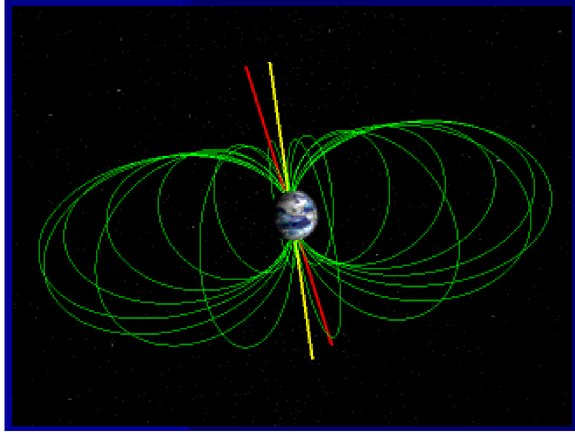
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

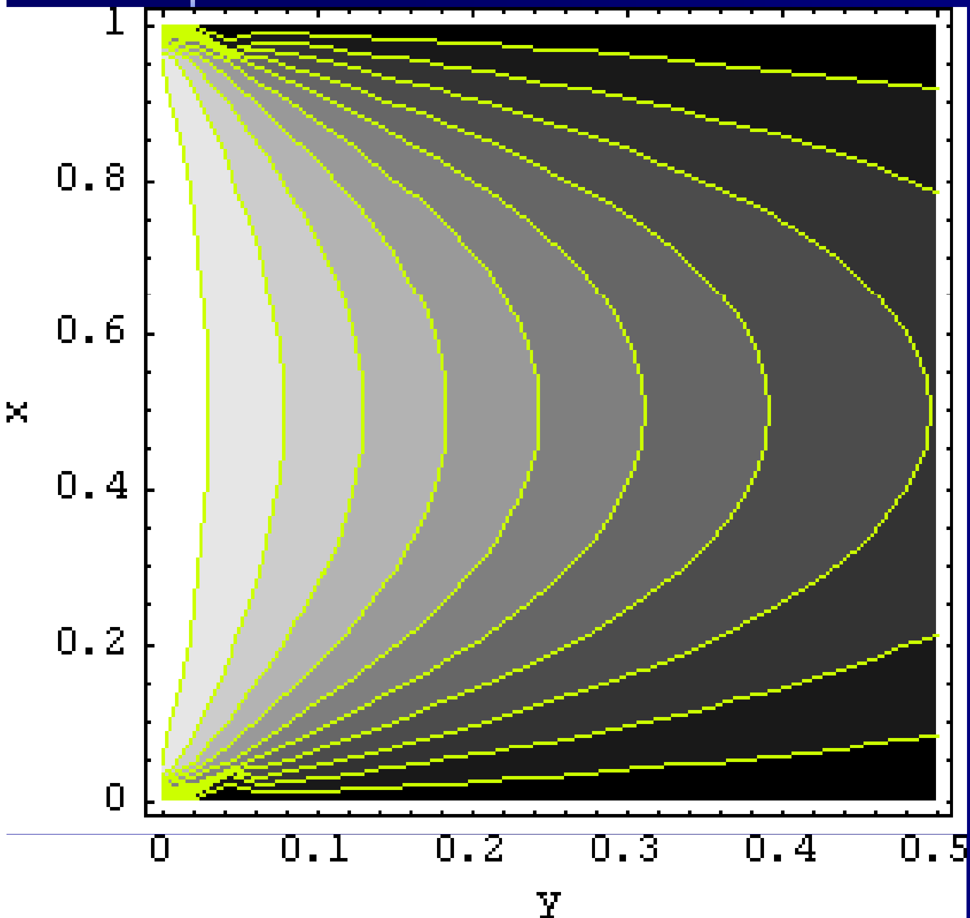
Curso:

TEORÍA DE CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS



PROFESOR: ING. JORGE MONTAÑO PISFIL

TEORÍA DE CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS



TEMA:

MÉTODOS GENERALES PARA RESOLVER PROBLEMAS ELECTROSTÁTICOS

MÉTODOS GENERALES PARA RESOLVER PROBLEMAS ELECTROSTÁTICOS

INTRODUCCIÓN

En 1820, Oersted descubrió en Copenhague que la corriente eléctrica producía la declinación de la aguja de una brújula. De esta forma podían unirse la electricidad y el magnetismo en una teoría única susceptible de abordarse con métodos matemáticos. Nace así una nueva rama de la "matemática aplicada" de la que Poisson fue uno de sus principales fundadores.

