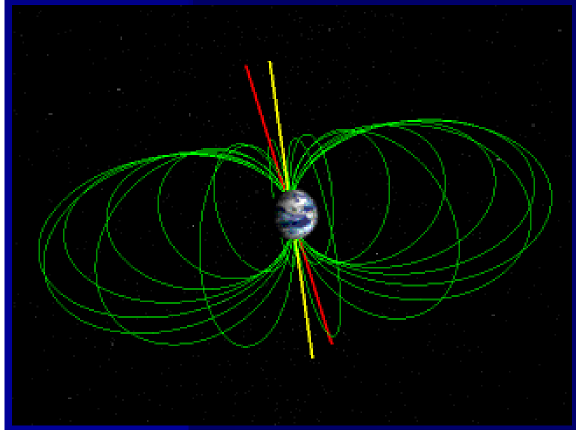
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA

ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA ELÉCTRICA

Curso:

TEORÍA DE CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS



PROFESOR: ING. JORGE MONTAÑO PISFIL

ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

INTRODUCCIÓN

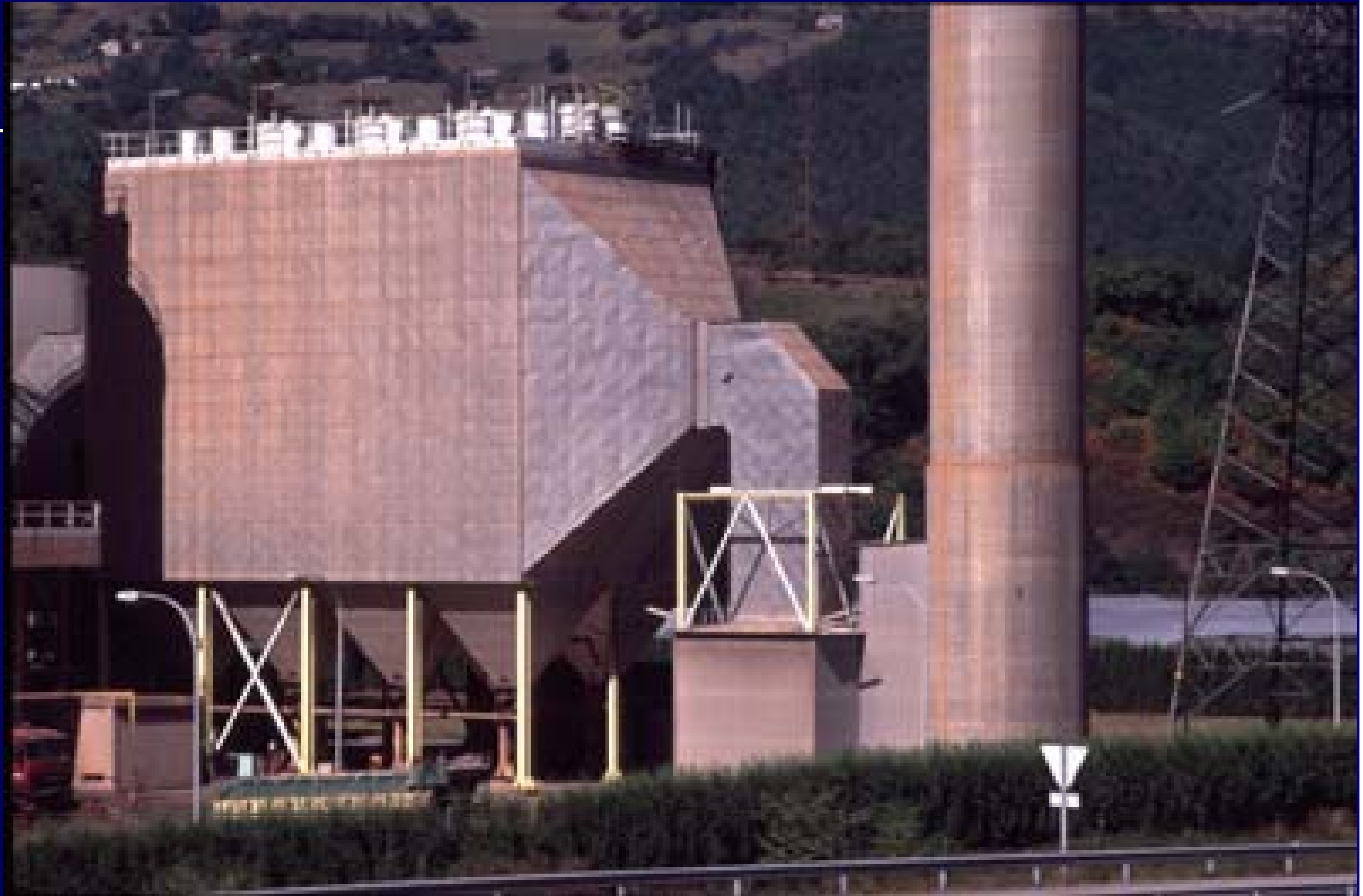
FENÓMENOS ELECTROSTÁTICOS

Los pedacitos de papel son atraídos por el globo, a este fenómeno se denomina inducción electrostática.

