SERIE

SCHAUM

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

FRANK AYRES, JR.

TEORIA Y
1.175
PROBLEMAS RESUELTOS

schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill
schaum-mcgraw-hill

SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM

TEORIA Y PROBLEMAS

DE

CALCULO

diferencial e integral

FRANK AYRES, JR., Ph. D.

Formerly Professor and Head,
Department of Mathematics
Dickinson College

•

TRADUCCIÓN Y ADAPTACIÓN

LUIS GUTIÉRREZ DÍEZ
Ingeniero de Armamento

ANGEL GUTIÉRREZ VÁZQUEZ
Ingeniero de Armamento
Licenciado en Ciencias Físicas
Diplomado en Ingeniería Nuclear

McGRAW-HILL

MADRID • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • GUATEMALA • LISBOA • MÉXICO
NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • JOHANNESBURGO • LONDRES • MONTREAL
NUEVA DELHI • PARÍS • SAN FRANCISCO • SINGAPUR
ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Atlacomulco 499-501, Naucalpan de Juárez, Edo. de México
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 465

ISBN 968-451-182-5

ISBN 0-07-091520-2

Traducido de la segunda edición en inglés de

CALCULUS

ISBN 0-07-002653-X

ISBN: 84-85-240-21-9
Depósito legal: M. 43944-1988

De esta edición se imprimieron 3.000 ejemplares en enero de 1989.

Impresión: Artes Gráficas EMA, S. A. Miguel Yuste, 27. 28037 Madrid

PRINTED IN SPAIN - IMPRESO EN ESPAÑA

Prólogo

El propósito de este libro sigue siendo, como en la primera edición (en inglés), proporcionar a los alumnos que inician sus estudios de cálculo una serie de problemas representativos, resueltos con todo detalle. Por sus características será asimismo de gran utilidad para los estudiantes de ciencias e ingeniería que necesiten consultar o repasar conceptos fundamentales de la teoría y encontrar el modo de resolver ciertos problemas, relacionados con alguna aplicación práctica. Por otra parte, al figurar en esta edición demostraciones de los teoremas y deducciones de las fórmulas de derivación e integración, junto con una amplia relación de problemas resueltos y propuestos, también se puede utilizar como libro de texto para desarrollar un curso de cálculo.

La disposición del libro es, en líneas generales, análoga a la de la edición anterior. Cada capítulo comienza por establecer las definiciones, principios y teoremas de los temas a tratar en él. Los ejemplos ilustrativos y los problemas resueltos que figuran a continuación se han seleccionado no solo con el objeto de ampliar o completar la teoría, sino también con el de que el alumno adquiera práctica en la formulación y resolución de problemas; para que éste pueda aplicar repetidamente los principios fundamentales y para que la enseñanza sea verdaderamente eficaz; para prevenirle ante las dificultades con que normalmente se tropieza el principiante y, finalmente, para mostrar el amplio campo en el que el cálculo tiene aplicación. En la explicación de los problemas resueltos se incluyen numerosas demostraciones de teoremas y se razonan, detalladamente, los resultados. Para sacar el máximo partido de este libro, bien se utilice como texto suplementario, bien como texto propiamente dicho, es necesario estudiar detenidamente los problemas resueltos. En cada uno de ellos hay algo que aprender y lo más práctico será que el alumno los vuelva a resolver él solo, justificando los sucesivos pasos o etapas de los mismos. De esta forma no se encontrarán grandes dificultades para resolver la mayor parte de los problemas propuestos.

El aumento de, aproximadamente, un cincuenta por ciento, que ha experimentado el contenido de esta edición se debe, solo en parte, a las adiciones reseñadas anteriormente. Otras innovaciones que merece la pena destacar son el estudio más completo del concepto de límite, de la continuidad de funciones y de las series infinitas, así como la introducción más extensa que se ha dado a los vectores en el plano y en el espacio.

Con objeto de que la parte en que se exponen las aplicaciones más elementales de la integración, como son el cálculo de áreas, volúmenes, etc., se pueda estudiar en orden de capítulos diferente al que aquí aparece, estos han sido expuestos de forma que en su mayor parte se puedan asimilar, una vez estudiados los seis primeros. Así, quienes utilicen este texto como libro de consulta o suplemento, encontrarán pocas dificultades para acomodarlo a sus necesidades.

El autor quiere aprovechar la oportunidad de poder expresar su gratitud a la Schaum Publishing Company por su magnífica cooperación.

FRANK AYRES, JR.

TABLA DE MATERIAS

Capítulo 1

Variables y funciones

EL CONJUNTO DE LOS NUMEROS REALES está formado por el de los números racionales (enteros positivos y negativos, cero y los fraccionarios de la forma a/b siendo a y b números enteros) y el de los números irracionales (de infinitas cifras decimales, como por ejemplo $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ y $\pi = 3{,}14159\ldots$ que no se pueden expresar como una relación entre enteros).

El álgebra de los números complejos no juegan aquí papel alguno y como no puede haber confusión siempre que se hable de un número, se sobrentenderá que se trata de un número *real.*

EL VALOR ABSOLUTO O NUMERICO ($|N|$) de un número (real) N se define por:

$$|N| = N \text{ si } N \text{ es cero o un número positivo,}$$
$$|N| = -N \text{ si } N \text{ es un número negativo.}$$

Por ejemplo,

$$|3| = |-3| = 3, \quad |3-5| = |5-3| = 2,$$
$$|x-a| = x-a \text{ si } x \geqslant a \quad \text{y} \quad |x-a| = a-x \text{ si } x < a.$$

En general, si a y b son dos números cualesquiera,

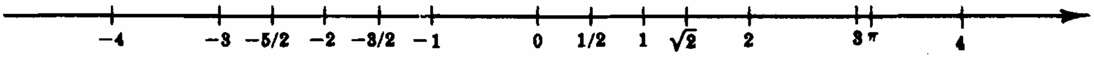
$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$$

$$|a \pm b| = |b \pm a|; \quad |ab| = |a| \cdot |b|; \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a}{b}\right|, \quad b \neq 0;$$

$$|a+b| \geqslant |a| - |b|; \quad |a-b| \leqslant |a| + |b|;$$
$$|a+b| \leqslant |a| + |b|; \quad |a-b| \geqslant |a| - |b|.$$

UNA ESCALA NUMERICA es una representación gráfica de los números reales por medio de los puntos de una recta. A cada número le corresponde un solo punto de la recta y recíprocamente. Por tanto, los vocablos número y punto (en una escala numérica) se pueden utilizar indistintamente.

Para establecer una escala numérica sobre una recta hay que efectuar las siguientes operaciones: (i) tomar un punto cualquiera de ella como *origen* (asignándole el 0), (ii) elegir un sentido positivo (se indica por medio de una flecha) y (iii) con una unidad de medida adecuada situar el punto $+1$ a una distancia del 0 igual a dicha unidad. Los números (puntos) N y $-N$ están a ambos lados de 0 y a $|N|$ unidades de él.

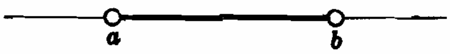


Si a y b son dos números diferentes, $a < b$ significa que a está situado a la izquierda de b en la escala, mientras que $a > b$ quiere decir que a está a la derecha de b.

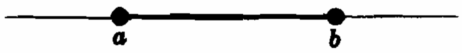
El segmento dirigido de a a b viene representado por $b - a$, siendo negativo si $a > b$ y positivo si $a < b$. En cualquiera de estos casos, b está a una distancia de a igual a $|b - a| = |a - b|$.

INTERVALOS FINITOS. Sean a y b dos números tales que $a < b$. El conjunto de todos los números x comprendidos entre a y b recibe el nombre de *intervalo abierto* de a a b y se escribe $a < x < b$. Los puntos a y b reciben el nombre de *extremos* del intervalo. Un intervalo abierto no contiene a sus extremos.

El intervalo abierto $a < x < b$ junto con sus extremos a y b recibe el nombre de *intervalo cerrado* de a a b y se escribe $a \leq x \leq b$.



intervalo abierto: $a < x < b$



intervalo cerrado: $a \leq x \leq b$

INTERVALOS INFINITOS. Sea a un número cualquiera. El conjunto de todos los números x tales que $x < a$ recibe el nombre de *intervalo infinito*. Otros intervalos infinitos son los definidos por $x \leq a$, $x > a$ y $x \geq a$.

(Ver Problemas 1-2.)

CONSTANTE Y VARIABLE. En la definición del intervalo $a < x < b$:

(i) cada uno de los símbolos a y b representan un solo número que se denomina una *constante*.

(ii) el símbolo x representa un número cualquiera del conjunto de números y se denomina *variable*.

El campo de variación de una variable es otra característica del conjunto de números que ella representa. Por ejemplo:

(1) si x es un libro de un conjunto formado por diez volúmenes, el campo de variación de x es el conjunto formado por los números enteros 1, 2, 3, . . ., 10.

(2) Si x es un día del mes de julio, su campo de variación estará formado por el conjunto de números 1, 2, 3, . . ., 31.

(3) Si x es la cantidad de agua (en litros) que se puede sacar de un depósito lleno de diez litros, su campo de variación es el intervalo $0 \leq x \leq 10$.

LAS DESIGUALDADES, como por ejemplo $2x - 3 > 0$ y $x^2 - 5x - 24 \leq 0$, también definen intervalos sobre una escala numérica.

Ejemplo 1: Resolver la desigualdad (*a*) $2x - 3 > 0$, (*b*) $x^2 - 5x - 24 \leq 0$.

(*a*) Se resuelve $2x - 3 = 0$ y se obtiene $x = 3/2$; consideramos los intervalos $x < 3/2$ y $x > 3/2$. Para un valor cualquiera de x del intervalo $x < 3/2$, tal como $x = 0$, se verifica $2x - 3 < 0$; para un valor cualquiera de x del intervalo $x > 3/2$ tal como $x = 3$, se verifica $2x - 3 > 0$. Por tanto, $2x - 3 > 0$ para todo valor de x perteneciente al intervalo $x > 3/2$.

(*b*) Se resuelve $x^2 - 5x - 24 = (x + 3)(x - 8) = 0$ y se obtiene $x = -3$ y $x = 8$; consideremos los intervalos $x < -3$, $-3 < x < 8$, $x > 8$. Ahora bien $x^2 - 5x - 24 > 0$ para todos los valores de x pertenecientes a los intervalos $x < -3$ y $x > 8$. Por otra parte $x^2 - 5x - 24 < 0$ para los valores del intervalo $-3 < x < 8$. Por tanto, $x^2 - 5x - 24 \leq 0$ en el intervalo $-3 \leq x \leq 8$.

(Ver Problema 3.)

FUNCION DE UNA VARIABLE. Se dice que una variable y es *función* de otra x, cuando ambas están relacionadas de forma que para cada valor de x perteneciente a su campo de variación le corresponde *un* valor de y. La variable y, cuyo valor depende del que tome x, recibe el nombre de *variable dependiente*, mientras que x es una *variable independiente*. La relación que liga a la función con la variable puede ser una tabla de valores en correspondencia (por ej., una tabla de logaritmos), una gráfica o una ecuación.

Ejemplo 2:

La ecuación $x^2 - y = 10$, siendo x la variable independiente, asigna un valor a y para cada valor que se dé a x. La función definida es $y = x^2 - 10$. La misma ecuación, tomando a y como variable independiente, hace corresponder dos valores de x con cada uno de los que se den a y. Por tanto, se pueden definir dos funciones de y: $x = \sqrt{10+y}$ y $x = -\sqrt{10+y}$.

Algunos autores definen a y como función de x, cuando a cada valor de x, perteneciente a su campo de variación, le corresponde uno o más valores de y. Así, pues, en el Ejemplo 2, y es una función *uniforme* de x, mientras que x es una función *multiforme* de y. Sin embargo, en el Cálculo, es conveniente descomponer las funciones multiformes en dos o más funciones uniformes.

Por ello, la definición que hemos dado de función lleva implícita esta propiedad de uniformidad.

El símbolo $f(x)$ se lee «función de x» o bien f de x, pero nunca «f veces x». Si en un mismo problema intervienen otras funciones de x se emplearán letras diferentes para denominarlas: $g(x)$, $h(x)$, $F(x)$, $\theta(x)$, . . .

Para poder estudiar una función $y = f(x)$ se necesita siempre conocer el campo de variación de la variable independiente, que también recibe el nombre de *dominio de definición* de la función.

Ejemplo 3:

(*a*) La función $f(x) = 18x - 3x^2$ está definida para todo valor de x; es decir, que siempre que x sea un número real, $18x - 3x^2$ también lo es. Por consiguiente el campo de variación de x o dominio de definición de la función está formado por el conjunto de los números reales.

(*b*) Si el área de un rectángulo determinado viene dada por $y = 18x - 3x^2$, siendo x uno de sus lados, tanto x como $18x - 3x^2$ deben ser positivos. De la figura adjunta o bien del Problema 3 (*a*) se deduce que el dominio de definición es el intervalo $0 < x < 6$.

(*c*) El dominio de definición de la función $y = x^2 - 10$ del Ejemplo 2 es el conjunto de los números reales. En las funciones $x = \sqrt{10+y}$ y $x = -\sqrt{10+y}$ es necesario que $10 + y \geq 0$; por tanto, el dominio de definición de cada una de ellas es $y \geq -10$.

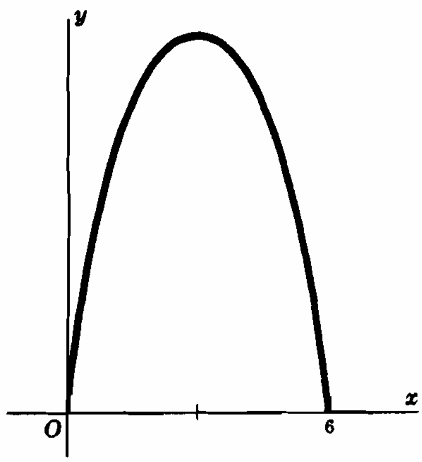


Fig. 1-1

Se dice que una función $f(x)$ está definida *en* un intervalo, cuando lo está en un punto *cualquiera* de dicho intervalo.

Si $f(x)$ es una función de x y a es un valor de su dominio de definición, la expresión $f(a)$ significa el valor numérico obtenido al sustituir x por a en $f(x)$ o sea el valor que toma $f(x)$ cuando $x = a$.

Ejemplo 4: Si $f(x) = x^3 - 4x + 2$, tendremos

$$f(1) = (1)^3 - 4(1) + 2 = 1 - 4 + 2 = -1,$$
$$f(-2) = (-2)^3 - 4(-2) + 2 = -8 + 8 + 2 = 2,$$
$$f(a) = a^3 - 4a + 2, \text{ etc.}$$

(Ver Problemas 4-13.)

UNA SUCESION INFINITA es una función de una variable (representada normalmente por n) cuyo campo de variación está formado por el conjunto de los números enteros positivos. Por ejemplo, cuando n va tomando los valores 1, 2, 3, 4, . . ., la función $\dfrac{1}{n+1}$ da lugar a la sucesión de términos $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ La sucesión se denomina *infinita* para indicar que no tiene último término.

El término $\dfrac{1}{n+1}$ de la sucesión anterior recibe el nombre de término *general* o *término enésimo.* Una sucesión se representa por su término general encerrado entre llaves $\left\{\dfrac{1}{n+1}\right\}$ o bien indicando algunos de los términos que la componen, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \dfrac{1}{n+1}, \ldots$ (Ver problemas 14-15).

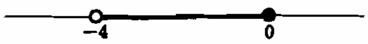
Problemas resueltos

1. Enunciar y dibujar los intervalos: (*a*) $-3 < x < 5$, (*b*) $2 \leq x \leq 6$, (*c*) $-4 < x \leq 0$, (*d*) $x > 5$, (*e*) $x \leq 2$.

(*a*) Todos los números mayores que -3 y menores que 5.

(*b*) Todos los números igual o mayor que 2 e igual o menor que 6.

(*c*) Todos los números mayores que -4 e igual o menor que 0.



Este intervalo finito que contiene a uno de sus extremos, recibe el nombre de intervalo *semiabierto.*

(*d*) Todos los números mayores que 5.

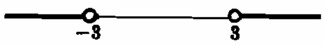
(*e*) Todos los números igual o menor que 2.

2. Enunciar y dibujar los intervalos:

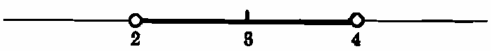
(*a*) $|x| < 2$; (*b*) $|x| > 3$; (*c*) $|x-3| < 1$; (*d*) $|x-2| < \delta$, $\delta > 0$; (*e*) $0 < |x+3| < \delta$, $\delta > 0$.

(*a*) Intervalo abierto $-2 < x < 2$.

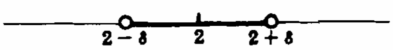
(*b*) Dos intervalos infinitos: $x < -3$ y $x > 3$.



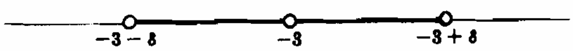
(*c*) Intervalo abierto que contiene al punto 3. Para hallar los extremos hacemos $x - 3 = 1$, con lo cual, $x = 4$ y $3 - x = 1$, de donde $x = 2$. (Hay que tener en cuenta que $|x-3| = x - 3$ ó $3 - x$ según el valor de x.) Los extremos son 2 y 4 y el intervalo es el $2 < x < 4$. Obsérvese que el intervalo está formado por todos los puntos cuya distancia a 3 sea menor que 1.



(*d*) Siendo δ un número positivo dado, el intervalo $2 - \delta < x < 2 + \delta$ está formado por todos los puntos cuya distancia a 2 sea menor que δ. Este intervalo es un *entorno* del punto 2.