Poisson clasificó los cuerpos en conductores y aislantes; y definió la electricidad como un fluido donde los elementos semejantes se repelen y los elementos contrarios se atraen.

Amplió y extendió los trabajos realizados por Euler, Lagrange y Laplace sobre el potencial gravitatorio.

MÉTODOS GENERALES PARA RESOLVER PROBLEMAS ELECTROSTÁTICOS

En 1785 Laplace había establecido que la variación de potencial en cualquier punto, ya sea interior o exterior al cuerpo que ejerce la atracción gravitacional, satisface la ecuación que lleva su nombre

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

Poisson (1812) comprobó que esta ecuación no era correcta para los puntos (x,y,z) situados en el interior del cuerpo atrayente, la reformuló del siguiente modo

(ecuación de Poisson): $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\rho$, donde ρ

es la función de densidad del cuerpo atrayente y la extendió al campo eléctrico. En este mismo trabajo, Poisson consiguió resolver un problema cuya solución teórica había buscado ya Coulomb: el de la distribución de electricidad en un sistema de dos esferas.

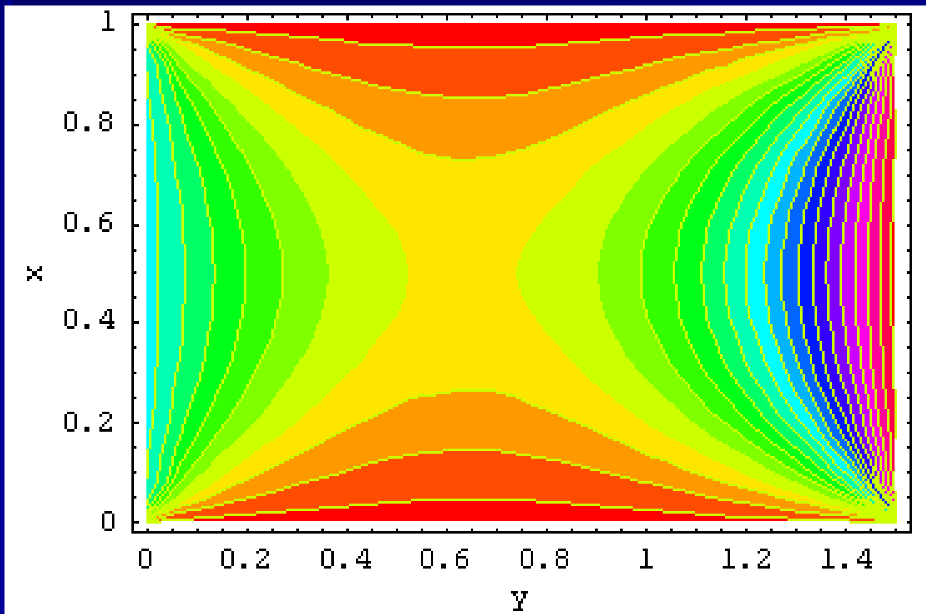
MÉTODOS GENERALES PARA RESOLVER PROBLEMAS ELECTROSTÁTICOS

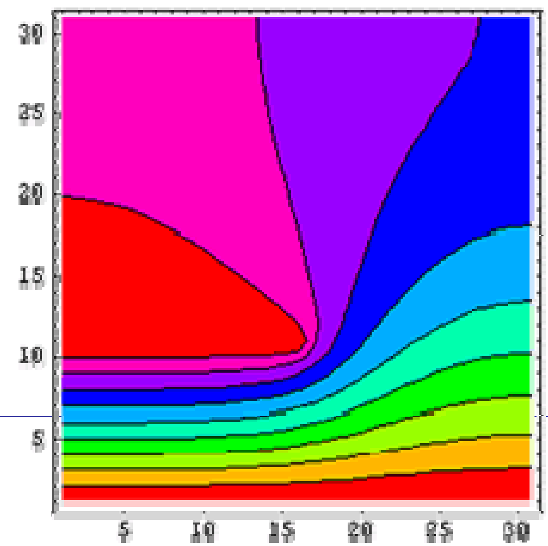
Cuando la distribución de carga no se especifica de antemano, para resolver problemas electrostáticos se utilizan los siguientes métodos:

- Ecuación de Poisson

- Ecuación de Laplace

- Método de imágenes electrostáticas





PRIMER MÉTODO: ECUACIÓN DE POISSON

Relaciones básicas:

1. $\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ . . . (I)

2. $\vec{E} = -\nabla \varphi$ . . . (II)

Reemplazando (II) en (I) :

$$\nabla \bullet (-\nabla \varphi) = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad -\nabla^2 \varphi = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

(Ecuación de Poisson)

* **En el espacio libre o vacío**, la ecuación de Poisson viene dada por:

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_o}$$

La ecuación de Poisson es una ecuación en derivadas parciales que puede resolverse una vez que se conoce la dependencia funcional de y las condiciones adecuadas en la frontera.

FORMAS QUE TOMA EL LAPLACIANO EN LOS DIFERENTES SISTEMAS DE COORDENADAS

a) EN COORDENADAS RECTANGULARES

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

b) EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

c) EN COORDENADAS ESFÉRICAS

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{Sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\mathrm{Sen}\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\,\mathrm{Sen}^2\theta}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}$$

MÉTODOS GENERALES PARA RESOLVER PROBLEMAS ELECTROSTÁTICOS

SEGUNDO MÉTODO: ECUACIÓN DE LAPLACE

Se utiliza para resolver ciertos problemas electrostáticos donde intervienen conductores. En este caso toda la carga se encuentra ya sea sobre la superficie de los conductores o en forma de cargas puntuales fijas, por lo tanto $\rho = 0$ en la mayoría de los puntos del espacio.

Donde se anula la densidad de carga ρ, la ecuación de Poisson se reduce a la forma más sencilla:

$$\nabla^2 \varphi = 0$$ (Ecuación de Laplace)

Hay dos métodos para la solución de la ecuación de Laplace:

- Hallar una solución general a partir de soluciones particulares en un sistema coordenado exigido por la simetría del problema.
- Utilizar el método de imágenes.

ECUACION DE LAPLACE CON UNA VARIABLE INDEPENDIENTE

Si φ es función de una sola variable, la ecuación de Laplace se reduce a una ecuación diferencial ordinaria.

A) EN COORDENADAS RECTANGULARES (x, y, z)

Según Laplace, el laplaciano de la función " φ " debe ser igual a cero, es decir:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden es igual a cero cuando cada uno de sus términos es igual a cero. Si los igualamos a cero cada uno de estos términos y los resolvemos integrando dos veces, la solución que se obtiene en cada caso es la que se muestra a continuación

$$Si\ \varphi = \varphi_{(x)} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad \therefore \quad \varphi_{(x)} = Ax + B$$

$$Si\ \varphi = \varphi_{(y)} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \therefore \quad \varphi_{(y)} = Ay + B$$

$$Si\ \varphi = \varphi_{(z)} \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \therefore \quad \varphi_{(z)} = Az + B$$

B) EN COORDENADAS CILÍNDRICAS (ρ , Φ, z):

En este caso, la ecuación de Laplace es:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

Al igualar cada término a cero tenemos:

$$Si\ \varphi = \varphi_{(\rho)} \Rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) = 0 \quad \therefore \quad \varphi_{(\rho)} = A\ln\rho + B$$

$$Si\ \varphi = \varphi_{(\phi)} \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0 \quad \therefore \quad \varphi_{(\phi)} = A\phi + B$$

$$Si\ \varphi = \varphi_{(z)} \Rightarrow \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \therefore \quad \varphi_{(z)} = Az + B$$

C) EN COORDENADAS ESFÉRICAS (r , θ, Φ):

En este caso, la ecuación de Laplace es:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\,Sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Sen\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\,Sen^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0$$

Al igualar cada término a cero tenemos:

$$Si\ \varphi = \varphi_{(r)} \Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 0 \qquad \therefore \qquad \varphi_{(r)} = -\frac{A}{r} + B$$

$$Si\ \varphi = \varphi_{(\theta)} \Rightarrow \frac{1}{r\,Sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Sen\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0 \quad \therefore \quad \varphi_{(\theta)} = A\ \ln(tg\theta/2) + B$$

$$Si\ \varphi = \varphi_{(\phi)} \Rightarrow \frac{1}{r^2\,Sen^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} = 0 \qquad \therefore \qquad \varphi_{(\phi)} = A\phi + B$$

