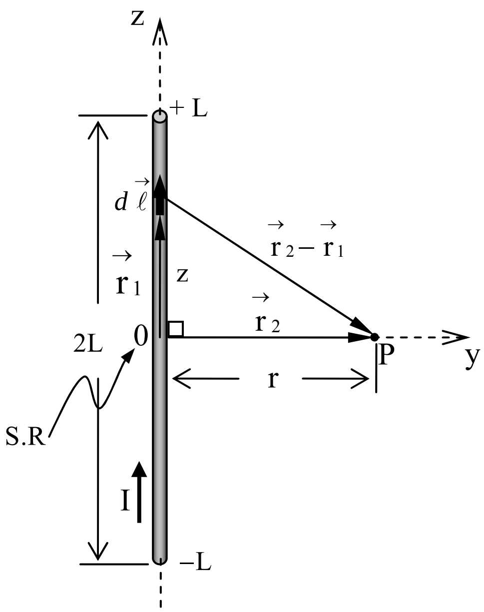
Resolviendo la integral obtenemos: $$\vec{B}_{(\text{Lámina})} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\,\text{Ln}\left(\frac{a + d_2}{d_2}\right)\hat{a}_y$$

Problema Nº 6

Una corriente continua I fluye por un alambre recto de longitud *2L*. Calcule la inducción magnética $\vec{B}$ en un punto localizado a una distancia "*r*" del alambre y en el plano que lo divide en dos segmentos iguales. Determine primero el vector potencial magnético "$\vec{A}$".

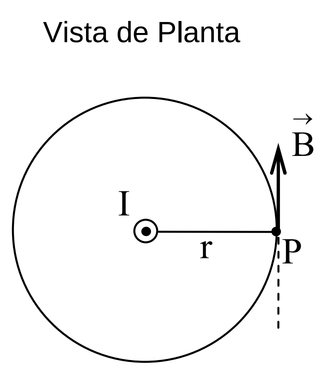
Resolución:

Por tratarse de un alambre recto de longitud *2L*, la figura es:



Aplicando la regla de la mano derecha el vector $\vec{B}$ está entrando al punto P.

Vista de Planta



Para un Hilo con corriente I, se cumple que:

$$\vec{A}_{(\vec{r})} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int \frac{d\vec{\ell}}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|}$$

De la figura:

$$d\vec{\ell} = dz\,\hat{a}_z; \quad \vec{r}_2 = r\,\hat{a}_y; \quad \vec{r}_1 = z\,\hat{a}_z; \quad \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

Reemplazando: $\vec{A}_{(\vec{r})} = \dfrac{\mu_o I}{4\pi}\displaystyle\int_{z=-L}^{+L} \dfrac{dz\,\hat{a}_z}{\sqrt{r^2+z^2}} = \dfrac{\mu_o I}{4\pi}\left[\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+r^2}\right)\right]_{-L}^{+L}\hat{a}_z$

$$\Rightarrow \vec{A}_{(\vec{r})} = \frac{\mu_o I}{4\pi}\mathrm{Ln}\left(\frac{\sqrt{L^2 + r^2} + L}{\sqrt{L^2 + r^2} - L}\right)\hat{a}_z$$

Hallo $\vec{B}_{(\vec{r})}$; aplicando rotacional :

Se cumple: $\boxed{\vec{B}_{(\vec{r})} = \nabla \times \vec{A}_{(\vec{r})}}$

En este caso $\vec{A}$ depende de la coordenada " *r* ", por lo tanto su rotacional en coordenadas cilíndricas viene dado por:

$$\vec{B}_{(\vec{r})} = \nabla \times \vec{A}_{(\vec{r})} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(A_{(z)}\right)\hat{a}_\phi$$

Resolviendo se obtiene:

$$\vec{B}_{(\vec{r})} = \frac{\mu_o I\, L}{2\pi r\sqrt{L^2 + r^2}}\hat{a}_\phi$$