(*e*) La desigualdad $|x+3| < \delta$ define el intervalo $-3 - \delta < x < -3 + \delta$ que contiene al punto -3. La condición $0 < |x+3|$ implica que $x \neq -3$. Por tanto, el campo de variación de x está formado por los dos intervalos abiertos $-3 - \delta < x < -3$ y $-3 < x < -3 + \delta$. Los dos intervalos constituyen el *entorno reducido* del punto -3.



3. Resolver las desigualdades: (*a*) $18x - 3x^2 > 0$, (*b*) $(x+3)(x-2)(x-4) < 0$, (*c*) $(x+1)^2(x-3) > 0$.

(*a*) De la igualdad $18x - 3x^2 = 3x(6-x) = 0$, se deduce, $x = 0$ y $x = 6$; a continuación, se determina el signo de $18x - 3x^2$ para los valores de x pertenecientes a los intervalos $x < 0$, $0 < x < 6$ y $x > 6$. La desigualdad se verifica para los valores de x comprendidos en el intervalo $0 < x < 6$.

(*b*) Una vez determinado el signo de $(x+3)(x-2)(x-4)$ en cada uno de los intervalos $x < -3$, $-3 < x < 2$, $2 < x < 4$ y $x > 4$, se llega a la conclusión de que la desigualdad se satisface para todos los valores de x de los intervalos $x < -3$ y $2 < x < 4$.

(*c*) Los intervalos que se deben estudiar son $x < -1$, $-1 < x < 3$ y $x > 3$. La desigualdad se cumple para $x > 3$. Obsérvese que como $(x+1)^2 > 0$ para todos los valores de x, no es preciso tenerlo en cuenta. ¿Se podría decir lo mismo del factor $(x+1)^3$?

4. Dada $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2}$, hallar $f(0), f(-1), f(2a), f(1/x), f(x+h)$.

$$f(0) = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}, \quad f(-1) = \frac{-1-1}{1+2} = -\frac{2}{3}, \quad f(2a) = \frac{2a-1}{4a^2+2},$$

$$f(1/x) = \frac{1/x-1}{1/x^2+2} = \frac{x-x^2}{1+2x^2}, \quad f(x+h) = \frac{x+h-1}{(x+h)^2+2} = \frac{x+h-1}{x^2+2hx+h^2+2}$$

5. Si $f(x) = 2^x$, demostrar que (*a*) $f(x+3) - f(x-1) = \dfrac{15}{2} f(x)$ y (*b*) $\dfrac{f(x+3)}{f(x-1)} = f(4)$.

(*a*) $f(x+3) - f(x-1) = 2^{x+3} - 2^{x-1} = 2^x(2^3 - \frac{1}{2}) = \dfrac{15}{2} f(x)$ (*b*) $\dfrac{f(x+3)}{(x-1)} = \dfrac{2^{x+3}}{2^{x-1}} = 2^4 = f(4)$.

6. Si $f(x) = \log_a 1/x$, demostrar que (*a*) $f(a^3) = -3$ y (*b*) $f(a^{-1/z}) = 1/z$.

(*a*) $f(a^3) = \log_a 1/a^3 = \log_a a^{-3} = -3$ (*b*) $f(a^{-1/z}) = \log_a 1/a^{-1/z} = \log_a a^{1/z} = 1/z$.

7. Si $f(x) = \log_a x$ y $F(z) = a^z$, demostrar que $F(f(x)) = f(F(x))$.

$F(f(x)) = F(\log_a x) = a^{\log_a x} = x = \log_a a^x = f(a^x) = f(F(x))$.

8. Determinar el campo de variación de la variable independiente x en las funciones siguientes:

(*a*) $y = \sqrt{4-x^2}$, (*b*) $y = \sqrt{x^2-16}$, (*c*) $y = \dfrac{1}{x-2}$, (*d*) $y = \dfrac{1}{x^2-9}$, (*e*) $y = \dfrac{x}{x^2+4}$.

(*a*) Como y debe ser real, $4 - x^2 \geq 0$, o sea, $x^2 \leq 4$; el campo de variación de x es el intervalo $-2 \leq x \leq 2$ o bien $|x| \leq 2$. Es decir, $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ está *definida* en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$ y solo en él.

(*b*) En este caso $x^2 - 16 \geq 0$ o bien $x^2 \geq 16$; el campo de variación de x está formado por los intervalos $x \leq -4$ y $x \geq 4$, o bien $|x| \geq 4$.

(*c*) La función está definida para todos los valores de x excepto para $x = 2$. El campo de variación de x se puede expresar por $x < 2$, $x > 2$ o por $x \neq 2$.

(*d*) La función está definida para $x \neq \pm 3$.

(*e*) Como $x^2 + 4 \neq 0$ para todo valor de x, el campo de variación de x es el conjunto de los números reales.

9. Representar gráficamente las funciones definidas por:

$f(x) = 5$ cuando $0 < x \leq 1$ $f(x) = 10$ cuando $1 < x \leq 2$
$f(x) = 15$ cuando $2 < x \leq 3$ $f(x) = 20$ cuando $3 < x \leq 4$ etc.

Determinar los campos de variación de x y de $y = f(x)$.

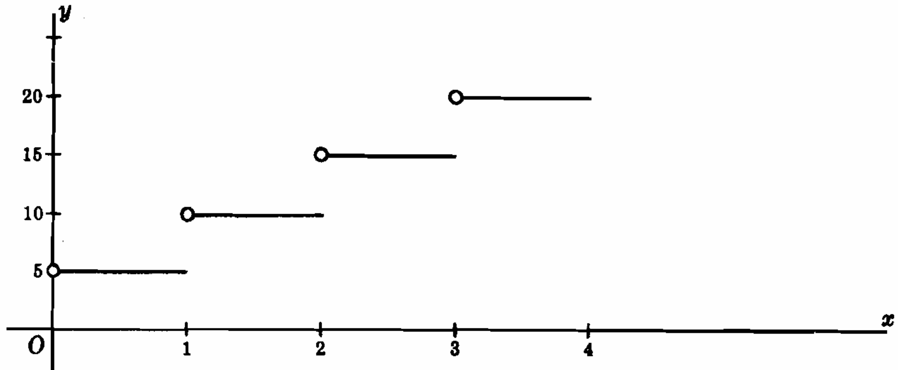


Fig. 1-2

La función $f(x)$ representa el coste (en unidades arbitrarias) de la franquicia de correos por el interior para el envío de un peso x (en unidades arbitrarias). El campo de variación de x es el intervalo $x > 0$ y el de $y = f(x)$, es el conjunto formado por los números 5, 10, 15, 20, . . .

10. Para proteger un terreno rectangular se precisaron 2 000 m de alambrada. Si una de las dimensiones es x m, expresar el área, y (m²), en función de x. Determinar el campo de variación de x.

Como una de las dimensiones es x, la otra será $\frac{1}{2}(2\,000 - 2x) = 1\,000 - x$.

El área es $y = x(1\,000 - x)$ y el campo de variación de x es $0 < x < 1\,000$.

11. Expresar la longitud l de una cuerda de una circunferencia de 8 cm de radio en función de su distancia x cm al centro de la misma. Determinar el campo de variación de x.

De la Fig. 1-3 se deduce, $\frac{1}{2}l = \sqrt{64 - x^2}$ y $l = 2\sqrt{64 - x^2}$.

El campo de variación de x es el intervalo $0 \leq x < 8$.

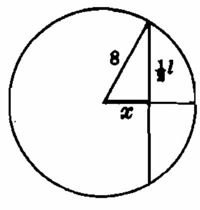


Fig. 1-3

12. En cada uno de los vértices de una placa cuadrada de estaño de 12 cm de lado, se cortan pequeños cuadrados de x cm de lado, doblándose a continuación los bordes hacia arriba para formar una caja abierta. Expresar el volumen V (cm³) en función de x y determinar el campo de variación de cada una de las variables.

La base de la caja es un cuadrado de $(12 - 2x)$ cm de lado y su altura es de x cm. El volumen, $V = x(12 - 2x)^2 = 4x(6 - x)^2$. El campo de variación de x es el intervalo $0 < x < 6$.

A medida que aumenta x, dentro de su campo de variación, también lo hace V hasta un determinado valor para luego disminuir. Así pues, de todas las cajas que se pueden construir hay una, M, de volumen máximo. Para determinar M es preciso conocer el valor de x para el cual V comienza a disminuir. Este problema se resolverá en un capítulo posterior.

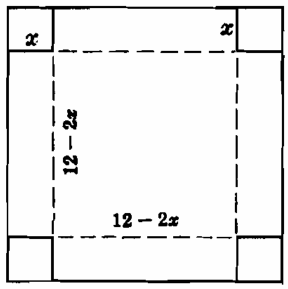


Fig. 1-4

13. Si $f(x) = x^2 + 2x$, hallar $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ e interpretar el resultado.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{[(a+h)^2 + 2(a+h)] - (a^2 + 2a)}{h}$$

$$= 2a + 2 + h$$

Sobre el gráfico de la función (Fig. 1-5) situamos los puntos P y Q cuyas abscisas respectivas son a y $(a + h)$. La ordenada de P es $f(a)$ y la de Q es $f(a + h)$. Por tanto,

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\text{diferencia de ordenadas}}{\text{diferencia de abscisas}}$$

$$= \text{pendiente de } PQ$$

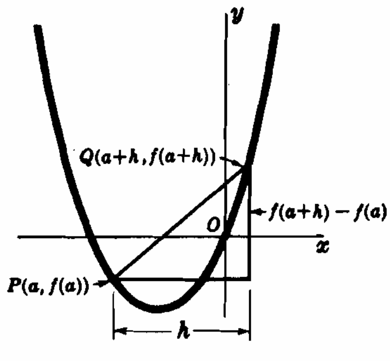


Fig. 1-5

14. Escribir los cinco primeros términos de cada una de las siguientes sucesiones:

(*a*) $\left\{1 - \frac{1}{2n}\right\}$. Tendremos $s_n = 1 - \frac{1}{2n}$; por tanto $s_1 = 1 - \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$,

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{3}{4},\quad s_3 = 1 - \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{5}{6},\quad s_4 = 1 - \frac{1}{2\cdot 4} = \frac{7}{8},$$

y $s_5 = 9/10$. Los términos pedidos son 1/2, 3/4, 5/6, 7/8, 9/10.

(*b*) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{3n-1}\right\}$ Tendremos $s_n = (-1)^2\frac{1}{3\cdot 1 - 1} = 1/2$,

$$s_2 = (-1)^3\frac{1}{3\cdot 2 - 1} = -1/5,\quad s_3 = (-1)^4\frac{1}{3\cdot 3 - 1} = 1/8,$$

$s_4 = -1/11$, $s_5 = 1/14$. Los términos pedidos son 1/2, —1/5, 1/8, —1/11, 1/14.

(*c*) $\left\{\frac{2n}{1+n^2}\right\}$. Los términos son 1, 4/5, 3/5, 8/17, 5/13.

(*d*) $\left\{(-1)^{n+1}\frac{n}{(n+1)(n+2)}\right\}$. Los términos son $\frac{1}{2\cdot 3}, \frac{-2}{3\cdot 4}, \frac{3}{4\cdot 5}, \frac{-4}{5\cdot 6}, \frac{5}{6\cdot 7}$.

(*e*) $\{\frac{1}{2}[(-1)^n + 1]\}$. Los términos son 0, 1, 0, 1, 0.

15. Escribir el término general de cada una de las siguientes sucesiones:

(*a*) 1, —1/3, 1/5, 1/7, 1/9, . . .

Los términos son los recíprocos de los números impares positivos. El término general es $\frac{1}{2n-1}$.

(*b*) 1, —1/2, 1/3, —1/4, 1/5, . . .

Prescindiendo del signo, se trata de los recíprocos de los enteros positivos. El término general es

$(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ o $(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

(*c*) 1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, ...

Los términos son los recíprocos de los cuadrados de los enteros positivos. El término general es $1/n^2$.

(*d*) $\frac{1}{2}, \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}, \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}, \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}, \ldots.$ El término general es $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n)}$.

(*e*) 1/2, —4/9, 9/28, —16/65, ...

Sin tener en cuenta el signo, los numeradores son los cuadrados de los enteros positivos, y los denominadores son los cubos de dichos enteros incrementados en una unidad. El término general es $(-1)^{n+1}\frac{n^2}{n^3+1}$.

16. Demostrar que si a y b son dos números cualesquiera, $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Consideremos los siguientes casos: (*a*) a y b ambos positivos, (*b*) a y b ambos negativos, (*c*) a y b uno positivo y otro negativo.

(*a*) Como $|a| = a$, $|b| = b$, y $a + b$ es cero o un número positivo, tendremos

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|$$

(*b*) Como $|a| = -a$, $|b| = -b$, y $a + b$ es negativo, tendremos

$$|a + b| = -(a + b) = -a + (-b) = |a| + |b|$$

(*c*) Supongamos $a > 0$ y $b < 0$; entonces $|a| = a$ y $|b| = -b$.

Si $|a| > |b|$, entonces $|a + b| = a + b < a - b = |a| + |b|$.
Si $|a| < |b|$, entonces $|a + b| = -a - b < a - b = |a| + |b|$.
Si $|a| = |b|$, entonces $|a + b| = 0 < |a| + |b|$.

Por tanto, si $a > 0$ y $b < 0$ o si $a < 0$ y $b > 0$, entonces $|a + b| < |a| + |b|$.

Problemas propuestos

17. Representar cada uno de los intervalos siguientes:

(*a*) $-5 < x < 0$ (*c*) $-2 \leqslant x < 3$ (*e*) $|x| < 3$ (*g*) $|x-2| < \frac{1}{2}$ (*i*) $0 < |x-2| < 1$ (*k*) $|x-2| \geqslant 1$
(*b*) $x \leqslant 0$ (*d*) $x \geqslant 1$ (*f*) $|x| \geqslant 5$ (*h*) $|x+3| > 1$ (*j*) $0 < |x+3| < \frac{1}{4}$

18. Si $f(x) = x^2 - 4x + 6$, hallar (*a*) $f(0)$, (*b*) $f(3)$, (*c*) $f(-2)$. *Sol.* (*a*) 6, (*b*) 3, (*c*) 18
Probar que $f(\frac{1}{2}) = f(7/2)$ y $f(2-h) = f(2+h)$.

19. Si $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, hallar (*a*) $f(0)$, (*b*) $f(1)$, (*c*) $f(-2)$. *Sol.* (*a*) -1, (*b*) 0, (*c*) 3
Probar que $f(1/x) = -f(x)$ y $f(-1/x) = -1/f(x)$.

20. Si $f(x) = x^2 - x$, demostrar que $f(x+1) = f(-x)$.

21. Si $f(x) = 1/x$, demostrar que $f(a) - f(b) = f\left(\dfrac{ab}{b-a}\right)$.

22. Si $y = f(x) = (5x+3)/(4x-5)$, demostrar que $x = f(y)$.

23. Determinar el dominio de definición de cada una de las funciones siguientes:

(*a*) $y = x^2 + 4$ (*c*) $y = \sqrt{x^2-4}$ (*e*) $y = \dfrac{2x}{(x-2)(x+1)}$ (*g*) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

(*b*) $y = \sqrt{x^2+4}$ (*d*) $y = \dfrac{x}{x+3}$ (*f*) $y = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ (*h*) $y = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$.

Sol. (*a*), (*b*), (*g*) todos los valores de x; (*c*) $|x| \geqslant 2$; (*d*) $x \neq -3$; (*e*) $x \neq -1, 2$; (*f*) $-3 < x < 3$; (*h*) $0 \leqslant x < 2$

24. Hallar $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, siendo: (*a*) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ para $a \neq 2$, $a + h \neq 2$; (*b*) $f(x) = \sqrt{x-4}$ para $a \geqslant 4$, $a + h \geqslant 4$; (*c*) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ para $a \neq -1$, $a + h \neq -1$.

Sol. (*a*) $\dfrac{-1}{(a-2)(a+h-2)}$, (*b*) $\dfrac{1}{\sqrt{a+h-4} + \sqrt{a-4}}$, (*c*) $\dfrac{1}{(a+1)(a+h+1)}$

25. Escribir los cinco primeros términos de cada una de las sucesiones.

(*a*) $\left\{1 + \dfrac{1}{n}\right\}$ (*c*) $\{a + (n-1)d\}$ (*e*) $\left\{\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}\right\}$ (*g*) $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{n!}{n^n}\right\}$

(*b*) $\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$ (*d*) $\{(-1)^{n+1}ar^{n-1}\}$ (*f*) $\left\{\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}\right\}$ (*h*) $\left\{\dfrac{(2n)!}{3^n 5^{n-1}}\right\}$

Sol. (*a*) 2, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5
(*b*) 1/2, 1/6, 1/12, 1/20, 1/30
(*c*) a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$
(*d*) a, $-ar$, ar^2, $-ar^3$, ar^4
(*e*) $1/\sqrt{2}$, $2/\sqrt{5}$, $3/\sqrt{10}$, $4/\sqrt{17}$, $5/\sqrt{26}$
(*f*) $\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, 2/3, $\frac{1}{4}\sqrt{5}$, $\sqrt{6}/5$
(*g*) 1, $-1/2$, 2/9, $-3/32$, 24/625
(*h*) $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{2^3}{3 \cdot 5}$, $\dfrac{2^4}{3 \cdot 5}$, $\dfrac{7 \cdot 2^7}{3^2 \cdot 5^2}$, $\dfrac{7 \cdot 2^8}{3 \cdot 5^2}$

26. Escribir el término general de cada una de las sucesiones.

(*a*) 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, . . .
(*b*) 1/2, $-1/6$, 1/12, $-1/20$, 1/30, . . .
(*c*) 1/2, 1/12, 1/30, 1/56, 1/90, . . .
(*d*) $1/5^3$, $3/5^5$, $5/5^7$, $7/5^9$, $9/5^{11}$, . . .
(*e*) $1/2!$, $-1/4!$, $1/6!$, $-1/8!$, $1/10!$, . . .