FENÓMENOS ELECTROSTÁTICOS

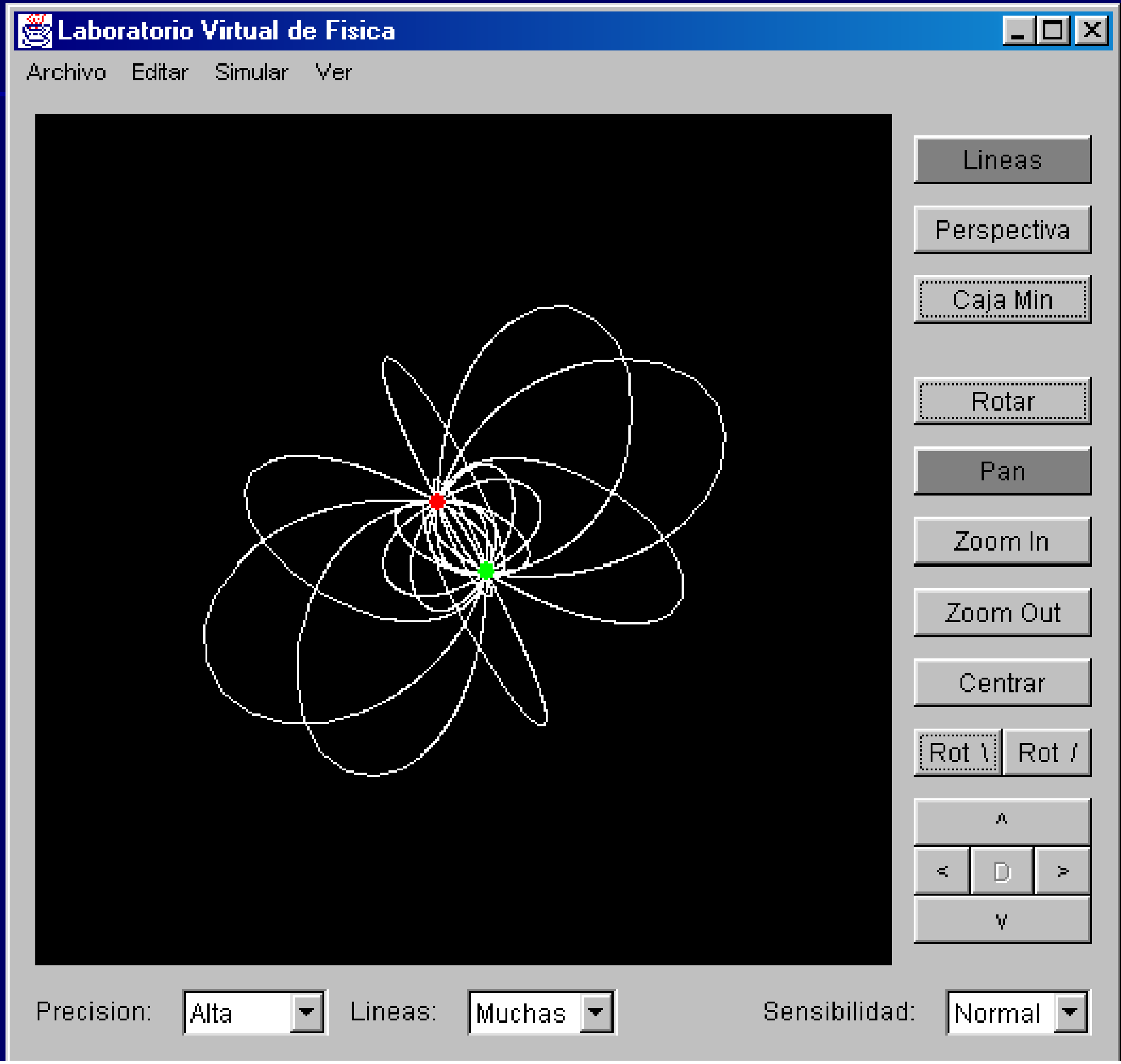
Profesor tocando una máquina electrostática , los pelos se han cargado eléctricamente y se repelen entre ellos.