ECUACIÓN DE LAPLACE PARA PROBLEMAS BIDIMENSIONALES

A) EN COORDENADAS RECTANGULARES (x, y, z):

Si la función potencial depende de "x" e "y", la ecuación de Laplace se reduce a lo siguiente:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Para resolver esta ecuación diferencial de segundo orden se aplica el método de separación de variables. Aplicando este método, para un valor dado de *K* la solución general a la ecuación de Laplace bidimensional, en coordenadas rectangulares, es:

$$\varphi_{(x,y)} = \sum_k \left(A_k\, e^{kx} + B_k\, e^{-kx}\right)\left(C_k \cos ky + D_K\, senky\right)$$

Esta última ecuación se puede escribir como:

$$\varphi_{(x,y)} = \sum_k \left(A_k \cosh kx + B_k\, senh\, kx\right)\left(C_k \cos ky + D_K\, senky\right)$$

<u>NOTAS</u> :

- *K* toma cualquier valor, pero al imponer condiciones de frontera a $\varphi_{(x,y)}$ se restringen los valores posibles de *K*.

- Si se intercambian las variables "x" e "y" en las dos ecuaciones anteriores, entonces resultan dos ecuaciones más que también son soluciones generales a la ecuación de Laplace bidimensional en coordenadas rectangulares.

B) EN COORDENADAS ESFÉRICAS

Si la función potencial depende sólo de las variables $r \ y \ \theta$, la ecuación de Laplace se reduce a lo siguiente:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r\,Sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(Sen\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0$$

Esta ecuación diferencial de segundo orden se resuelve por el método de separación de variables. Aplicando este método se obtiene las soluciones conocidas como armónicos esféricos.

La solución general a la ecuación de Laplace bidimensional, en coordenadas esféricas, es:

$$\varphi_{(r,\theta)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n r^n + C_n r^{-(n+1)}\right]P_{n(\theta)}$$

Donde $P_{n(\theta)}$ son los llamados polinomios de Legendre. Los cuatro primeros polinomios de Legendre se dan en la siguiente tabla:

n	$P_{n(\theta)}$
0	1
1	$\cos\theta$
2	$\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

C) EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

Si la función φ depende sólo de las coordenadas $\rho \; y \; \phi$ (φ es independiente de la coordenada z), la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas puede resolverse también por el método de separación de variables. Estas soluciones son apropiadas para ciertos problemas en los que intervienen un conductor cilíndrico y un alambre recto y largo. No debe usarse cuando se trata de un segmento cilíndrico corto.

Si el potencial es independiente de z, la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas se convierte en:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0$$

Aplicando el método de separación de variables, la solución general que se obtiene es la siguiente:

$$\varphi_{(\rho,\,\phi)} = A_o + B_0 Ln\rho + \sum_{n=1} \rho^n (A_n \cos n\phi + B_n \, sen\, n\phi) + \sum_{n=1} \rho^{-n} (C_n \cos n\phi + D_n \, sen\, n\phi)$$

MÉTODO DE LAS IMÁGENES ELECTROSTÁTICAS

Este método se aplica comúnmente para determinar el potencial eléctrico φ , la intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$, la densidad de flujo eléctrico $\vec{D}$ y la densidad de carga superficial σ debidos a cargas en presencia de conductores. Al aplicar este método evitamos resolver la ecuación de Poisson o de Laplace, y se aprovecha el hecho que una superficie conductora es una superficie equipotencial.

La teoría de imagen establece que una configuración de carga determinada cerca de un plano conductor puesto a tierra puede ser reemplazada por la configuración misma de carga, su imagen y una superficie equipotencial en lugar del plano conductor.

Cuando se aplica el método de imágenes electrostáticas tienen que cumplirse siempre dos condiciones:

- La carga o cargas imagen deben estar situadas en la región conductora.

- La carga o cargas imagen deben estar situadas en forma tal que en la superficie o superficies conductoras el potencial sea cero o constante.