Sol. (*a*) $\dfrac{n}{n+1}$, (*b*) $(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2+n}$, (*c*) $\dfrac{1}{(2n-1)2n}$, (*d*) $\dfrac{2n-1}{5^{2n+1}}$, (*e*) $(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n)!}$

27. «Siempre que $|x-4| < 1$, $|f(x)| > 1$» significa: «siempre que x esté comprendido entre 3 y 5, $f(x)$ es menor que -1, o bien mayor que $+1$». Interpretar las siguientes expresiones:

(*a*) Siempre que $|x-1| < 2$, $f(x) < 10$.
(*b*) Siempre que $|x-5| < 2$, $f(x) > 0$.
(*c*) Siempre que $0 < |x-6| < 1$, $f(x) > 0$.
(*d*) Siempre que $|x-3| < 2$, $|f(x) - 9| < 4$.

28. Dibujar la función $y = f(x) = 6x - x^2$ y determinar cuál de las expresiones (*a*) — (*d*) del Problema 27 son verdaderas o falsas. *Sol.* (*b*) es falsa.

29. Demostrar que, siendo a y b dos números cualesquiera: $|a \pm b| = |b \pm a|$; $|ab| = |a| \cdot |b|$; $|a/b| = |a| / |b|$, $b \neq 0$; $|a+b| \geq |a| - |b|$; $|a-b| \leq |a| + |b|$; $|a-b| \geq |a| - |b|$.

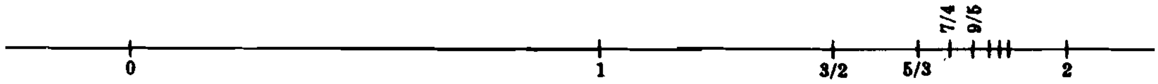
Capítulo 2

Límites

LIMITE DE UNA SUCESION. Si se sitúan sobre una escala numérica los puntos correspondientes a los términos de la sucesión

$$1,\ 3/2,\ 5/3,\ 7/4,\ 9/5,\ \ldots,\ 2-1/n,\ \ldots \qquad (1)$$

se observa que se van aproximando al punto 2 de manera que existen puntos de la sucesión cuya distancia a 2 es menor que cualquier cantidad dada por pequeña que sea. Por ejemplo, el pun-



to 2 001/1 001 y todos los siguientes distan de 2 una cantidad menor que 1/1 000; el punto 20 000 001/10 000 001 y todos los siguientes distan de 2 una cantidad menor que 1/10 000 000, y así sucesivamente. Estas condiciones se expresan diciendo que *el límite de la sucesión es* 2.

Si x es una variable cuyo campo de variación es la sucesión (*1*) se dice que x *se aproxima al límite* 2, o bien que x *tiende a* 2, y se representa por $x \to 2$.

La sucesión (*1*) no contiene a su límite 2. Sin embargo, la sucesión 1, 1/2, 1, 3/4, 1, 5/6, 1, . . ., en la que todos los términos impares son iguales a 1, tiene por límite 1. Por tanto, una sucesión puede o no contener a su propio límite. Sin embargo, como se verá más adelante, decir que $x \to a$ implica $x \neq a$, esto es, *se sobrentenderá que cualquier sucesión dada no contiene a su límite como término.*

LIMITE DE UNA FUNCION. Si $x \to 2$ según la sucesión (*1*), $f(x) = x^2 \to 4$ según la sucesión 1, 9/4, 25/9, 49/16, . . ., $(2 - 1/n)^2$, . . . Ahora bien, si $x \to 2$ según la sucesión

$$2{,}1;\ 2{,}01;\ 2{,}001;\ 2{,}0001;\ \ldots;\ 2 + 1/10^n;\ \ldots \qquad (2)$$

$x^2 \to 4$ según la sucesión 4,41; 4,0401; 4,004001; . . ., $(2 + 1/10^n)^2$; . . . Parece razonable esperar que x^2 tiende a 4 siempre que x tienda a 2. En estas condiciones se establece que «el límite de x^2 cuando x tiende a 2 es igual a 4», y se representa por el simbolismo $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

(Ver Problemas 1-2.)

LIMITES POR LA DERECHA Y POR LA IZQUIERDA. Cuando $x \to 2$ según la sucesión (*1*), cada término es siempre menor que 2. Se expresa diciendo que x *tiende a* 2 *por la izquierda,* y se representa por $x \to 2^-$. Análogamente, cuando $x \to 2$ según la sucesión (*2*), cada término es siempre mayor que 2. Se expresa diciendo que x *tiende a* 2 *por la derecha* y se representa por $x \to 2^+$. Es evidente que la existencia del $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ implica la del *límite por la izquierda* $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y la del *límite por la derecha* $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, y que ambos son iguales. Sin embargo, la existencia del límite por la derecha (izquierda) no implica necesariamente la existencia del límite por la izquierda (derecha).

Ejemplo 1:

Sea la función $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$. El dominio de definición es el intervalo $-3 \leq x \leq 3$. Si a es un número cualquiera del intervalo abierto $-3 < x < 3$, $\lim_{x \to a} \sqrt{9 - x^2}$ existe y es igual a $\sqrt{9 - a^2}$. Considérese ahora que $a = 3$. Si x tiende a 3 por la izquierda, $\lim_{x \to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0$, y si x tiende a 3 por la derecha, $\lim_{x \to 3^+} \sqrt{9 - x^2}$ no existe, puesto que para $x > 3$, $\sqrt{9 - x^2}$ es un número imaginario. Por tanto, no existe $\lim_{x \to 3} \sqrt{9 - x^2}$.

Análogamente, $\lim_{x \to -3^+} \sqrt{9 - x^2}$ existe y es igual a 0; sin embargo, no existen ni $\lim_{x \to -3^-} \sqrt{9 - x^2}$ ni $\lim_{x \to -3} \sqrt{9 - x^2}$.

TEOREMAS SOBRE LIMITES.

I. Si $f(x) = c$, constante, tendremos $\lim_{x \to a} f(x) = c$.

Si $\lim_{x \to a} f(x) = A$ y $\lim_{x \to a} g(x) = B$, resulta:

II. $\lim_{x \to a} k \cdot f(x) = kA$, siendo k una constante.

III. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = A \pm B.$

IV. $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = A \cdot B.$

V. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \dfrac{A}{B}$, siempre que $B \neq 0$.

VI. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}$, siempre que $\sqrt[n]{A}$ sea un número real.

INFINITO. Sea el campo de variación de la variable x la sucesión $s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots, s_n, \ldots$ En estas condiciones se establece:

(i) *x tiende a más infinito* $[x \to +\infty]$ si a partir de un determinado término, éste y todos los que le siguen, son mayores que cualquier número positivo dado, por grande que éste sea. Por ejemplo, $x \to +\infty$ en la sucesión $1, 2, 3, 4, \ldots$

(ii) *x tiende a menos infinito* $[x \to -\infty]$ si a partir de un determinado término, éste y todos los que le siguen son menores que cualquier número negativo dado, por pequeño que éste sea. Por ejemplo, $x \to -\infty$ en la sucesión $-2, -4, -6, -8, \ldots$

(iii) *x tiende a infinito* $[x \to \infty]$ si $|x| \to +\infty$, esto es, $x \to +\infty$, o bien, $x \to -\infty$.

Se dice que una función $f(x)$ *tiende a más infinito* cuando $x \to a$, $\left[\lim_{x \to a} f(x) = +\infty\right]$, si cuando x se aproxima a a (sin tomar el valor a), $f(x)$ se mantiene, a partir de un determinado término en adelante, superior a un número positivo dado, por grande que éste sea.

Se dice que una función $f(x)$ *tiende a menos infinito* cuando $x \to a$, $\left[\lim_{x \to a} f(x) = -\infty\right]$, si cuando x se aproxima a a (sin tomar el valor a), $f(x)$ se mantiene, a partir de un determinado término en adelante, inferior a un número negativo dado, por pequeño que éste sea.

Se dice que una función $f(x)$ *tiende a infinito* cuando $x \to a$, $\left[\lim_{x \to a} f(x) = \infty\right]$, si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

Ejemplo 2:

(*a*) Cuando $x \to 2$ según la sucesión (*1*), $f(x) = \dfrac{1}{2-x} \to +\infty$ según la sucesión 1, 2, 3, 4, $\cdots$ En general, si $x \to 2^-$, $\dfrac{1}{2-x} \to +\infty$ y se escribe, $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{2-x} = +\infty$.

(*b*) Cuando $x \to 2$ según la sucesión (*2*), $f(x) = \dfrac{1}{2-x} \to -\infty$ según la sucesión $-10, -100, -1\,000, -10\,000, \cdots$ En general, si $x \to 2^+$, $\dfrac{1}{2-x} \to -\infty$ y se escribe $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{2-x} = -\infty$.

(*c*) Cuando $x \to 2$ según (*1*) y (*2*), $|f(x)| = \left|\dfrac{1}{2-x}\right| \to +\infty$ y se escribe $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{x-2} = \infty$.

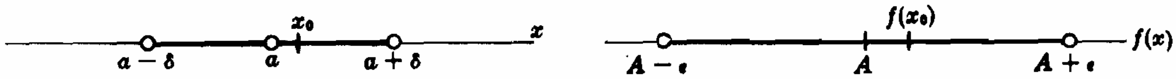
Nota. Los símbolos $+\infty$, $-\infty$, ∞ *no* deben considerarse como nuevos números a añadir al conjunto de los números reales, sino que se utilizan para indicar un cierto comportamiento de una variable o de una función. Cuando una variable o el valor de una función aumenta constantemente sin llegar a alcanzar nunca un determinado valor M el límite de dicha variable o función será M o un número inferior a él. Cuando no existe tal número M, se dice que la variable o función tiende a infinito. En este último caso *no existe límite*; la designación de límite se sigue empleando solo por conveniencia.

(Ver Problemas 3-12.)

LA DEFINICION $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ se ha establecido estudiando el comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to a$ según varias sucesiones. En todos los casos se dedujo que $f(x) \to A$, por lo que se puede pensar que a este mismo resultado se habría llegado (sin comprobar) para todas las sucesiones que tengan por límite a. Ahora bien, cuando $x \to a$ según cada una de las sucesiones quiere decir que el valor de x se aproxima a a. La noción fundamental del concepto de límite es la de que siempre que x se aproxime a a, sin llegar nunca a alcanzar este valor, $f(x)$ se aproxima a A. Este hecho se puede establecer en términos más precisos, en la forma siguiente:

A. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ si dado un número positivo ϵ tan pequeño como se quiera, existe otro número positivo δ tal que cuando $0 < |x - a| < \delta$ se verifica $|f(x) - A| < \epsilon$.

Estas dos desigualdades establecen los intervalos:



(i) **Fig. 2-1** (ii)

De aquí resulta otra forma de establecer la esencia del concepto de límite: fijado el número ϵ [con lo cual queda definido el intervalo (ii)], se puede encontrar un número δ [y determinar el intervalo (i),] de forma que, siempre que $x \neq a$ en el intervalo (i), por ejemplo x_0, $f(x)$ esté contenido en el intervalo (ii).

Ejemplo 3:

Utilizando la definición de límite, demostrar que $\lim\limits_{x\to 2} (x^2 + 3x) = 10$.

Elegido un valor de ϵ, se debe encontrar un $\delta > 0$ de forma que, siempre que $0 < |x-2| < \delta$, se verifique, $|(x^2+3x) - 10| < \epsilon$. Observemos que si $0 < |x-2| < \lambda < 1$, también se verificará $|x-2|^n < \lambda$ para cualquier valor positivo de n. Por tanto,

$$|(x^2+3x) - 10| \;=\; |(x-2)^2 + 7(x-2)| \;\leqslant\; |x-2|^2 + 7\,|x-2| \;<\; \lambda + 7\lambda \;=\; 8\lambda$$

Ahora bien, para que $8\lambda < \epsilon$ basta con que $\lambda < \epsilon/8$. Por consiguiente, dado el número ϵ, se puede encontrar un δ, menor que $\epsilon/8$, que satisface la condición de límite.

(Ver Problemas 13-14.)

OTROS TIPOS DE LIMITES.

B. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ si dado un número positivo M, *tan grande como se quiera*, existe otro δ tal que, para $0 < |x-a| < \delta$ se verifica $|f(x)| > M$.

Cuando $f(x) > M$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$; si $f(x) < -M$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

C. $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$ si dado un número positivo ϵ, *tan pequeño como se quiera*, existe un número positivo M tal que, para $|x| > M$, se verifica $|f(x) - A| < \epsilon$.

D. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ si dado un número positivo M, *tan grande como se quiera*, existe un número positivo P tal que, para $|x| > P$, se verifica $|f(x)| > M$.

(Ver Problema 15.)

Cuando existen los límites, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)$, son válidos todos los teoremas de este capítulo. Sin embargo, estos teoremas no se pueden aplicar cuando $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ o cuando $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Por ejemplo, $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{1-x} = \infty$ y $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x^2} = \infty$, pero $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{1-x}\Big/\dfrac{1}{1-x^2}\right) = \lim_{x\to 1} x(1+x) = 2$. Igualmente, $\lim_{x\to+\infty} (x^2+5) = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} (2-x^2) = -\infty$ pero $\lim_{x\to+\infty} \{(x^2+5)+(2-x^2)\} = \lim_{x\to+\infty} 7 = 7$.

Problemas resueltos

1. Calcular el límite de las sucesiones siguientes:

(*a*) 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ...
(*b*) 1, 1/4, 1/9, 1/16, 1/25, ...
(*c*) 2, 5/2, 8/3, 11/4, 14/5, ...
(*d*) 5, 4, 11/3, 7/2, 17/5, ...
(*e*) 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32,...
(*f*) 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; 0,99999;...

(*a*) El término general es $1/n$. A medida que n toma los valores 1, 2, 3, 4 ..., va disminuyendo $1/n$ pero conservándose siempre positivo. El límite es 0.
(*b*) El término general es $(1/n)^2$; el límite es 0.
(*c*) El término general es $3 - 1/n$; el límite es 3.
(*d*) El término general es $3 + 2/n$; el límite es 3.
(*e*) El término general es $1/2^n$; como en (*a*), el límite es 0.
(*f*) El término general es $1 - 1/10^n$; el límite es 1.

2. Calcular el límite de $y = x + 2$, siendo x los términos de cada una de las sucesiones del Problema 1.

(*a*) $y \to 2$ según la sucesión 3, 5/2, 7/3, 9/4, 11/5, ..., $2 + 1/n$, ...
(*b*) $y \to 2$ según la sucesión 3, 9/4, 19/9, 33/16, 51/25, ..., $2 + 1/n^2$, ...
(*c*) $y \to 5$ según la sucesión 4, 9/2, 14/3, 19/4, 24/5, ..., $5 - 1/n$, ...
(*d*) $y \to 5$ según la sucesión 7, 6, 17/3, 11/2, 27/5, ..., $5 + 2/n$, ...
(*e*) $y \to 2$ según la sucesión 5/2, 9/4, 17/8, 33/16, 65/32, ..., $2 + 1/2^n$, ...
(*f*) $y \to 3$ según la sucesión 2,9; 2,99; 2,999; 2,9999; ...; $3 - \dfrac{1}{10^n}$; ...

3. Calcular:

(*a*) $\lim_{x\to 2} 5x = 5\lim_{x\to 2} x = 5\cdot 2 = 10$

(*b*) $\lim_{x\to 2} (2x+3) = 2\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 3 = 2\cdot 2 + 3 = 7$

(*c*) $\lim_{x\to 2} (x^2 - 4x + 1) = 4 - 8 + 1 = -3$

(*d*) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{\lim_{x\to 3}(x-2)}{\lim_{x\to 3}(x+2)} = \dfrac{1}{5}$

(*e*) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x^2+4} = \dfrac{4-4}{4+4} = 0$

(*f*) $\lim_{x\to 4} \sqrt{25-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 4}(25-x^2)} = \sqrt{9} = 3$

Nota. Del resultado de estos problemas no se debe sacar la conclusión de que $\lim_{x\to a} f(x)$ es invariablemente $f(a)$. El término $f(a)$ significa el valor de $f(x)$ *cuando* $x = a$, y, se ha visto en el primer párrafo del Capítulo, que cuando $x \to a$, la variable x *nunca llega a ser* igual a a.

4. Hallar el límite de $f(x) = (-1)^x$ siendo x los términos de las sucesiones

$$(a)\ \ 1/3,\ 1/5,\ 1/7,\ 1/9,\ \ldots \ \text{y}\ (b)\ \ 2/3,\ 2/5,\ 2/7,\ 2/9,\ \ldots$$

¿Qué se puede decir acerca de $\lim_{x\to 0} (-1)^x$ y $f(0)$?

(a) $(-1)^x \to -1$ en la sucesión $-1, -1, -1, -1, \ldots$
(b) $(-1)^x \to +1$ en la sucesión $+1, +1, +1, +1, \ldots$

Como $(-1)^x$ tiende hacia límites distintos cuando x toma los valores de las dos sucesiones, $\lim_{x\to 0} (-1)^x$ no existe; $f(0) = (-1)^0 = +1$.

5. Hallar:

(a) $$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x+3)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{7}$$

La división por $(x - 4)$, antes del paso al límite, es válida, porque como se ha dicho, cuando $x \to 4$ es $x \neq 4$; por tanto, $x - 4$ nunca es igual a cero.