APLICACIONES DE LA ELECTROSTÁTICA EN LA INDUSTRIA



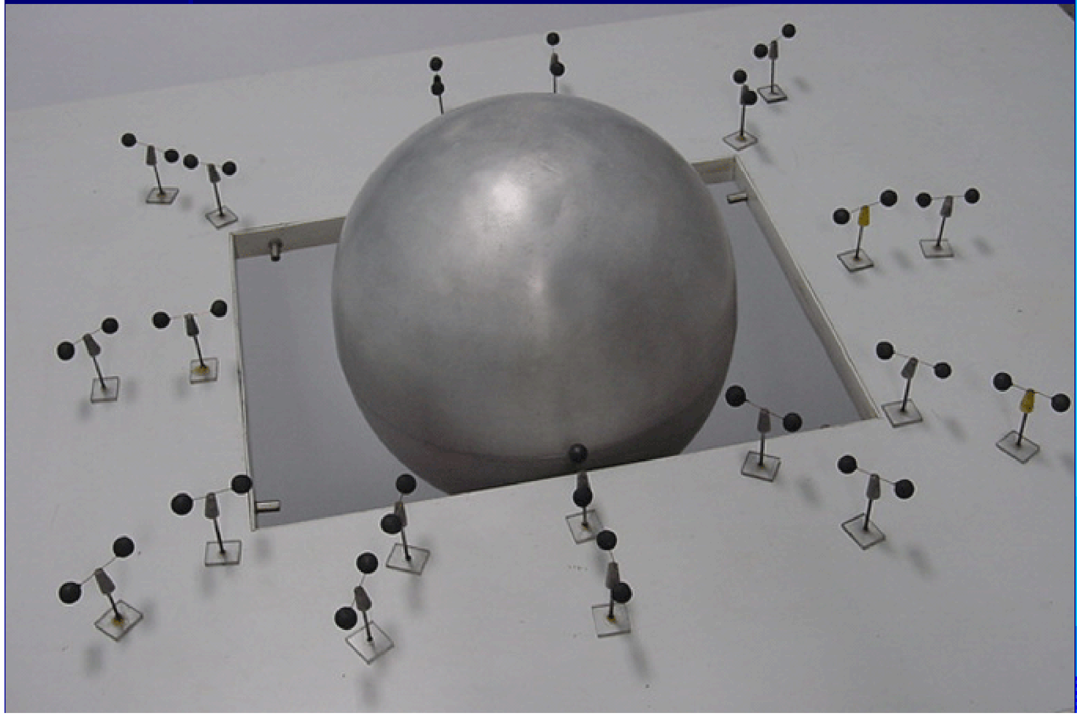
PRECIPITADOR ELECTROSTÁTICO

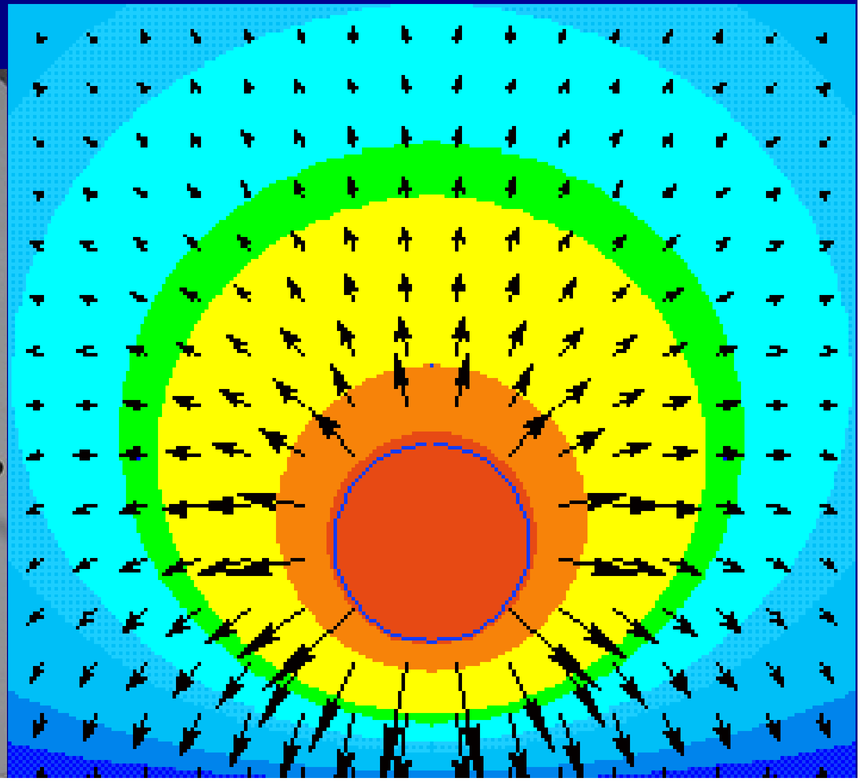
SIMULACIÓN DE LÍNEAS DE CAMPO ELÉCTRICO DEBIDO A DOS CARGAS ELÉCTRICAS DE IGUAL MAGNITUD Y DE SIGNO CONTRARIO



ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

La electrostática en el vacío estudia los fenómenos o efectos producidos por las cargas eléctricas en reposo y por los campos eléctricos que no cambian con el tiempo.





ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

POSTULADOS FUNDAMENTALES DE LA ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

Los dos postulados fundamentales de la electrostática en el vacío o en el espacio libre, que forman la base para construir la estructura de la electrostática, son:

FORMA DIFERENCIAL	FORMA INTEGRAL
1) $\nabla \bullet \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o}$	$\oint_S \vec{E} \bullet d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$
2) $\nabla x \vec{E} = 0$	$\oint_C \vec{E} \bullet d\vec{\ell} = 0$

*** La forma diferencial de ambas ecuaciones son dos de las cuatro ecuaciones de Maxwell.**

* Se sabe que en el vacío o espacio libre, la densidad de flujo eléctrico $\vec{D}$ y la intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$ están relacionadas con la ecuación: $\vec{D} = \varepsilon_o \vec{E}$.

Entonces, la forma diferencial y la forma integral del primer postulado de la electrostática en el vacío queda:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho} \quad ; \quad \boxed{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q}$$

Donde: "Q" es la carga neta libre encerrada por la superficie gaussiana.

Los dos postulados de la Electrostática en el vacío son concisos, sencillos e independientes del sistema de coordenadas, además pueden usarse para derivar otras relaciones, leyes y teoremas de la electrostática. Por ejemplo:

- Se puede obtener la *ley de Gauss*, para ello se toma integral de volumen a la ecuación (1) y luego se aplica el teorema de la divergencia.

- Se puede obtener la ley de voltajes de Kirchhoff, para ello se toma la integral de superficie a la ecuación (2) y luego se aplica el teorema de Stokes.

RECORDAR:

* La intensidad de campo eléctrico debido a una distribución continua de carga se halla con la siguiente ecuación:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dQ}{\left|\vec{r_2}-\vec{r_1}\right|^3}(\vec{r_2}-\vec{r_1})$$

Donde:

$dQ = \lambda\, d\ell$ o $dQ = \lambda\, dA$ o $dQ = \lambda\, dV$

* Si se conociera el potencial eléctrico "φ", la intensidad de campo eléctrico viene dado por:

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

POTENCIAL ELÉCTRICO

Es una cantidad escalar que se utiliza para expresar cuantitativamente la medición de los efectos del campo eléctrico en un punto de dicho campo. Dado que el potencial eléctrico es una cantidad escalar, entonces lleva el mismo signo de la carga que genera el campo eléctrico.

POTENCIAL ELÉCTRICO EN UN PUNTO

El potencial eléctrico en un punto B viene dado por:

$$V_B = -\int_{\mathrm{Re}\,ferencia}^{P_B} \vec{E} \bullet d\vec{\ell} \quad ; \quad donde: \ d\vec{\ell} = d\vec{r}$$

** Si la referencia es el infinito, el potencial es igual a cero*

DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE DOS PUNTOS

***La diferencia de potencial eléctrico entre los puntos A y B viene dada por*:**

$$V_B - V_A = -\int_{P_A}^{P_B} \vec{E} \bullet d\,\vec{\ell} \;; \quad donde:\; d\,\vec{\ell} = d\,\vec{r}$$

donde:

V_B **: potencial eléctrico en el punto *B***

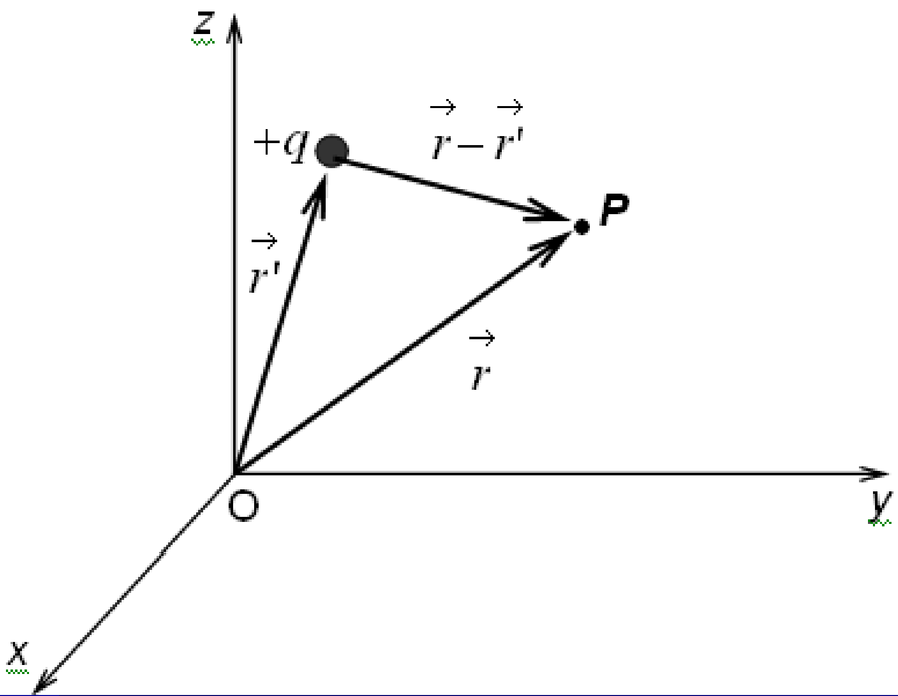
V_A **: potencial eléctrico en el punto *A***

**** Si el punto A es el infinito o tierra, el potencial V_A es igual a cero.***

POTENCIAL ELÉCTRICO DEBIDO A UNA CARGA PUNTUAL

El potencial eléctrico debido a una carga puntual "$+q$", en la posición $\vec{r}$ (ver figura),

viene dado por:

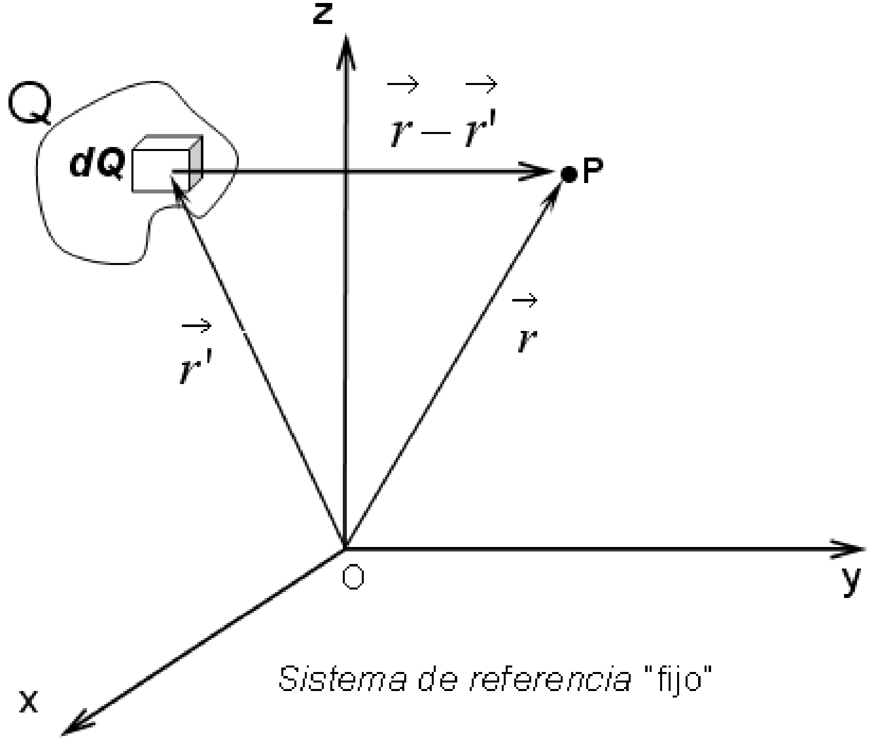


$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}$$

POTENCIAL ELÉCTRICO DEBIDO A UNA DISTRIBUCIÓN CONTINUA DE CARGA

El potencial eléctrico debido a una distribución continua de carga, posición $\vec{r}$ (ver figura), viene dado por:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dQ}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}$$



Sistema de referencia "fijo"

Donde:

$dQ = \lambda\, d\ell$ Para una distribución lineal.

$dQ = \sigma\, dA$ Para una distribución superficial.

$dQ = \rho\, dV$ Para una distribución volumétrica.

ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

Es la energía que se almacena en un punto cualesquiera de un campo electrostático debido a este campo. En el caso de una distribución continua de carga, esta energía se puede calcular con la siguiente ecuación:

$$W_E = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon_0\, E^2\, dV$$

Donde: E = módulo o magnitud de la intensidad de campo eléctrico.

* Se denomina **densidad de energía electrostática** (w_E) a la cantidad de energía que almacena un campo electrostático por cada unidad de volumen. Por lo tanto, la energía electrostática W_E , en función de w_E , se puede expresar de la siguiente forma:

$$W_E = \int_V w_E\, dV \quad ; \quad \text{donde:} \quad w_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0\, E^2$$

PROBLEMAS RESUELTOS DE ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

Problema N° 1

Dentro de la región cilíndrica $\rho < 4m$, la densidad de flujo eléctrico está dada por $\vec{D} = 5\rho^3 \hat{a}_\rho \frac{C}{m^2}$ a) ¿Cuál es la densidad de carga volumétrica en $\rho = 3m$? b) ¿Cuál es la densidad de flujo eléctrico en $\rho = 3m$? c) ¿Qué cantidad de flujo sale del cilindro $\rho = 3m$, $|z| \leq 2.5$ m? d) ¿Cuánta carga está contenida dentro del cilindro $\rho = 3m$, $|z| \leq 2.5$ m?

PROBLEMAS RESUELTOS DE ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

Resolución

a) Cálculo de ρ_V (densidad de carga volumétrica) en $\rho = 3\,m$

Cuando se conoce $\vec{D}$ (densidad de flujo eléctrico), la densidad de carga volumétrica "ρ_V" se halla aplicando el primer postulado de la electrostática o primera Ecuación de Maxwell. Es decir:

$$\rho_V = \nabla \bullet \vec{D}$$

De acuerdo con la condición, $\vec{D}$ depende sólo de la coordenada "ρ", luego la divergencia de $\vec{D}$, en coordenadas cilíndricas, queda:

$$\nabla \bullet \vec{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho D_\rho\right)$$

PROBLEMAS RESUELTOS DE ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

$$\Rightarrow \rho_v = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(5\rho^4\right) = 20\frac{\rho^3}{\rho} = 20\rho^2$$

$$\therefore \quad Si\ \rho = 3m \Rightarrow \rho_v = 20(3)^2 = 180\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}$$

b) Cálculo de $\vec{D}$ (densidad de flujo eléctrico) en $\rho = 3m$

Se sabe que: $\vec{D} = 5\rho^3 \hat{a}_\rho \frac{C}{m^2}$, para $\rho < 4m$

Si $\rho = 3m \rightarrow \vec{D} = 5(3)^3 \hat{a}_\rho = 135\ \hat{a}_\rho$ **(C / m²)**

PROBLEMAS RESUELTOS DE ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

c) Cálculo de ϕ (flujo eléctrico) que sale del cilindro $\rho = 3m$ y $|z| \leq 2.5m$

Se sabe que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada S viene dado por:

$$\phi_{total} = \oint_S \vec{D} \bullet d\vec{S}$$

La integral cerrada, a través de la superficie S (el cilindro descrito), la descomponemos en tres integrales abiertas, por lo tanto se cumple que:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{S_3} \vec{D} \cdot d\vec{S}_3$$

Donde: S_1 es la superficie lateral del cilindro (ver figura siguiente), S_2 es la superficie de la tapa superior y S_3 es la superficie de la tapa inferior del cilindro.