(b) $$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2+3x+9}{x+3} = \frac{9}{2}$$

(c) $$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$$

Aquí, y también en los Problemas 7 y 8, h es una variable y, por ello, se podría pensar en una función de dos variables. Sin embargo, el que x sea una variable no juega papel alguno en estos problemas, de forma que se puede considerar a x como una constante, es decir, un valor particular de su campo de variación. El fundamento de este problema, como se verá en el Capítulo 4, es que si x es un valor cualquiera, como por ejemplo $x = x_0$, en el dominio de $y = x^2$, se verifica

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} \quad \text{es siempre igual al doble del valor de } x.$$

(d) $$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})} = \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$$
$$= \lim_{x\to 2} (3+\sqrt{x^2+5}) = 6$$

(e) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x-1} = \infty\text{; no existe límite.}$$

6. Hallar los siguientes límites, dividiendo el numerador y denominador por la potencia mayor de x en la fracción, teniendo en cuenta luego que $\lim_{x\to\infty} 1/x = 0$.

(a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{9x+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-2/x}{9+7/x} = \frac{3-0}{9+0} = \frac{1}{3}$$

(b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{6x^2+2x+1}{6x^2-3x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{6+2/x+1/x^2}{6-3/x+4/x^2} = \frac{6+0+0}{6-0+0} = 1$$

(c) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-2}{4x^3-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x+1/x^2-2/x^3}{4-1/x^3} = \frac{0}{4} = 0$$

(d) $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1/x+1/x^3} = \infty\text{; no existe límite.}$$

7. Dada $f(x) = x^2 - 3x$, hallar $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Como $f(x) = x^2 - 3x$, $f(x+h) = (x+h)^2 - 3(x+h)$ y

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+2hx+h^2-3x-3h)-(x^2-3x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2-3h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (2x+h-3) = 2x-3$$

8. Dada $f(x) = \sqrt{5x+1}$, hallar $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para $x > -1/5$.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5x+5h+1}-\sqrt{5x+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5x+5h+1}-\sqrt{5x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1}}{\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(5x+5h+1)-(5x+1)}{h(\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5}{\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1}} = \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}
\end{aligned}$$

9. En las funciones siguientes, determinar los puntos $x = a$ para los cuales se anula el denominador, y calcular el límite de y cuándo $x \to a^-$ y $x \to a^+$.

(*a*) $y = f(x) = 2/x$. El denominador es cero para $x = 0$. Cuando $x \to 0^-$, $y \to -\infty$; cuando $x \to 0^+$, $y \to +\infty$.

(*b*) $y = f(x) = \dfrac{x-1}{(x+3)(x-2)}$. El denominador es cero para $x = -3$ y $x = 2$. Cuando $x \to -3^-$, $y \to -\infty$; cuando $x \to -3^+$, $y \to +\infty$. Cuando $x \to 2^-$, $y \to -\infty$; cuando $x \to 2^+$, $y \to +\infty$.

(*c*) $y = f(x) = \dfrac{x-3}{(x+2)(x-1)}$. El denominador es cero para $x = -2$ y $x = 1$. Cuando $x \to -2^-$, $y \to -\infty$; cuando $x \to -2^+$, $y \to +\infty$. Cuando $x \to 1^-$, $y \to +\infty$; cuando $x \to 1^+$, $y \to -\infty$.

(*d*) $y = f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-3)^2}$. El denominador es cero para $x = 3$. Cuando $x \to 3^-$, $y \to +\infty$; cuando $x \to 3^+$, $y \to +\infty$.

(*e*) $y = f(x) = \dfrac{(x+2)(1-x)}{x-3}$. El denominador es cero para $x = 3$. Cuando $x \to 3^-$, $y \to +\infty$; cuando $x \to 3^+$, $y \to +\infty$. mal

10. Estudiar (*a*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{3+2^{1/x}}$, (*b*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$.

(*a*) Sea $x \to 0^-$; entonces $1/x \to -\infty$, $2^{1/x} \to 0$, y $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{3+2^{1/x}} = 1/3$.

Sea $x \to 0^+$; entonces $1/x \to +\infty$, $2^{1/x} \to +\infty$, y $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{3+2^{1/x}} = 0$.

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{3+2^{1/x}}$ no existe.

(*b*) Sea $x \to 0^-$; entonces $2^{1/x} \to 0$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}} = \dfrac{1}{3}$.

Sea $x \to 0^+$. Para $x \neq 0$, $\dfrac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}} = \dfrac{2^{-1/x}+1}{3\cdot 2^{-1/x}+1}$ y como $\lim\limits_{x\to 0^+} 2^{-1/x} = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2^{-1/x}+1}{3\cdot 2^{-1/x}+1} = 1$.

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+2^{1/x}}{3+2^{1/x}}$ no existe.

11. Estudiar el límite de cada una de las funciones del Problema 9 cuando $x \to -\infty$ y cuando $x \to +\infty$.

(*a*) Cuando $|x|$ es grande, $|y|$ es pequeño.
Para $x = -1\,000$, $y < 0$; cuando $x \to -\infty$, $y \to 0^-$. Para $x = +1\,000$, $y > 0$; cuando $x \to +\infty$, $y \to 0^+$.

(*b*), (*c*) Igual que en (*a*).

(*d*) Cuando $|x|$ es grande, $|y|$ es aproximadamente 1.
Para $x = -1\,000$, $y < 1$; cuando $x \to -\infty$, $y \to 1^-$. Para $x = +1\,000$, $y > 1$; cuando $x \to +\infty$, $y \to 1^+$.

(*e*) Cuando $|x|$ es grande, $|y|$ es grande.
Para $x = -1\,000$, $y > 0$; cuando $x \to -\infty$, $y \to +\infty$. Para $x = +1\,000$, $y < 0$; cuando $x \to +\infty$, $y \to -\infty$.

12. Estudiar el límite de la función del Problema 9 del Capítulo 1 cuando $x \to a^-$ y cuando $x \to a^+$ siendo a un número cualquiera entero y positivo:

Consideremos $a = 2$. Si $x \to 2^-$ según la sucesión (*1*), $f(x) \to 10$ según la sucesión 5, 10, 10, 10, ...; si $x \to 2^+$ según la sucesión (*2*), $f(x) \to 15$. Por tanto, no existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ni tampoco $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

13. Aplicando la definición de límite, probar que:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 1} (4x^3 + 3x^2 - 24x + 22) = 5$, (*b*) $\lim\limits_{x \to -1} (-2x^3 + 9x + 4) = -3$

(*a*) Dado un ϵ, para $0 < |x - 1| < \lambda < 1$,

$$\begin{aligned} |(4x^3 + 3x^2 - 24x + 22) - 5| &= |4(x-1)^3 + 15x^2 - 36x + 21| = |4(x-1)^3 + 15(x-1)^2 - 6(x-1)| \\ &\leqslant 4|x-1|^3 + 15|x-1|^2 + 6|x-1| \\ &< 4\lambda + 15\lambda + 6\lambda = 25\lambda \end{aligned}$$

Para que $|(4x^3 + 3x^2 - 24x + 22) - 5| < \epsilon$, basta con que $\lambda < \epsilon/25$; por consiguiente, dado un ϵ existe un δ menor que $\epsilon/25$, que satisface la condición de límite.

(*b*) Dado un ϵ, para $0 < |x + 1| < \lambda < 1$,

$$\begin{aligned} |(-2x^3 + 9x + 4) + 3| &= |-2(x+1)^3 + 6(x+1)^2 + 3(x+1)| \\ &\leqslant 2|x+1|^3 + 6|x+1|^2 + 3|x+1| < 11\lambda \end{aligned}$$

por lo que, dado un ϵ, existe un δ, menor que $\epsilon/11$, que satisface la condición de límite.

14. Siendo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, probar que

(*a*) $\lim\limits_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = A + B$, (*b*) $\lim\limits_{x \to a} \{f(x) \cdot g(x)\} = AB$, (*c*) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, $B \neq 0$

Como $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, de la definición de límite se deduce que dados los números $\epsilon_1 > 0$ y $\epsilon_2 > 0$, tan pequeños como se quiera, existen dos valores $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$, o tales que:

(i) para $0 < |x - a| < \delta_1$ es $|f(x) - A| < \epsilon_1$, y

(ii) para $0 < |x - a| < \delta_2$ es $|g(x) - B| < \epsilon_2$.

Si se elige un número λ menor que δ_1 y δ_2, se verificará

(iii) para $0 < |x - a| < \lambda$ que $|f(x) - A| < \epsilon_1$ y $|g(x) - B| < \epsilon_2$.

(*a*) Elegido un valor de ϵ, se necesita un $\delta > 0$ tal que para $0 < |x - a| < \delta$, se verifique $|\{f(x) + g(x)\} - \{A+B\}| < \epsilon$.

Ahora bien, $|\{f(x) + g(x)\} - \{A + B\}| = |\{f(x) - A\} + \{g(x) - B\}| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B|$. De (iii) $|f(x) - A| < \epsilon_1$ siempre que $0 < |x - a| < \lambda$ y $|g(x) - A| < \epsilon_2$ siempre que $0 < |x - a| < \lambda$, siendo λ menor que δ_1 y δ_2. Por tanto,

$$|\{f(x) + g(x)\} - \{A + B\}| < \epsilon_1 + \epsilon_2 \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \lambda$$

Tomando $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{1}{2}\epsilon$ y $\delta = \lambda$ se tiene,.

$$|\{f(x) + g(x)\} - \{A + B\}| < \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon = \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

(*b*) Elegido un ϵ, se debe encontrar un δ tal que

$$\text{siempre que } 0 < |x - a| < \delta \text{ se verifique } |f(x) \cdot g(x) - AB| < \epsilon$$

Ahora bien $|f(x) \cdot g(x) - AB| = |\{f(x) - A\} \cdot \{g(x) - B\} + B\{f(x) - A\} + A\{g(x) - B\}|$
$\leqslant |f(x) - A| \cdot |g(x) - B| + |B| \cdot |f(x) - A| + |A| \cdot |g(x) - B|$

Por tanto, de (iii), $|f(x) \cdot g(x) - AB| < \epsilon_1\epsilon_2 + |B|\,\epsilon_1 + |A|\,\epsilon_2$ siempre que $0 < |x - a| < \lambda$.

Tomando ϵ_1 y ϵ_2 de forma que $\epsilon_1\,\epsilon_2 < \frac{1}{3}\epsilon$, $\epsilon_1 < \dfrac{1}{3}\dfrac{\epsilon}{|B|}$ y $\epsilon_2 < \dfrac{1}{3}\dfrac{\epsilon}{|A|}$ se satisfagan simultáneamente y $\delta = \lambda$ se tiene,

$$|f(x) \cdot g(x) - AB| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

(*c*) Como $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$, como se ha visto en (*b*), hay que demostrar que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{B}, B \neq 0$.
Elegido un ϵ, se debe encontrar un δ tal que

$$\text{siempre que } 0 < |x-a| < \delta \text{ se verifique } \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \epsilon.$$

$$\text{Ahora bien } \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B-g(x)}{B\cdot g(x)}\right| = \frac{|g(x)-B|}{|B|\cdot|g(x)|} = \frac{|g(x)-B|}{|B|}\cdot\frac{1}{|g(x)|}. \text{ De (ii),}$$

$$|g(x)-B| < \epsilon_2 \text{ siempre que } 0 < |x-a| < \delta_2$$

Como la función objeto de estudio es $\dfrac{1}{g(x)}$ hay que asegurarse de que δ_2 es suficientemente pequeño para que en el intervalo $a-\delta_2 < x < a+\delta_2$ no exista una raíz de $g(x)=0$. Sea $\delta_3 \leq \delta_2$ un valor que satisfaga a esta condición, de forma que $|g(x)-B| < \epsilon_2$ y $|g(x)| > 0$ en $0 < |x-a| < \delta_3$. Ahora bien, si $|g(x)| > 0$ en este intervalo, se verificará $|g(x)| > b > 0$ y $\dfrac{1}{|g(x)|} < \dfrac{1}{b}$ en el mismo intervalo. Por tanto,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \frac{\epsilon_2}{|B|}\cdot\frac{1}{b} \text{ siempre que } 0 < |x-a| < \delta_3$$

Tomando $\epsilon_2 < \epsilon b\,|B|$ y $\delta = \delta_3$, se verificará $\dfrac{\epsilon_2}{|B|\cdot b} < \epsilon$ y en consecuencia,

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |x-a| < \delta$$

15. Demostrar que: (*a*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{(x-2)^3} = \infty$, (*b*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+1} = 1$, (*c*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x-1} = \infty$.

(*a*) Elegido un M, para todos los valores de x del intervalo $0 < |x-2| < \delta$,

$$\left|\frac{1}{(x-2)^3}\right| > \frac{1}{\delta^3}. \quad \text{Por tanto } \left|\frac{1}{(x-2)^3}\right| > M \text{ cuando } \frac{1}{\delta^3} > M \text{ o bien } \delta < \frac{1}{\sqrt[3]{M}}.$$

(*b*) Elegido un ϵ, para todos los valores de x tales que $|x| > M$, $\left|\dfrac{x}{x+1} - 1\right| = \dfrac{1}{|x+1|} \leq \dfrac{1}{|x|-1} < \dfrac{1}{M-1}$.

Por tanto $\left|\dfrac{x}{x+1} - 1\right| < \epsilon$ cuando $\dfrac{1}{M-1} < \epsilon$ o $M > 1 + \dfrac{1}{\epsilon}$.

(*c*) Elegido un M suficientemente grande, para todos los valores de x tales que $|x| > P > 1$,

$$\left|\frac{x^2}{x-1}\right| \geq \frac{x^2}{|x|+1} > \frac{x^2}{2|x|} = \frac{1}{2}|x| > \frac{1}{2}P. \quad \text{Por tanto } \left|\frac{x^2}{x-1}\right| > M \text{ cuando } P > 2M.$$

Problemas propuestos

16. Estudiar el límite de $y = 2x+1$ cuando x toma los valores de los términos de las sucesiones del Problema 1.

Sol. (*a*) $y\to 1$, (*b*) $y\to 1$, (*c*) $y\to 7$, (*d*) $y\to 7$, (*e*) $y\to 1$, (*f*) $y\to 3$

17. Calcular:

(*a*) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4x)$

(*b*) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+2x^2-3x-4)$

(*c*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(3x-1)^2}{(x+1)^3}$

(*d*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

(*e*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x^2-1}$

(*f*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$

(*g*) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$

(*h*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$

(*i*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

(*j*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2-4}$

(*k*) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(*l*) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$

Sol. (*a*) -4; (*b*) 0; (*c*) $\frac{1}{2}$; (*d*) 0; (*e*) $\frac{1}{3}$; (*f*) -4; (*g*) $\frac{1}{2}$; (*h*) $\frac{1}{4}$; (*i*) 0; (*j*) ∞, no existe límite; (*k*) $3x^2$; (*l*) 2

18. Calcular:

(*a*) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{4x-5}$ (*c*) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+5}$ (*e*) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+3}{x^2+5x+6}$ (*g*) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

(*b*) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+1}{6+x-3x^2}$ (*d*) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+5x+6}{x+1}$ (*f*) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

Sol. (*a*) $\frac{1}{2}$; (*b*) $-2/3$; (*c*) 0; (*d*) ∞, no existe límite; (*e*) 0; (*f*) 1; (*g*) -1

19. Hallar $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ para cada una de las funciones del Problema 24, Capítulo 1.

Sol. (*a*) $\dfrac{-1}{(a-2)^2}$, (*b*) $\dfrac{1}{2\sqrt{a-4}}$, (*c*) $\dfrac{1}{(a+1)^2}$

20. Estudiar el $\lim_{x\to\infty} \dfrac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n}$, siendo $a_0b_0 \neq 0$ y m, n dos números positivos enteros, cuando (*a*) $m > n$, (*b*) $m = n$, (*c*) $m < n$. *Sol.* (*a*) no existe límite; (*b*) a_0/b_0; (*c*) 0

21. Hallar el límite de $f(x) = |x|$ cuando $x \to 0$.
Ind. Estudiar $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. *Sol.* $\lim_{x\to 0} |x| = 0$

22. Hallar el límite de $\begin{cases} f(x) = x, & x > 0 \\ f(x) = x+1, & x \leq 0 \end{cases}$ cuando $x \to 0$.
Sol. $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

23. (*a*) Aplicando el Teorema IV y el método matemático de inducción completa, demostrar que

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n, \text{ siendo } n \text{ un número entero y positivo}$$

(*b*) Aplicando el Teorema III y el método de inducción completa, demostrar que

$$\lim_{x\to a} \{f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)\} = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x) + \ldots + \lim_{x\to a} f_n(x)$$

24. Aplicando el Teorema II y los resultados del Problema 23, demostrar que

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a), \text{ siendo } P(x) \text{ un polinomio en } x.$$

25. Siendo $f(x) = 5x - 6$, encontrar un $\delta > 0$ tal que siempre que $0 < |x-4| < \delta$ se verifique $|f(x) - 14| < \epsilon$, cuando (*a*) $\epsilon = \frac{1}{2}$, (*b*) $\epsilon = 0{,}001$. *Sol.* (*a*) 1/10, (*b*) 0,0002

26. Aplicando la definición de límite, demostrar que:

(*a*) $\lim_{x\to 3} 5x = 15$, (*b*) $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$, (*c*) $\lim_{x\to 2} (x^2 - 3x + 5) = 3$.

27. Aplicando la definición de límite, demostrar que:

(*a*) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$, (*b*) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1} = \infty$, (*c*) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{x-1} = 1$, (*d*) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x+1} = \infty$.

Sol. (*a*) $\delta < 1/M$, (*b*) $\delta < \dfrac{1}{M+1}$, (*c*) $M > 1 + \dfrac{1}{\epsilon}$, (*d*) $P > 2M$

28. Demostrar que si $f(x)$ está definido para todos los valores de x próximos a $x = a$ y tiene límite cuando $x \to a$, este límite es único.