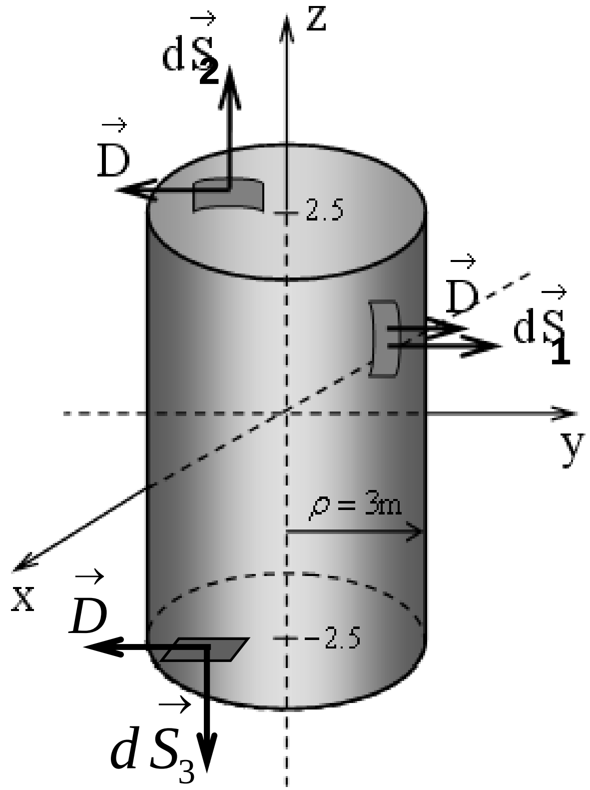
PROBLEMAS RESUELTOS DE ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

* Note (ver figura) que a través de las superficies superior e inferior del cilindro no hay flujo porque los vectores $\vec{D}$ y $d\vec{S}$ son perpendiculares entre sí.

$$\Rightarrow \ \phi_{total} = \iint 5\rho^3 \hat{a}_\rho \bullet \rho d\phi dz\, \hat{a}_\rho = \iint 5\rho^4 d\phi dz$$

$$\Rightarrow \ \phi_{total} = \iint 5(3)^4 d\phi\, dz = 405 \int_{z=-2,5}^{z=2,5} dz \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi$$

$$\therefore \ \phi_{TOTAL} = 405(5)(2\pi) = (4050\pi)\ C$$



PROBLEMAS RESUELTOS DE ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

d) Cálculo de Q_{total} contenida en el cilindro $\rho = 3m$ y $|z| \le 2.5m$

Se sabe que en una distribución de carga volumétrica, la carga total viene dada por:

$$Q_{total} = \int_V \rho_V \, dV \; ; \quad \text{Donde: } \rho_v = 20\rho^2 \quad \text{y} \quad dV = \rho \, d\rho \, d\phi \, dz$$

$$\Rightarrow Q = \int_{z=-2.5}^{2.5} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{3} 20\rho^2 \rho \, d\rho \, d\phi \, dz = 20 \int_{\rho=0}^{3} \rho^3 d\rho \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{z=-2,5}^{2,5} dz$$

$$\therefore \; Q_{total} = 4050\pi \, C$$

<u>Nota</u>. De ***c)*** y ***d)*** se concluye que $\phi_{total} = Q_{total}$. Esto es cierto porque así lo establece la ley de gauss: $\phi_{total} = \oint_S \vec{D} \bullet d\vec{S} = Q_{total}$.

PROBLEMAS RESUELTOS DE ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

Problema Nº 2

Dado el campo $\vec{D} = (20/\rho^2)(\text{sen}^2\phi\,\hat{a}_\rho + \text{sen}2\phi\,\hat{a}_\phi)$ C/m^2, encuentre la carga total que está dentro del volumen $1m < \rho < 2m$, $0 < \phi < \pi/2$, $0 < z < 1m$. Utilice dos métodos diferentes de cálculo.

Resolución

1er Método de Cálculo de "Q_{total}": aplicando $Q_{total} = \int_V \rho_v dV$

Para calcular $\boldsymbol{Q_{total}}$ aplicando $Q_{total} = \int_V \rho_v dV$ necesito conocer ρ_V (densidad de carga volumétrica). El valor de ρ_V se halla aplicando el Primer postulado fundamental de la Electrostática o primera Ecuación de Maxwell. Es decir: $\rho_v = \nabla \bullet \vec{D}$.

La divergencia de $\vec{D}$, en coordenadas cilíndricas, viene dado por:

PROBLEMAS RESUELTOS DE ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

$$\nabla \bullet \vec{D} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\, D_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$; Donde: $\vec{D} = \left(\frac{20}{\rho^2}\right)\left(\mathrm{sen}^2\phi\, \hat{a}_\rho + \mathrm{sen}2\phi\, \hat{a}_\phi\right)\frac{C}{m^2}$

Calculando la divergencia de $\vec{D}$ obtengo: $\rho_v = \nabla \bullet \vec{D} = \dfrac{-20\mathrm{sen}^2\phi + 40\cos 2\phi}{\rho^3}$

Luego: $$Q_{total} = \int_{\rho=1}^{2}\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{z=0}^{1} \frac{\left(-20\mathrm{sen}^2\phi + 40\cos 2\phi\right)}{\rho^3}\, \rho\, d\rho\, d\phi\, dz$$

$$\Rightarrow Q_{total} = -\frac{5\pi}{2}C = -7{,}85C$$

2do Método de Cálculo de "Q_{total}": aplicando la ley de Gauss

Según la Ley de Gauss se cumple que:

$$Q_{total} = \oint_S \vec{D} \bullet d\vec{S} \quad \ldots \textbf{(1)}$$

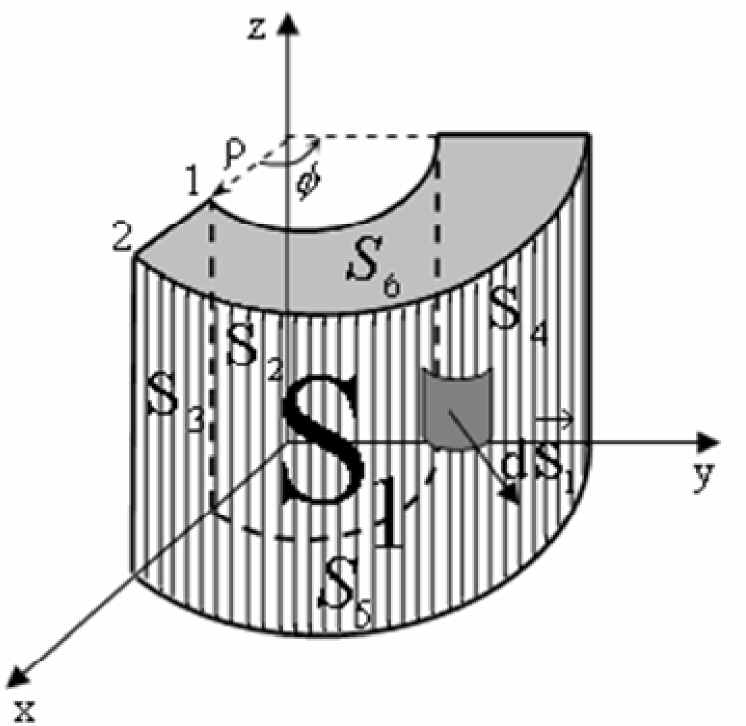
PROBLEMAS RESUELTOS DE ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

De acuerdo al enunciado:

$$\vec{D} = \left(\frac{20}{\rho^2}\right)\left(\mathrm{sen}^2\phi\,\hat{a}_\rho + \mathrm{sen}2\phi\,\hat{a}_\phi\right)\frac{C}{m^2}$$

$$1m \le \rho \le 2m,\quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2},\quad 0 \le z \le 1m$$

La figura correspondiente, de acuerdo con el enunciado, será:



Como el campo vectorial $\vec{D}$ no tiene coordenada "z", entonces para las superficies S_5 y S_6 (para la base y la tapa): $\vec{D} \bullet d\vec{S} = 0$. Es decir, no hay flujo eléctrico a través de S_5 y S_6.

De la figura se observa que la integral cerrada, a través de la superficie S, se descompone en seis (6) integrales abiertas.

PROBLEMAS RESUELTOS DE ELECTROSTÁTICA EN EL VACÍO

Al descomponer la integral cerrada en seis integrales abiertas, y considerando que dos de ellas se anulan (las integrales de S_5 y S_6), entonces la ecuación (1) puede escribirse de la siguiente forma:

$$Q_{total} = \int_{S_1} \vec{D} \bullet d\vec{S_1} + \int_{S_2} \vec{D} \bullet d\vec{S_2} + \int_{S_3} \vec{D} \bullet d\vec{S_3} + \int_{S_4} \vec{D} \bullet d\vec{S_4} \quad \ldots \textbf{(2)}$$

De la figura:

$$d\vec{S_1} = \rho\, d\phi\, dz(\hat{a}_\rho) \quad \text{donde} \quad \rho = 2m \quad ; \quad d\vec{S_2} = \rho\, d\phi\, dz(-\hat{a}_\rho) \quad \text{donde} \quad \rho = 1m$$

$$d\vec{S_3} = d\rho\, dz(-\hat{a}_\phi) \quad \text{donde} \quad \phi = 0 \quad ; \quad d\vec{S_4} = d\rho\, dz(\hat{a}_\phi) \quad \text{donde} \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

Reemplazando en la ecuación (2) e integrando obtenemos:

$$Q_{total} = -\frac{5\pi}{2} C = -7{,}85 C$$