Ind.: Suponer que $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} f(x) = B$, siendo $B \neq A$. Elegir $\epsilon_1, \epsilon_2 < \frac{1}{2}|A-B|$ y determinar δ_1 y δ_2 para los dos límites. Tomando δ más pequeño que δ_1 y δ_2, se obtendrá $|A - B| = |\{A - f(x)\} + \{f(x) - B\}| < |A - B|$, lo cual es una contradicción.

29. Siendo $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ tales que (i) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todos los valores de x próximos a $x = a$, y (ii) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$, demostrar que $\lim_{x\to a} g(x) = A$.

Ind.: Elegido un $\epsilon > 0$ tan pequeño como se quiera, existirá un $\delta > 0$ tal que, para $0 < |x - a| < \delta$, se verifique $|f(x) - A| < \epsilon$ y $|h(x) - A| < \epsilon$, o bien, $A - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < A + \epsilon$.

30. Demostrar que si $f(x) \leq M$ para todos los valores de x, y $\lim_{x\to a} f(x) = A$, se verifica $A \leq M$.

Ind.: Supongamos $A > M$. Eligiendo $\epsilon = \frac{1}{2}(A - M)$, se llega a una contradicción.

Capítulo 3

Continuidad

UNA FUNCION $f(x)$ es continua en el punto $x = x_0$ si (i) está definida $f(x_0)$, (ii) existe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, (iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Por ejemplo, $f(x) = x^2 + 1$ es continua en el punto $x = 2$ ya que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5 = f(2)$. La condición (i) expresa que una función puede ser continua únicamente en puntos de su dominio de definición. Así, pues, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ no es continua en $x = 3$ puesto que $f(3)$ es imaginario y la función no está definida en este punto.

Se dice que una función es continua en un intervalo (abierto o cerrado), cuando es continua en todos sus puntos. Se dice que una función es continua, cuando lo es en todos los puntos de su dominio de definición. Así, pues, $f(x) = x^2 + 1$ y todos los polinomios en x son funciones continuas; otros ejemplos son e^x, sen x, cos x.

Si el dominio de definición de una función es un intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, la condición (ii) no se cumple en los extremos a y b. En estos casos se dice que la función es continua, cuando lo es en el intervalo abierto $a < x < b$ y además, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$. Por ejemplo, $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, es una función continua (ver Ejemplo 1, Capítulo 2). Las funciones que se manejan normalmente en el cálculo elemental son continuas en sus dominios de definición excepto en algún punto aislado.

UNA FUNCION $f(x)$ se dice que es discontinua en el punto $x = x_0$ cuando no se cumple una o varias de las condiciones dichas de continuidad. A continuación, se presentan algunos ejemplos de discontinuidad:

(*a*) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ es discontinua en el punto $x = 2$ porque

(i) $f(2)$ no está definido (se hace nulo el denominador)

(ii) no existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ (es infinito).

La citada función es continua en todos los puntos salvo en el $x = 2$, en el que presenta una *discontinuidad infinita*. Ver Figura 3-1.

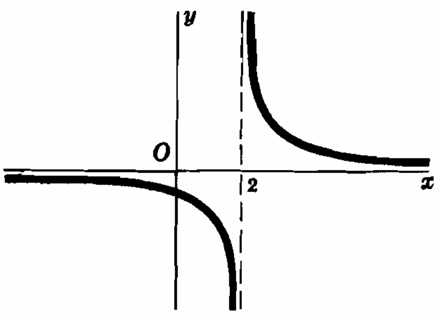


Fig. 3-1

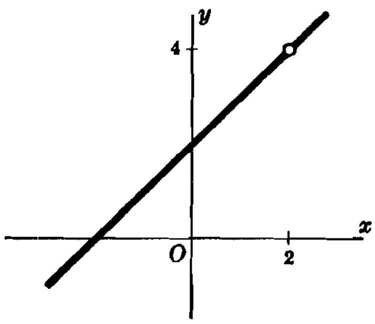


Fig. 3-2

(*b*) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ es discontinua en el punto $x = 2$ porque

(i) $f(2)$ no está definido (se anulan el numerador y el denominador)

(ii) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$.

En este caso, la discontinuidad recibe el nombre de *evitable* ya que asignando a la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ el valor $f(2) = 4$ para $x = 2$, ya es continua. (Obsérvese que la discontinuidad que se presenta en (*a*) no se puede evitar puesto que allí no existe el límite.) Las curvas representativas de $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ y de $g(x) = x+2$ son idénticas excepto en el punto $x = 2$, en el que la primera presenta un «hueco». Evitar la discontinuidad consiste simplemente en llenar de forma adecuada dicho «hueco».

(*c*) . $f(x) = \dfrac{x^3-27}{x-3}$, $x \neq 3$; $f(3) = 9$ es discontinua en el punto $x = 3$ porque

$$\text{(i)}\quad f(3) = 9, \qquad \text{(ii)}\quad \lim_{x\to 3} f(x) = 27, \qquad \text{(iii)}\quad \lim_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$$

La discontinuidad se puede evitar asignando a la función $f(x) = \dfrac{x^3-27}{x-3}$ el valor $f(3) = 27$ para $x \neq 3$.

(*d*) La función del Problema 9, Capítulo 1, está definida para todo $x > 0$, pero presenta discontinuidades en los puntos $x = 1, 2, 3, \ldots$ (ver Problema 12, Capítulo 2) ya que $\lim\limits_{x\to s^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to s^+} f(x)$ (siendo s un número cualquiera entero y positivo).

La diferencia entre los valores de estos dos límites recibe el nombre de *salto de discontinuidad.*

(Ver Problemas 1-2.)

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS. Los teoremas sobre la continuidad de funciones se deducen rápidamente de los teoremas sobre límites del Capítulo 2. En particular, si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas para $x = a$, también lo son $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ y $f(x)/g(x)$ siempre que, en esta última, $g(a) \neq 0$. Es decir, mientras todos los polinomios de x son funciones continuas para todos los valores de la variable, las funciones racionales son continuas para todos los valores de x excepto en aquellos que anulan al denominador.

En álgebra se aplican algunas de las propiedades de las funciones continuas, como por ejemplo:

(*a*) En la curva representativa de una función polinómica $y = f(x)$, dos puntos cualesquiera de ella $[a, f(a)]$ y b, $[f(b)]$ están unidos por un arco continuo.

(*b*) Si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, la curva de la función $y = f(x)$ corta al eje x por lo menos una vez, y la ecuación $f(x) = 0$ tiene, por lo menos, una raíz entre $x = a$ y $x = b$.

La propiedad de las funciones continuas que aplicamos aquí es:

I. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$, y si $f(a) \neq f(b)$, todo valor, c, comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ lo toma la función al menos para un valor de x del intervalo, como por ejemplo x_0, de forma que $f(x_0) = c$.

Las Figuras 3-3*a* y 3-3*b* ilustran las dos aplicaciones de esta propiedad, mientras que las 3-4*a* y 3-4*b* nos muestran cómo es esencial la continuidad en el intervalo.

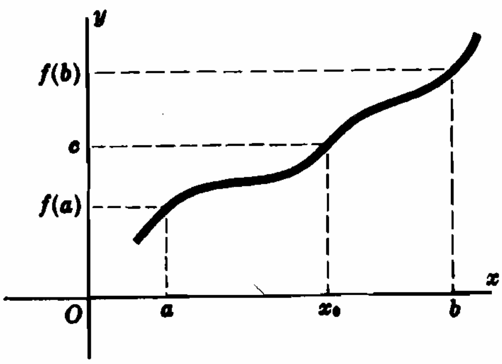


Fig. 3-3*a*

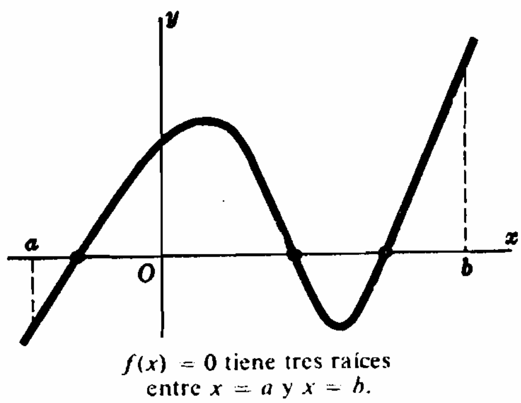


Fig. 3-3*b*

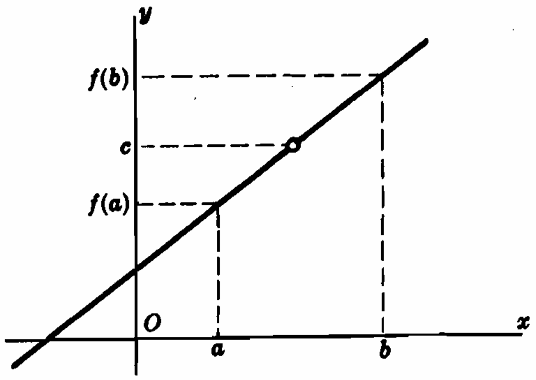
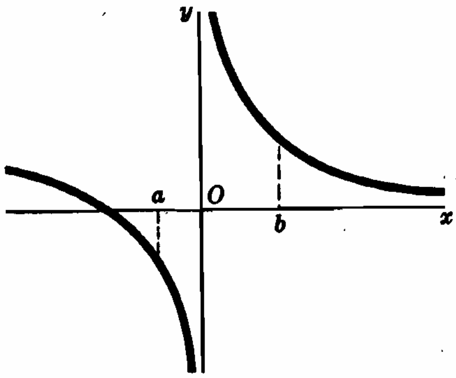


Fig. 3-4a



$f(x) = 0$ no tiene raíces entre $x = a$ y $x = b$.

Fig. 3-4b

Otras propiedades de las funciones continuas son:

II. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$, $f(x)$ toma un valor mínimo m y otro máximo M para dos puntos del intervalo.

Aun cuando la demostración de la Propiedad II se sale de los márgenes de este libro, sin embargo, se utilizará con plena libertad en capítulos posteriores. En las figuras siguientes se explica esta propiedad de un modo intuitivo. En la Fig. 3-5a la función es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$; la función toma el menor valor m y el mayor M en los puntos $x = c$ y $x = d$ respectivamente, que pertenecen al intervalo. En la Fig. 3-5b la función es continua en $a \leq x \leq b$; la función toma el menor valor en el extremo $x = a$ mientras que el mayor lo alcanza en el punto $x = c$ de dicho intervalo. En la Fig. 3-5c se representa una discontinuidad en el punto $x = c$, siendo $a < c < b$; el menor valor de la función corresponde a $x = a$ pero, en este caso, no existe valor máximo.

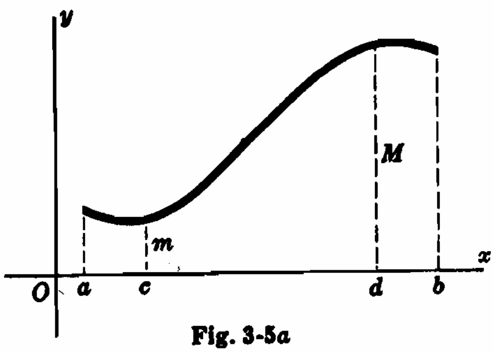


Fig. 3-5a

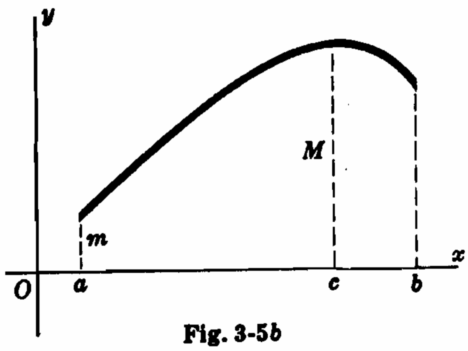


Fig. 3-5b

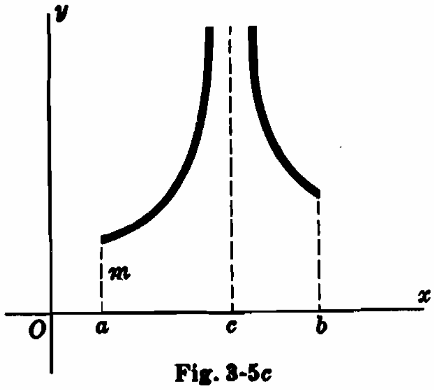


Fig. 3-5c

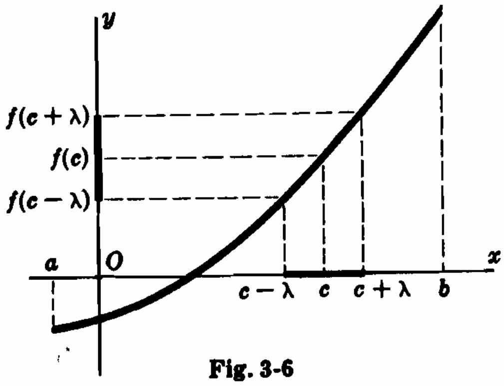


Fig. 3-6

III. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y c un número cualquiera comprendido entre a y b, si $f(c) > 0$ existe un número $\lambda > 0$ tal que, para $c - \lambda < x < c + \lambda$, se verifica $f(x) > 0$.

Esta propiedad, cuya demostración puede verse en el Problema 4, está representada en la Figura 3-6.

Problemas resueltos

1. Del Problema 9, Capítulo 2, se deduce:

(a) $f(x) = 2/x$ tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$.

(b) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+3)(x-2)}$ tiene una discontinuidad infinita en $x = -3$ y $x = 2$.

(c) $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-3)^2}$ tiene una discontinuidad infinita en $x = 3$.

2. Del Problema 5, Capítulo 2, se deduce:

(a) $f(x) = \dfrac{x^3-27}{x^2-9}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 3$.

Presenta también una discontinuidad en $x = -3$.

(b) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ tiene una discontinuidad evitable en $x = 2$.

Tiene también una discontinuidad evitable en $x = -2$.

(c) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$ tiene una discontinuidad infinita en $x = 1$.

3. Demostrar que la existencia de $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ implica que $f(x)$ sea continua en $x = a$.

De la existencia del límite se deduce, $f(a+h)-f(a) \to 0$. Por tanto, $\lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$ y $f(x)$ es continua en el punto $x = a$.

4. Demostrar que si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y c es un número cualquiera comprendido entre a y b, y si $f(c) > 0$, existe un número $\lambda > 0$ tal que, para $c-\lambda < x < c+\lambda$, se verifica $f(x) > 0$.

Como $f(x)$ es continua en el punto $x = c$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ y dado un $\epsilon > 0$, existirá un $\delta > 0$ tal que

(i) siempre que $0 < |x-c| < \delta$ se verifica $|f(x)-f(c)| < \epsilon$.

Ahora bien, $f(x) > 0$ en todos los puntos del intervalo $c-\delta < x < c+\delta$ con lo cual, $f(x) \geq f(c)$. Para los demás puntos de dicho intervalo se verifica $f(x) < f(c)$, de forma que $|f(x)-f(c)| = f(c)-f(x) < \epsilon$ y $f(x) > f(c)-\epsilon$. Por consiguiente, en estos puntos, $f(x) > 0$ a menos que $\epsilon \geq f(c)$. Así pues, para determinar un intervalo que satisfaga las condiciones del teorema, se elige $\epsilon < f(c)$, con lo cual δ verificará (i) y se toma $\lambda < \delta$. Ver Problema 10 para la expresión del teorema correspondiente.

Problemas propuestos

5. Determinar los puntos de discontinuidad de las funciones del Problema 17 (a)-(h) del Capítulo 2.
Sol. (a), (b), (d) ninguno; (c) $x = -1$; (e) $x = \pm 1$; (f) $x = 2, 3$; (g) $x = -1, -3$; (h) $x = \pm 2$

6. Demostrar que $f(x) = |x|$ es continua.

7. Demostrar que $f(x) = \dfrac{1-2^{1/x}}{1+2^{1/x}}$ presenta un salto de discontinuidad en $x = 0$.

8. Demostrar que para $x = 0$ (a) $f(x) = \dfrac{1}{3^{1/x}+1}$ tiene un salto de discontinuidad y (b) $f(x) = \dfrac{x}{3^{1/x}+1}$ tiene una discontinuidad evitable.

9. En la Fig. 3-4 a se representa la función $f(x) = \dfrac{x^2-4x-21}{x-7}$; demostrar que si $a = 3$ y $b = 11$, es $c = 10$.

10. Demostrar que si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y c es un número cualquiera comprendido entre a y b, si $f(c) < 0$ existe un número $\lambda > 0$ tal que, para $c-\lambda < x < c+\lambda$, se verifica $f(x) < 0$.

Capítulo 4

Derivada

INCREMENTOS. El incremento Δx de una variable x es el aumento o disminución que experimenta, desde un valor $x = x_0$ a otro $x = x_1$ de su campo de variación. Así, pues, $\Delta x = x_1 - x_0$, o bien $x_1 = x_0 + \Delta x$.

Si se da un incremento Δx a la variable x, (es decir si x pasa de $x = x_0$ a $x = x_0 + \Delta x$), la función $y = f(x)$ se verá incrementada en $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ a partir del valor $y = f(x_0)$. El cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{incremento de } y}{\text{incremento de } x}$$

recibe el nombre de cociente medio de incrementos de la función en el intervalo comprendido entre $x = x_0$ hasta $x = x_0 + \Delta x$.

Ejemplo 1:

Cuando x aumenta en $\Delta x = 0{,}5$ a partir de $x_0 = 1$, la función $y = f(x) = x^2 + 2x$ se incrementa en $\Delta y = f(1 + 0{,}5) - f(1) = 5{,}25 - 3 = 2{,}25$. Por tanto, el cociente de incremento de y, en el intervalo entre $x = 1$ y $x = 1{,}5$, es $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2{,}25}{0{,}5} = 4{,}5$.

(Ver Problemas 1-2.)

DERIVADA de una función $y = f(x)$ con respecto a x en un punto $x = x_0$ se define por el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

siempre que exista. Este límite se denomina también cociente instantáneo de incrementos (o simplemente cociente de incrementos) de y con respecto de x en el punto $x = x_0$.

Ejemplo 2:

Hallar la derivada de $y = f(x) = x^2 + 3x$ con respecto a x en un punto $x = x_0$. Como aplicación, calcular la derivada en los puntos: (*a*) $x_0 = 2$ y (*b*) $x_0 = -4$.

$$\begin{aligned}
y_0 &= f(x_0) = x_0^2 + 3x_0 \\
y_0 + \Delta y &= f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x) \\
&= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x_0 + 3\Delta x \\
\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2x_0\Delta x + 3\Delta x + (\Delta x)^2 \\
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2x_0 + 3 + \Delta x
\end{aligned}$$

La derivada en el punto $x = x_0$ es

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + 3 + \Delta x) = 2x_0 + 3$$

(*a*) Para $x_0 = 2$, el valor de la derivada es $2 \cdot 2 + 3 = 7$.
(*b*) Para $x_0 = -4$, el valor de la derivada es $2(-4) + 3 = -5$.

EN EL CALCULO DE DERIVADAS se suele prescindir del subíndice 0 con lo que la derivada de $y = f(x)$ *con respecto a x* se escribe en la forma

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Véase la nota del Problema 5(*c*), Capítulo 2.

La derivada de $y = f(x)$ con respecto a x se puede representar por uno cualquiera de los símbolos

$$\frac{d}{dx}y,\ \frac{dy}{dx},\ D_x y,\ y',\ f'(x),\ \text{o}\ \frac{d}{dx}f(x)$$

(Ver Problemas 3-8.)

Problemas resueltos

1. Dada $y = f(x) = x^2 + 5x - 8$, hallar Δy e $\Delta y/\Delta x$ cuando x varía

(*a*) de $x_0 = 1$ a $x_1 = x_0 + \Delta x = 1{,}2$ y (*b*) de $x_0 = 1$ a $x_1 = 0{,}8$.

(*a*) $\Delta x = x_1 - x_0 = 1{,}2 - 1 = 0{,}2$

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1{,}2) - f(1) = -0{,}56 - (-2) = 1{,}44$ y $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1{,}44}{0{,}2} = 7{,}2$

(*b*) $\Delta x = 0{,}8 - 1 = -0{,}2$

$\Delta y = f(0{,}8) - f(1) = -3{,}36 - (-2) = -1{,}36$ y $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-1{,}36}{-0{,}2} = 6{,}8$

Geométricamente, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ en (*a*) es la pendiente de la recta que une los puntos $(1, -2)$ y $(1{,}2, -0{,}56)$ de la parábola $y = x^2 + 5x - 8$, y en (*b*) es la pendiente de la recta que une los puntos $(0{,}8, -3{,}36)$ y $(1, -2)$ de la misma parábola.

2. La ecuación $s = 5t^2$ representa el espacio, s(m), recorrido por un cuerpo que cae libremente a partir del reposo. Calcular $\Delta s/\Delta t$ cuando t varía de t_0 a $t_0 + \Delta t$: Como aplicación, calcular $\Delta s/\Delta t$ cuando t varía: (*a*) de 3 a 3,5, (*b*) de 3 a 3,2 y (*c*) de 3 a 3,1.

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{5(t_0 + \Delta t)^2 - 5t_0^2}{\Delta t} = \frac{10t_0 \cdot \Delta t + 5(\Delta t)^2}{\Delta t} = 10t_0 + 5\Delta t$$

(*a*) Aquí $t_0 = 3$, $\Delta t = 0{,}5$, y $\Delta s/\Delta t = 10(3) + 5(0{,}5) = 32{,}5$ m/s.

(*b*) Aquí $t_0 = 3$, $\Delta t = 0{,}2$, y $\Delta s/\Delta t = 10(3) + 5(0{,}2) = 31$ m/s.

(*c*) Aquí $t_0 = 3$, $\Delta t = 0{,}1$, y $\Delta s/\Delta t = 30{,}5$ m/s.

Como Δs es el desplazamiento del cuerpo desde el instante $t = t_0$ hasta $t = t_0 + \Delta t$,

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \text{velocidad media del cuerpo en el intervalo de tiempo dado}$$

3. Hallar dy/dx, siendo $y = x^3 - x^2 - 4$. Hallar también dy/dx en el punto: (*a*) $x = 4$, (*b*) $x = 0$, (*c*) $x = -1$.

(1) $$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 - (x + \Delta x)^2 - 4 = x^3 + 3x^2(\Delta x) + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^2 - 2x(\Delta x) - (\Delta x)^2 - 4$$

(2) $$\Delta y = (3x^2 - 2x)\cdot\Delta x + (3x - 1)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

(3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 - 2x + (3x - 1)\cdot\Delta x + (\Delta x)^2$$

(4) $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\{3x^2 - 2x + (3x - 1)\cdot\Delta x + (\Delta x)^2\} = 3x^2 - 2x$$

(*a*) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=4} = 3(4)^2 - 2(4) = 40$, (*b*) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 3(0)^2 - 2(0) = 0$, (*c*) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-1} = 3(-1)^2 - 2(-1) = 5$

4. Hallar la derivada de $y = x^2 + 3x + 5$.

(1) $$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 5 = x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2 + 3x + 3\Delta x + 5$$

(2) $$\Delta y = (2x + 3)\Delta x + \Delta x^2$$

(3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2x + 3)\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + 3 + \Delta x$$

(4) $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x + 3 + \Delta x) = 2x + 3$$

5. Hallar la derivada de $y = \dfrac{1}{x - 2}$ en los puntos $x = 1$ y $x = 3$. Demostrar que la función no es derivable en el punto $x = 2$, en el que presenta una discontinuidad.

(1) $$y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x - 2}$$

(2) $$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x - 2} - \frac{1}{x - 2} = \frac{(x - 2) - (x + \Delta x - 2)}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)} = \frac{-\Delta x}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)}$$

(3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)}$$

(4) $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(x - 2)(x + \Delta x - 2)} = \frac{-1}{(x - 2)^2}$$

Para $x = 1$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{(1 - 2)^2} = -1$, y para $x = 3$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-1}{(3 - 2)^2} = -1$.

Para $x = 2$, $\dfrac{dy}{dx}$ no existe porque el denominador es cero.

6. Hallar la derivada de $f(x) = \dfrac{2x - 3}{3x + 4}$ y demostrar que la función no es derivable en el punto $x = -\frac{4}{3}$, en el que presenta una discontinuidad.

(1) $$f(x + \Delta x) = \frac{2(x + \Delta x) - 3}{3(x + \Delta x) + 4}$$

(2) $$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{2x + 2\Delta x - 3}{3x + 3\Delta x + 4} - \frac{2x - 3}{3x + 4}$$

$$= \frac{(3x + 4)[(2x - 3) + 2\Delta x] - (2x - 3)[(3x + 4) + 3\Delta x]}{(3x + 4)(3x + 3\Delta x + 4)}$$

$$= \frac{(6x + 8 - 6x + 9)\Delta x}{(3x + 4)(3x + 3\Delta x + 4)} = \frac{17\Delta x}{(3x + 4)(3x + 3\Delta x + 4)}$$

(3) $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{17}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)}$$

(4) $$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{17}{(3x+4)(3x+3\Delta x+4)} = \frac{17}{(3x+4)^2}$$

Para $x = -4/3$, la función no es derivable porque se anula el denominador. En general, *una función no es derivable en los puntos en que presenta una discontinuidad.*

7. Hallar la derivada de $y = \sqrt{2x+1}$.

(1) $$y + \Delta y = (2x + 2\Delta x + 1)^{1/2}$$

(2) $$\Delta y = (2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} - (2x+1)^{1/2}$$

$$= [(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} - (2x+1)^{1/2}]\,\frac{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}}$$

$$= \frac{(2x + 2\Delta x + 1) - (2x+1)}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}} = \frac{2\Delta x}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}}$$

(3) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}}$$

(4) $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2}{(2x + 2\Delta x + 1)^{1/2} + (2x+1)^{1/2}} = \frac{1}{(2x+1)^{1/2}}$$

En la función $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $\lim_{x\to -1/2^+} f(x) = 0 = f(-\frac{1}{2})$ mientras que no existe $\lim_{x\to -1/2^-} f(x)$; la función es *continua a la derecha* de $x = -\frac{1}{2}$. En el punto $x = -\frac{1}{2}$ la derivada es infinita.

8. Calcular la derivada de $f(x) = x^{1/3}$ y, como aplicación, estudiar $f'(0)$.

(1) $$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^{1/3}$$

(2) $$f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^{1/3} - x^{1/3}$$

$$= \frac{[(x+\Delta x)^{1/3} - x^{1/3}][(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}]}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$$

$$= \frac{x + \Delta x - x}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$$

(3) $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}}$$

(4) $$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{(x+\Delta x)^{2/3} + x^{1/3}(x+\Delta x)^{1/3} + x^{2/3}} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

La función no es derivable en el punto $x = 0$ porque el denominador es cero. Obsérvese que la función es continua en el punto $x = 0$. Teniendo esto en cuenta así como la nota final del Problema 7 se puede afirmar que: *Si una función es derivable en el punto $x = a$, es continua en dicho punto aunque el recíproco no es cierto.*

9. Interpretación geométrica de dy/dx.

La Fig. 4-1 muestra que $\Delta y/\Delta x$ es la pendiente de la secante que une un punto fijo $P(x, y)$ cualquiera de la curva con otro $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Cuando $\Delta x \to 0$, P permanece fijo y Q se mueve sobre la curva acercándose a P; la recta PQ va girando alrededor de P hasta que llega a su posición límite que es la tangente PT a la curva en el punto P. Así pues, dy/dx es la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P.

Por ejemplo, en el Problema 3, la pendiente de la cúbica $y = x^3 - x^2 - 4$ en el punto $x = 4$ es $m = 40$, en $x = 0$ es $m = 0$ y en $x = -1$ es $m = 5$.

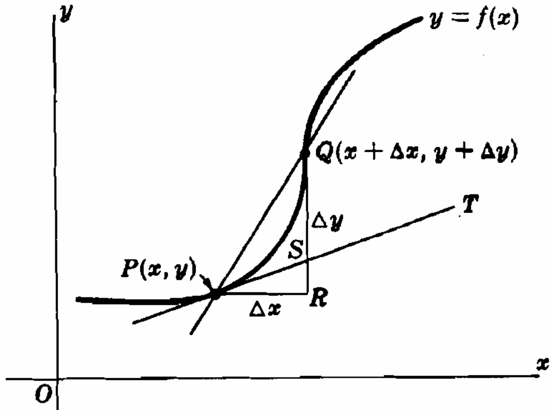


Fig. 4-1

10. Hallar ds/dt en la función del Problema 2. Interpretar el resultado.

En este caso $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = 10t_0 + 5\Delta t$ y $\dfrac{ds}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} (10t_0 + 5\Delta t) = 10t_0$.

Cuando $\Delta t \to 0$, $\Delta s/\Delta t$ representa la velocidad media del cuerpo en intervalos de tiempo Δt cada vez más pequeños. El valor de ds/dt es la velocidad instantánea v en el instante $t = t_0$. Por ejemplo, para $x = 3$, $v = 10(3) = 30$ m/s.

11. Calcular $f'(x)$ en la función $f(x) = |x|$.

La función es continua para todos los valores de x. Para $x < 0, f(x) = -x$ y $f'(x) = -1$; para $x > 0, f(x) = x$ y $f'(x) = 1$.

Para $x = 0, f(x) = 0$ y $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

Cuando $\Delta x \to 0^-$, $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} \to -1$ mientras que si $\Delta x \to 0^+$, $\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} \to 1$.

Por consiguiente, la función no es derivable en el punto $x = 0$.

12. Calcular $\epsilon = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - \dfrac{dy}{dx}$ para la función de los Problemas (*a*) 3 y (*b*) 5. Demostrar que $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

(*a*) $\epsilon = \{3x^2 - 2x + (3x - 1)\Delta x + (\Delta x)^2\} - \{3x^2 - 2x\} = (3x - 1 + \Delta x)\Delta x$.

(*b*) $$\epsilon = \frac{-1}{(x-2)(x + \Delta x - 2)} - \frac{-1}{(x-2)^2} = \frac{-(x-2) + (x + \Delta x - 2)}{(x-2)^2(x + \Delta x - 2)} = \frac{1}{(x-2)^2(x + \Delta x - 2)}\Delta x$$

13. Interpretar geométricamente la expresión $\Delta y = \dfrac{dy}{dx} \cdot \Delta x + \epsilon \cdot \Delta x$ del Problema 12.

En la figura del Problema 9, $\Delta y = RQ$ y $\dfrac{dy}{dx} \cdot \Delta x = PR \cdot \text{tag}\angle\, TPR = RS$; por tanto, $\epsilon \cdot \Delta x = SQ$. Cuando x se incrementa en Δx desde $P(x,y)$, Δy es el incremento correspondiente de y *contado hasta la curva* mientras que $\dfrac{dy}{dx}\,\Delta x$ es el incremento correspondiente de y *contado hasta la tangente PT*. Como la diferencia entre ambos incrementos $\epsilon \cdot \Delta x = (\ldots)(\Delta x)^2 \to 0$ más rápidamente que Δx, en el Capítulo 23 se empleará la expresión $\dfrac{dy}{dx} \cdot \Delta x$ como una aproximación de Δy cuando $|\Delta x|$ sea pequeño.

Problemas propuestos

14. Calcular Δy e $\Delta y/\Delta x$, en los casos siguientes:

(*a*) $y = 2x - 3$ y x pasa de 3,3 a 3,5.
(*b*) $y = x^2 + 4x$ y x pasa de 0,7 a 0,85.
(*c*) $y = 2/x$ y x pasa de 0,75 a 0,5.

Sol. (*a*) 0,4; 2, (*b*) 0,8325; 5,55, (*c*) 4/3; —16/3

15. Dada la función $y = x^2 - 3x + 5$, calcular Δy en el punto $x = 5$ para $\Delta x = -0{,}01$. Hallar el valor de y para $x = 4{,}99$.

Sol. $\Delta y = -0{,}0699$; $y = 14{,}9301$

16. Calcular la velocidad media de los siguientes movimientos:

(*a*) $s = (3t^2 + 5)$ m y t pasa de 2 a 3 seg.
(*b*) $s = (2t^2 + 5t - 3)$ m y t pasa de 2 a 5 seg.

Sol. (*a*) 15 m/seg, (*b*) 19 m/seg.

17. Calcular el aumento de volumen de un balón esférico cuando su radio se incrementa desde r hasta $r + \Delta r$ cm, (*b*) desde 2 hasta 3 cm.

Sol. (*a*) $\frac{4\pi}{3}(3r^2 + 3r \cdot \Delta r + \Delta r^2) \cdot \Delta r$ cm³., (*b*) $^{76}/_3\pi$ cm³.

18. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

(*a*) $y = 4x - 3$
(*b*) $y = 4 - 3x$
(*c*) $y = x^2 + 2x - 3$
(*d*) $y = 1/x^2$
(*e*) $y = (2x - 1)/(2x + 1)$
(*f*) $y = (1 + 2x)/(1 - 2x)$
(*g*) $y = \sqrt{x}$
(*h*) $y = 1/\sqrt{x}$
(*i*) $y = \sqrt{1 + 2x}$
(*j*) $y = 1/\sqrt{2 + x}$

Sol. (*a*) 4
(*b*) —3
(*c*) $2(x + 1)$
(*d*) $-2/x^3$
(*e*) $\dfrac{1}{(2x + 1)^2}$
(*f*) $\dfrac{4}{(1 - 2x)^2}$
(*g*) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
(*h*) $-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$
(*i*) $\dfrac{1}{\sqrt{1 + 2x}}$
(*j*) $-\dfrac{1}{2(2 + x)^{3/2}}$

19. Hallar la pendiente de las siguientes curvas en el punto $x = 1$:

(*a*) $y = 8 - 5x^2$, (*b*) $y = \dfrac{4}{x + 1}$, (*c*) $y = \dfrac{2}{x + 3}$.

Sol. (*a*) —10, (*b*) —1, (*c*) —1/8.

20. Calcular las coordenadas del vértice de la parábola $y = x^2 - 4x + 1$ teniendo en cuenta que la pendiente de la tangente en dicho punto es igual a cero. *Sol.* $V(2, -3)$.

21. Calcular la pendiente de las tangentes a la parábola $y = -x^2 + 5x - 6$ en los puntos de intersección con el eje x.

Sol. Para $x = 2$, $m = 1$; para $x = 3$, $m = -1$.

22. Calcular la velocidad de los siguientes movimientos en el instante $t = 2$; s viene expresado en metros y t en segundos:

(*a*) $s = t^2 + 3t$, (*b*) $s = t^3 - 3t^2$, (*c*) $s = \sqrt{t + 2}$.

Sol. (*a*) 7 m/s, (*b*) 0 m/s, (*c*) $\frac{1}{4}$ m/s

23. Demostrar que la variación instantánea del volumen de un cubo con respecto a su arista x(cm) es de 12 cm³/cm cuando $x = 2$ cm.

Capítulo 5

Derivación de funciones algebraicas

UNA FUNCION que tiene derivada en un punto $x = x_0$ se dice que es *derivable* en él. Una función es derivable en un intervalo cuando lo es en todos los puntos del mismo.

Las funciones que aparecen en el cálculo elemental son, en general, derivables en sus intervalos de definición, pudiendo no serlo en algún punto aislado.

FORMULAS DE DERIVACION. En las fórmulas siguientes u, v y w son funciones derivables de x.

1. $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$, siendo c una constante

2. $\dfrac{d}{dx}(x) = 1$

3. $\dfrac{d}{dx}(u + v + \cdots) = \dfrac{d}{dx}(u) + \dfrac{d}{dx}(v) + \cdots$

4. $\dfrac{d}{dx}(cu) = c\dfrac{d}{dx}(u)$

5. $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{d}{dx}(v) + v\dfrac{d}{dx}(u)$

6. $\dfrac{d}{dx}(uvw) = uv\dfrac{d}{dx}(w) + uw\dfrac{d}{dx}(v) + vw\dfrac{d}{dx}(u)$

7. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{c}\right) = \dfrac{1}{c}\cdot\dfrac{d}{dx}(u), \quad c \neq 0$

8. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{c}{u}\right) = c\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{u}\right) = -\dfrac{c}{u^2}\cdot\dfrac{d}{dx}(u)$, $u \neq 0$

9. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{d}{dx}(u) - u\dfrac{d}{dx}(v)}{v^2}, \quad v \neq 0$

10. $\dfrac{d}{dx}(x^m) = mx^{m-1}$

11. $\dfrac{d}{dx}(u^m) = mu^{m-1}\dfrac{d}{dx}(u)$

(Ver Problemas 1-13.)

FUNCION INVERSA. Sea la función $y = f(x)$ derivable en el intervalo $a \leq x \leq b$ y supongamos que dy/dx no cambia de signo en dicho intervalo. Las funciones representadas en las Figs. 5-1*a* y 5-1*b* toman una sola vez cada uno de los valores comprendidos entre $f(a) = c$ y $f(b) = d$. Por tanto, a cada valor de y perteneciente a dicho intervalo le corresponde un único valor de x, con lo cual x es también función de y, es decir $x = g(y)$. Las funciones $y = f(x)$ y $x = g(y)$ reciben el nombre de *funciones inversas.*

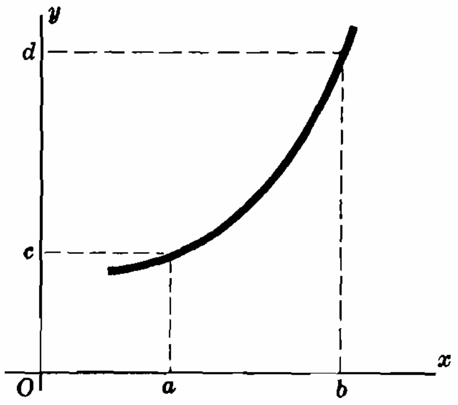


Fig. 5-1a

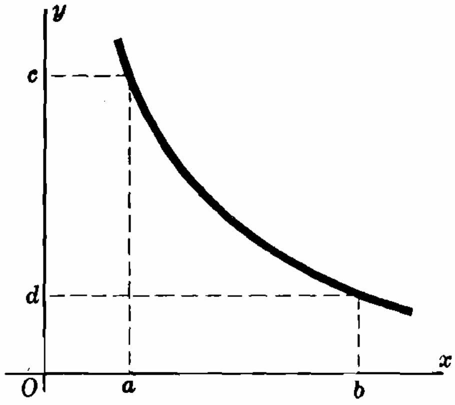


Fig. 5-1b

Ejemplo 1:

(*a*) $y = f(x) = 3x + 2$ y $x = g(y) = \frac{1}{3}(y - 2)$ son funciones inversas.

(*b*) Cuando $x \leq 2$ e $y \geq -1$, $y = x^2 - 4x + 3$ y $x = 2 - \sqrt{y+1}$ son funciones inversas. Cuando $x \geq 2$ e $y \geq -1$, $y = x^2 - 4x + 3$ y $x = 2 + \sqrt{y+1}$ son funciones inversas.

Para calcular dy/dx en la función $x = g(y)$:

(*a*) Despejar y si es posible y derivar con respecto a x

(*b*) Derivar $x = g(y)$ con respecto a y y aplicar

$$12. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

Ejemplo 2:

Calcular dy/dx en la función $x = \sqrt{y} + 5$.

Aplicando (*a*): $y = (x-5)^2$ y $dy/dx = 2(x-5)$.

Aplicando (*b*): $\dfrac{dx}{dy} = \frac{1}{2}y^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$; por tanto, $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} = 2(x-5)$.

(Ver Problemas 14-15.)

DERIVADA DE UNA FUNCION DE FUNCION. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ resulta que $y = f\{g(x)\}$ es una función de x. En el caso en que y sea una función derivable de u y u lo sea respecto de x, la función $y = f\{g(x)\}$ también será derivable con respecto a x. La derivada dy/dx se puede obtener por uno de los procedimientos siguientes:

(*a*) Despejar y en función de x y derivar

Ejemplo 3:

Si $y = u^2 + 3$ y $u = 2x + 1$, tendremos $y = (2x+1)^2 + 3$ y $dy/dx = 8x + 4$.

(*b*) Derivar cada una de las funciones con respecto a la variable independiente y aplicar la fórmula

$$13. \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 4:

Si $y = u^2 + 3$ y $u = 2x + 1$, tendremos $\dfrac{dy}{du} = 2u$, $\dfrac{du}{dx} = 2$ y $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = 4u = 8x + 4$.

(Ver Problemas 16-20.)

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR. La derivada de una función de x, $y = f(x)$, recibe el nombre de *primera derivada* de la función. Si la primera derivada es a su vez una función derivable, su derivada se denomina *derivada segunda* de la función original y se representa por uno cualquiera de los símbolos $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, y'' o $f''(x)$. La derivada de esta segunda derivada, si existe es la *derivada tercera* de la función y se representa por $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, y''' o $f'''(x)$.

Nota. La derivada de un orden determinado en un punto solo puede existir cuando todas las funciones derivadas de orden inferior son derivables en dicho punto.

(Ver Problemas 21-23.)

Problemas resueltos

1. Demostrar: (*a*) $\frac{d}{dx}(c) = 0$, siendo c una constante; (*b*) $\frac{d}{dx}(x) = 1$; (*c*) $\frac{d}{dx}(cx) = c$, siendo c una constante;

(*d*) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$, siendo n un número positivo entero.

Como $\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$,

(*a*) $\frac{d}{dx}(c) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 0 = 0$

(*b*) $\frac{d}{dx}(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 1 = 1$

(*c*) $\frac{d}{dx}(cx) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{c(x+\Delta x)-cx}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} c = c$

(*d*) $$\frac{d}{dx}(x^n) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left\{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n\right\} - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}\right\} = nx^{n-1}$$

2. Sean u y v funciones derivables de x. Demostrar: (*a*) $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v)$

(*b*) $\frac{d}{dx}(u\cdot v) = u\cdot\frac{d}{dx}(v) + v\cdot\frac{d}{dx}(u)$ (*c*) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\cdot\frac{d}{dx}(u) - u\cdot\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$, $v\neq 0$

(*a*) Sea $f(x) = u + v = u(x) + v(x)$; tendremos:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)-u(x)-v(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$

Tomando el límite cuando $\Delta x\to 0$, $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}u(x) + \frac{d}{dx}v(x) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v)$.

(*b*) Sea $f(x) = u\cdot v = u(x)\cdot v(x)$; tendremos:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{[u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - v(x)\cdot u(x+\Delta x)] + [v(x)\cdot u(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)]}{\Delta x}$$

$$= u(x+\Delta x)\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} + v(x)\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

y $$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(u\cdot v) = u(x)\frac{d}{dx}v(x) + v(x)\frac{d}{dx}u(x) = u\frac{d}{dx}(v) + v\frac{d}{dx}(u).$$

(*c*) Sea $f(x) = \frac{u}{v} = \frac{u(x)}{v(x)}$; tendremos

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x+\Delta x)}{\Delta x\{v(x)\cdot v(x+\Delta x)\}}$$

$$= \frac{[u(x+\Delta x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v(x)] - [u(x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x)]}{\Delta x\{v(x)\cdot v(x+\Delta x)\}}$$

$$= \frac{v(x)\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} - u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)}$$

y $$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(x)\frac{d}{dx}u(x) - u(x)\frac{d}{dx}v(x)}{\{v(x)\}^2} = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$$

Derivar las siguientes funciones.

3. $y = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4 + 9x^5$

$$\frac{dy}{dx} = 0 + 2(1) - 3(2x) - 5(3x^2) - 8(4x^3) + 9(5x^4) = 2 - 6x - 15x^2 - 32x^3 + 45x^4$$

4. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3} = x^{-1} + 3x^{-2} + 2x^{-3}$

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2} + 3(-2x^{-3}) + 2(-3x^{-4}) = -x^{-2} - 6x^{-3} - 6x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$$

5. $y = 2x^{1/2} + 6x^{1/3} - 2x^{3/2}$

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) + 6\left(\frac{1}{3}x^{-2/3}\right) - 2\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right) = x^{-1/2} + 2x^{-2/3} - 3x^{1/2} = \frac{1}{x^{1/2}} + \frac{2}{x^{2/3}} - 3x^{1/2}$$

6. $y = \dfrac{2}{x^{1/2}} + \dfrac{6}{x^{1/3}} - \dfrac{2}{x^{3/2}} - \dfrac{4}{x^{3/4}} = 2x^{-1/2} + 6x^{-1/3} - 2x^{-3/2} - 4x^{-3/4}$

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) + 6\left(-\frac{1}{3}x^{-4/3}\right) - 2\left(-\frac{3}{2}x^{-5/2}\right) - 4\left(-\frac{3}{4}x^{-7/4}\right)$$

$$= -x^{-3/2} - 2x^{-4/3} + 3x^{-5/2} + 3x^{-7/4} = -\frac{1}{x^{3/2}} - \frac{2}{x^{4/3}} + \frac{3}{x^{5/2}} + \frac{3}{x^{7/4}}$$

7. $y = \sqrt[3]{3x^2} - \dfrac{1}{\sqrt{5x}} = (3x^2)^{1/3} - (5x)^{-1/2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(3x^2)^{-2/3}\cdot 6x - \left(-\frac{1}{2}\right)(5x)^{-3/2}\cdot 5 = \frac{2x}{(9x^4)^{1/3}} + \frac{5}{2(5x)(5x)^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt[3]{9x}} + \frac{1}{2x\sqrt{5x}}$$

8. $s = (t^2 - 3)^4$

$$\frac{ds}{dt} = 4(t^2 - 3)^3(2t) = 8t(t^2 - 3)^3$$

9. $z = \dfrac{3}{(a^2 - y^2)^2} = 3(a^2 - y^2)^{-2}$

$$\frac{dz}{dy} = 3(-2)(a^2 - y^2)^{-3}\cdot\frac{d}{dy}(a^2 - y^2) = 3(-2)(a^2 - y^2)^{-3}(-2y) = \frac{12y}{(a^2 - y^2)^3}$$

10. $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 3} = (x^2 + 6x + 3)^{1/2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 3)^{-1/2}\cdot\frac{d}{dx}(x^2 + 6x + 3) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 3)^{-1/2}(2x + 6) = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 6x + 3}}$$

11. $y = (x^2 + 4)^2(2x^3 - 1)^3$

$$y' = (x^2 + 4)^2\cdot\frac{d}{dx}(2x^3 - 1)^3 + (2x^3 - 1)^3\cdot\frac{d}{dx}(x^2 + 4)^2$$

$$= (x^2 + 4)^2\cdot 3(2x^3 - 1)^2\cdot\frac{d}{dx}(2x^3 - 1) + (2x^3 - 1)^3\cdot 2(x^2 + 4)\cdot\frac{d}{dx}(x^2 + 4)$$

$$= (x^2 + 4)^2\cdot 3(2x^3 - 1)^2\cdot 6x^2 + (2x^3 - 1)^3\cdot 2(x^2 + 4)\cdot 2x = 2x(x^2 + 4)(2x^3 - 1)^2(13x^3 + 36x - 2)$$

12. $y = \dfrac{3 - 2x}{3 + 2x}$

$$y' = \frac{(3 + 2x)\cdot\frac{d}{dx}(3 - 2x) - (3 - 2x)\cdot\frac{d}{dx}(3 + 2x)}{(3 + 2x)^2} = \frac{(3 + 2x)(-2) - (3 - 2x)(2)}{(3 + 2x)^2} = \frac{-12}{(3 + 2x)^2}$$

13. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{x^2}{(4-x^2)^{1/2}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4-x^2)^{1/2}\cdot\frac{d}{dx}(x^2) - x^2\cdot\frac{d}{dx}(4-x^2)^{1/2}}{4-x^2} = \frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) - x^2\cdot\frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(-2x)}{4-x^2}$$

$$= \frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) + x^3(4-x^2)^{-1/2}}{4-x^2}\cdot\frac{(4-x^2)^{1/2}}{(4-x^2)^{1/2}} = \frac{2x(4-x^2)+x^3}{(4-x^2)^{3/2}} = \frac{8x-x^3}{(4-x^2)^{3/2}}$$

14. Hallar dy/dx, en la función $x = y\sqrt{1-y^2}$.

$$\frac{dx}{dy} = (1-y^2)^{1/2} + \tfrac{1}{2}y(1-y^2)^{-1/2}(-2y) = \frac{1-2y^2}{\sqrt{1-y^2}} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{1-2y^2}$$

15. Calcular la pendiente de la curva $x = y^2 - 4y$ en los puntos de intersección con el eje y.

Los puntos de corte son (0,0) y (0,4).

$\dfrac{dx}{dy} = 2y-4$, y $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{dx/dy} = \dfrac{1}{2y-4}$. En (0,0) la pendiente es $-\frac{1}{4}$, y en (0,4) la pendiente es $\frac{1}{4}$.

FORMULA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCION DE FUNCION

16. Deducir la fórmula $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$.

Sean Δu y Δy los incrementos experimentados por las funciones u y y cuando x aumenta o disminuye en Δx. Siempre que $\Delta u \neq 0$ podremos escribir,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

y siendo $\Delta u \neq 0$, cuando $\Delta x \to 0$ se verificará $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$.

Se puede prescindir de la condición impuesta a Δu tomando $|\Delta x|$ suficientemente pequeño. Cuando esto no sea posible, la fórmula se puede deducir de la manera siguiente:

Sea $\Delta y = \dfrac{dy}{du}\cdot\Delta u + \epsilon\cdot\Delta u$ donde $\epsilon \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. (Ver Problema 13, Capítulo 4.) Por tanto,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} + \epsilon\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

y, tomando límites cuando $\Delta x \to 0$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx} + 0\,\dfrac{du}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ como antes.

17. Hallar dy/dx, en las funciones $y = \dfrac{u^2-1}{u^2+1}$ y $u = \sqrt[3]{x^2+2}$.

$$\frac{dy}{du} = \frac{4u}{(u^2+1)^2} \quad \text{y} \quad \frac{du}{dx} = \frac{2x}{3(x^2+2)^{2/3}} = \frac{2x}{3u^2}$$

Por lo tanto $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{4u}{(u^2+1)^2}\cdot\frac{2x}{3u^2} = \frac{8x}{3u(u^2+1)^2}$$

18. Un punto se mueve sobre la curva $y = x^3 - 3x + 5$ de forma que $x = \frac{1}{2}\sqrt{t} + 3$ siendo t el tiempo. Calcular la variación de y con respecto al tiempo en el instante $t = 4$.

Se trata de calcular el valor de dy/dt para $t = 4$.

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2-1), \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{3(x^2-1)}{4\sqrt{t}}$$

Cuando $t = 4$ $x = \frac{1}{2}\sqrt{4} + 3 = 4$, y $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3(16-1)}{4\cdot 2} = \dfrac{45}{8}$ unidades por unidad de tiempo.

19. Un punto se mueve en el plano según la ley $x = t^2 + 2t$, $y = 2t^3 - 6t$. Calcular dy/dx para $t = 0, 2, 5$.

De la primera ecuación se puede despejar t y sustituirlo en la segunda, resultando y en función de x.

$\dfrac{dy}{dt} = 6t^2 - 6$, $\dfrac{dx}{dt} = 2t+2$, $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{2t+2}$, y $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx} = 6(t^2-1)\cdot\dfrac{1}{2(t+1)} = 3(t-1)$.

Los valores pedidos de dy/dx son -3 para $t = 0$, 3 para $t = 2$, y 12 para $t = 5$.

20. Si $y = x^2 - 4x$ y $x = \sqrt{2t^2+1}$, hallar dy/dt cuando $t = \sqrt{2}$.

$$\frac{dy}{dx} = 2(x-2), \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{(2t^2+1)^{1/2}}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{4t(x-2)}{(2t^2+1)^{1/2}}$$

Cuando $t = \sqrt{2}$, $x = \sqrt{5}$ y $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{4\sqrt{2}(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{5}(5-2\sqrt{5})$.

21. Demostrar que la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 8x + 2$ tiene derivadas de todos los órdenes para $x = a$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 6x - 8 \quad &\text{y}\quad f'(a) &= 3a^2 + 6a - 8\\ f''(x) &= 6x + 6 &\text{y}\quad f''(a) &= 6a + 6\\ f'''(x) &= 6 &\text{y}\quad f'''(a) &= 6 \end{aligned}$$

Todas las derivadas de orden superior son idénticamente nulas

22. Hallar las sucesivas derivadas de $f(x) = x^{4/3}$ para $x = 0$.

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} \text{ y } f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{4}{9x^{2/3}} \text{ y } f''(0) \text{ no existe.}$$

Por tanto, para $x = 0$ solamente existe la primera derivada.

23. Dada la función $f(x) = \dfrac{2}{1-x} = 2(1-x)^{-1}$, calcular $f^{(n)}(x)$.

Tendremos

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(-1)(1-x)^{-2}(-1) = 2(1-x)^{-2} = 2\cdot 1!\,(1-x)^{-2}\\ f''(x) &= 2(1!)(-2)(1-x)^{-3}(-1) = 2\cdot 2!\,(1-x)^{-3}\\ f'''(x) &= 2(2!)(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 2\cdot 3!\,(1-x)^{-4} \end{aligned}$$

con lo cual $f^{(n)}(x) = 2\cdot n!\,(1-x)^{-(n+1)}$.

Esto se puede demostrar por el método de inducción, suponiendo que $f^{(k)}(x) = 2\cdot k!\,(1-x)^{-(k+1)}$, se verifica

$$f^{(k+1)}(x) = -2\cdot k!\,(k+1)(1-x)^{-(k+2)}(-1) = 2\cdot(k+1)!\,(1-x)^{-(k+2)}$$

Problemas propuestos

24. Deducir la fórmula 10 en el caso en que $m = -1/n$, siendo n un número positivo, aplicando la fórmula 9 para hallar $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$.

En el caso en que $m = p/q$, siendo p y q enteros, ver Problema 4, Capítulo 6.

Hallar la derivada de las funciones de los Problemas 25-43.

25. $y = x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 6$ *Sol.* $dy/dx = 5x(x^3 + 4x^2 - 4)$

26. $y = 3x^{1/2} - x^{3/2} + 2x^{-1/2}$ *Sol.* $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2}\sqrt{x} - \dfrac{1}{x^{3/2}}$

27. $y = \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{4}{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}x^{-2} + 4x^{-1/2}$ *Sol.* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{x^{3/2}}$

28. $y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$ *Sol.* $y' = \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2x}}$

29. $f(t) = \dfrac{2}{\sqrt{t}} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{t}}$ *Sol.* $f'(t) = -\dfrac{t^{1/2} + 2t^{2/3}}{t^2}$

30. $y = (1-5x)^6$ *Sol.* $y' = -30(1-5x)^5$

31. $f(x) = (3x - x^3 + 1)^4$ *Sol.* $f'(x) = 12(1-x^2)(3x - x^3 + 1)^3$

32. $y = (3 + 4x - x^2)^{1/2}$ *Sol.* $y' = \dfrac{2-x}{y}$

33. $\theta = \dfrac{3r+2}{2r+3}$ Sol. $\dfrac{d\theta}{dr} = \dfrac{5}{(2r+3)^2}$

34. $y = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^5$ Sol. $y' = \dfrac{5x^4}{(1+x)^6}$

35. $y = 2x^2\sqrt{2-x}$ Sol. $y' = \dfrac{x(8-5x)}{\sqrt{2-x}}$

36. $f(x) = x\sqrt{3-2x^2}$ Sol. $f'(x) = \dfrac{3-4x^2}{\sqrt{3-2x^2}}$

37. $y = (x-1)\sqrt{x^2-2x+2}$ Sol. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^2-4x+3}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

38. $z = \dfrac{w}{\sqrt{1-4w^2}}$ Sol. $\dfrac{dz}{dw} = \dfrac{1}{(1-4w^2)^{3/2}}$

39. $y = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ Sol. $y' = \dfrac{1}{4\sqrt{x+x\sqrt{x}}}$

40. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$ Sol. $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$

41. $y = (x^2+3)^4(2x^3-5)^3$ Sol. $y' = 2x(x^2+3)^3(2x^3-5)^2(17x^3+27x-20)$

42. $s = \dfrac{t^2+2}{3-t^2}$ Sol. $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{10t}{(3-t^2)^2}$

43. $y = \left(\dfrac{x^3-1}{2x^3+1}\right)^4$ Sol. $y' = \dfrac{36x^2(x^3-1)^3}{(2x^3+1)^5}$

44. Calcular dy/dx por dos métodos diferentes y comprobar que se llega al mismo resultado: (*a*) $x = (1+2y)^3$ (*b*) $x = 1/(2+y)$.

Calcular dy/dx en los Problemas 45-48.

45. $y = \dfrac{u-1}{u+1}$, $u = \sqrt{x}$ Sol. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}$

46. $y = u^3+4$, $u = x^2+2x$ Sol. $\dfrac{dy}{dx} = 6x^2(x+2)^2(x+1)$

47. $y = \sqrt{1+u}$, $u = \sqrt{x}$ Sol. Ver Problema 39

48. $y = \sqrt{u}$, $u = v(3-2v)$, $v = x^2$ Ind: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dv}\cdot\dfrac{dv}{dx}$. (Sol. Ver Problema 36)

Calcular las derivadas indicadas en los Problemas 49-52.

49. $y = 3x^4-2x^2+x-5$; y''' Sol. $y''' = 72x$

50. $y = 1/\sqrt{x}$; $y^{(iv)}$ Sol. $y^{(iv)} = \dfrac{105}{16x^{9/2}}$

51. $f(x) = \sqrt{2-3x^2}$; $f''(x)$ Sol. $f''(x) = \dfrac{-6}{(2-3x^2)^{3/2}}$

52. $y = x/\sqrt{x-1}$, y'' Sol. $y'' = \dfrac{4-x}{4(x-1)^{5/2}}$

Calcular la derivada enésima en los Problemas 53-54.

53. $y = 1/x^2$ Sol. $y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n(n+1)!}{x^{n+2}}$

54. $f(x) = 1/(3x+2)$ Sol. $f^n(x) = (-1)^n\dfrac{3^n\cdot n!}{(3x+2)^{n+1}}$

55. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, demostrar:

(*a*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{d^2u}{dx^2}+\dfrac{d^2y}{du^2}\left(\dfrac{du}{dx}\right)^2$ (*b*) $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{d^3u}{dx^3}+3\dfrac{d^2y}{du^2}\cdot\dfrac{d^2u}{dx^2}\cdot\dfrac{du}{dx}+\dfrac{d^3y}{du^3}\left(\dfrac{du}{dx}\right)^3$

56. A partir de $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y'}$, deducir $\dfrac{d^2x}{dy^2} = -\dfrac{y''}{(y')^3}$ y $\dfrac{d^3x}{dy^3} = \dfrac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

Capítulo 6

Derivación de funciones implícitas

FUNCION IMPLICITA. Cuando una ecuación, definida en el campo de variación de sus variables se escribe en la forma $f(x, y) = 0$ se dice que y es una función implícita de x.

Ejemplo 1:

(*a*) La ecuación $xy + x - 2y - 1 = 0$, siendo $x \neq 2$, define la función $y = \dfrac{1-x}{x-2}$

(*b*) La ecuación $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ define la función $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ cuando $|x| \leq 3$ e $y \geq 0$ y la función $y = -\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ cuando $|x| \leq 3$ e $y \leq 0$.

Obsérvese que la elipse se puede considerar formada por dos arcos unidos en los puntos $(-3,0)$ y $(3,0)$.

Para hallar la derivada y' se puede seguir uno de los procedimientos que se detallan a continuación:

(*a*) Despejar y, si es posible, y derivar con respecto a x. Este procedimiento se debe evitar, a menos que se trate de una ecuación muy sencilla.

(*b*) Derivar la ecuación dada con respecto a x, teniendo en cuenta que y es función de x, y despejar y'. Esta forma de efectuar la derivación recibe el nombre de *derivación implícita*.

Ejemplo 2:

(*a*) Hallar y', en la ecuación $xy + x - 2y - 1 = 0$.

$$\text{Tendremos } x \cdot \frac{d}{dx}(y) + y \cdot \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x) - 2 \cdot \frac{d}{dx}(y) - \frac{d}{dx}(1) = \frac{d}{dx}(0)$$

o bien $xy' + y + 1 - 2y' = 0$; por tanto, $y' = \dfrac{1+y}{2-x}$.

(*b*) Hallar y', cuando $x = \sqrt{5}$, en la ecuación $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

$$\text{Tendremos, } 4 \cdot \frac{d}{dx}(x^2) + 9 \cdot \frac{d}{dx}(y^2) = 8x + 9 \cdot \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 8x + 18yy' = 0 \text{ e } y' = -\frac{4x}{9y}.$$

Para $x = \sqrt{5}$, $y = \pm 4/3$. En el punto $(\sqrt{5}, 4/3)$ del arco superior de la elipse, $y' = -\sqrt{5}/3$, y en el punto $(\sqrt{5}, -4/3)$ del arco inferior, $y' = \sqrt{5}/3$.

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR. Se pueden calcular por uno de los procedimientos siguientes:

(*a*) Derivar implícitamente la primera derivada y en el resultado, sustituir el valor de y' previamente calculado, repitiendo después la misma marcha.

Ejemplo 3: En el Ejemplo 2(*a*), $y' = \dfrac{1+y}{2-x}$. Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}(y') = y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+y}{2-x}\right) = \frac{(2-x)y' + 1 + y}{(2-x)^2} = \frac{(2-x)\left(\dfrac{1+y}{2-x}\right) + 1 + y}{(2-x)^2} = \frac{2+2y}{(2-x)^2}$$

(*b*) Derivar implícitamente la ecuación dada cuantas veces sea necesario hasta que aparezca la derivada que se quiere obtener, eliminando, acto seguido, todas las derivadas de orden inferior. Este procedimiento es el más recomendable cuando se trate de hallar una derivada de orden superior en un punto.

Ejemplo 4: Calcular el valor de y'' en el punto $(-1,1)$ en la curva $x^2y + 3y - 4 = 0$.
Derivando implícitamente con respecto a x dos veces, se obtiene,

$$x^2y' + 2xy + 3y' = 0 \text{ y } x^2y'' + 2xy' + 2xy' + 2y + 3y'' = 0$$

Sustituyendo $x = -1$, $y = 1$ en la primera relación, obtenemos $y' = \frac{1}{2}$.
Sustituyendo $x = -1$, $y = 1$, $y' = \frac{1}{2}$ en la segunda relación, obtenemos $y'' = 0$.

Problemas resueltos

1. Hallar y', en la ecuación $x^2y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$.

$$\frac{d}{dx}(x^2y) - \frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$x^2\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x^2) - x\frac{d}{dx}(y^2) - y^2\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$x^2y' + 2xy - 2xyy' - y^2 + 2x + 2yy' = 0 \qquad \text{e} \qquad y' = \frac{y^2 - 2x - 2xy}{x^2 + 2y - 2xy}$$

2. Hallar y' e y'', en la ecuación $x^2 - xy + y^2 = 3$.

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = 2x - xy' - y + 2yy'. = 0 \qquad \text{e} \qquad y' = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

$$y'' = \frac{(x-2y)\frac{d}{dx}(2x-y) - (2x-y)\frac{d}{dx}(x-2y)}{(x-2y)^2} = \frac{(x-2y)(2-y') - (2x-y)(1-2y')}{(x-2y)^2}$$

$$= \frac{3xy' - 3y}{(x-2y)^2} = \frac{3x\left(\frac{2x-y}{x-2y}\right) - 3y}{(x-2y)^2} = \frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(x-2y)^3} = \frac{18}{(x-2y)^3}$$

3. Hallar y' e y'', en la ecuación $x^3y + xy^3 = 2$ para $x = 1$.

$$x^3y' + 3x^2y + 3xy^2y' + y^3 = 0$$

y

$$x^3y'' + 3x^2y' + 3x^2y' + 6xy + 3xy^2y'' + 6xy(y')^2 + 3y^2y' + 3y^2y' = 0$$

Cuando $x = 1$, $y = 1$; sustituyendo en la primera ecuación, $y' = -1$.

Sustituyendo $x = 1$, $y = 1$, $y' = -1$ en la segunda ecuación, $y'' = 0$.

Problemas propuestos

4. Deducir la Fórmula 10, Capítulo 5, para $m = p/q$, siendo p y q números enteros, escribiendo $y = x^{p/q}$ en la forma $y^q = x^p$ y derivando con respecto a x.

5. Hallar y'', en las ecuaciones (a) $x + xy + y = 2$, (b) $x^3 - 3xy + y^3 = 1$. *Sol.* $y'' = \dfrac{2(1+y)}{(1+x)^2}$, (b) $y'' = -\dfrac{4xy}{(y^2-x)^3}$

6. Hallar y', y'', e y''' en (a) el punto $(2, 1)$ de $x^2 - y^2 - x = 1$, (b) el punto $(1, 1)$ de $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$. *Sol.* (a) $3/2, -5/4, 45/8$; (b) $1, 0, 0$

7. Hallar la pendiente de la tangente en el punto (x_0, y_0) de (a) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, (b) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, (c) $x^3 + y^3 - 6x^2y = 0$. *Sol.* (a) $-\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$, (b) $\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$, (c) $\dfrac{4x_0y_0 - x_0^2}{y_0^2 - 2x_0^2}$

8. Demostrar que las curvas $5y - 2x + y^3 - x^2y = 0$ y $2y + 5x + x^4 - x^3y^2 = 0$ se cortan en ángulo recto en el origen.

9. (a) El área total de un paralelepípedo recto cuya base es un cuadrado de lado y de altura x viene dada por $S = 2y^2 + 4xy$. Suponiendo que S es constante, calcular dy/dx sin despejar y.

   (b) El área total de un cilindro recto circular de radio r y altura h viene dada por $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$. Suponiendo que S es constante, calcular dr/dh. *Sol.* (a) $-\dfrac{y}{x+y}$; (b) $-\dfrac{r}{2r+h}$

10. En la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, demostrar que $\left|\dfrac{y''}{\{1+(y')^2\}^{3/2}}\right| = \dfrac{1}{r}$.

11. Siendo $S = \pi x(x + 2y)$ y $V = \pi x^2y$, demostrar que $dS/dx = 2\pi(x - y)$ cuando V es constante, y que $dV/dx = -\pi x(x-y)$ cuando S es constante.

Capítulo 7

Tangente y Normal

SI LA FUNCION $f(x)$ posee derivada finita, $f'(x_0)$, en el punto $x = x_0$, la curva $y = f(x)$ tiene una tangente en $P_0(x_0, y_0)$ cuya pendiente es

$$m = \operatorname{tag} \theta = f'(x_0)$$

Si $m = 0$, la curva tiene una tangente horizontal de ecuación $y = y_0$ en P_0, puntos A, C y E de la Fig. 7-1. En los demás casos la ecuación de la tangente en un punto a una curva es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Si $f(x)$ es continua en el punto $x = x_0$, pero $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \infty$ la curva tiene una tangente vertical de ecuación $x = x_0$, puntos B y D de la Figura 7-1.

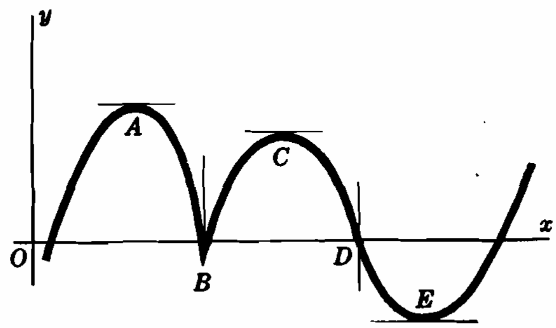


Fig. 7-1

La *normal* a una curva en uno de sus puntos es la recta que pasando por dicho punto es perpendicular a la tangente en él. La ecuación de la normal en el punto $P_0(x_0, y_0)$ es

$$x = x_0, \text{ si la tangente es horizontal}$$
$$y = y_0, \text{ si la tangente es vertical;}$$

en los demás casos,

$$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$$

(Ver Problemas 1-9.)

EL ANGULO DE INTERSECCION de dos curvas se define por el formado por sus tangentes en el punto de intersección.

Para hallar los ángulos de intersección de dos curvas:

(1) Se calculan los puntos de intersección, resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones.

(2) Se hallan las pendientes m_1 y m_2 de las tangentes a las curvas en cada uno de los puntos de intersección.

(3) Si $m_1 = m_2$, el ángulo de intersección es $\phi = 0°$,
si $m_1 = -1/m_2$, el ángulo de intersección es $\phi = 90°$;

en los demás casos, $$\operatorname{tag} \phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

Si $\operatorname{tag} \phi > 0$, el ángulo agudo de intersección es ϕ y
si $\operatorname{tag} \phi < 0$, el ángulo agudo de intersección es $180° - \phi$.

(Ver Problemas 10-12.)

LONGITUDES DE TANGENTE NORMAL, SUBTANGENTE Y SUBNORMAL. La *longitud de tangente* a una curva en uno de sus puntos se define como la longitud del segmento de tangente comprendido entre el punto de contacto y el eje x. La longitud de la proyección de este segmento sobre el eje x recibe el nombre de *longitud de subtangente.*

La *longitud de normal* se define como la longitud del segmento de normal comprendido entre el punto de tangencia y el eje x. La longitud de la proyección de este segmento sobre el eje x recibe el nombre de *longitud de subnormal.*

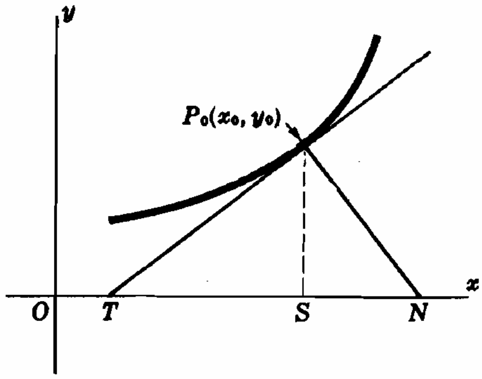


Fig. 7-2

Longitud de la subtangente $= TS = y_0/m$

Longitud de la subnormal $= SN = my_0$

Longitud de la tangente

$$= TP_0 = \sqrt{(TS)^2 + (SP_0)^2}$$

Longitud de la normal

$$= P_0N = \sqrt{(SN)^2 + (SP_0)^2}$$

Nota. Las longitudes de subtangente y subnormal son segmentos dirigidos. Algunos autores solamente consideran sus módulos, $|y_0/m|$ y $|my_0|$ respectivamente. Por ello, en las soluciones de los problemas no se han tenido en cuenta más que dichos módulos.

(Ver Problema 13.)

Problemas resueltos

1. Calcular los puntos de la curva $x^2 - xy + y^2 = 27$ en los que las tangentes son horizontales y verticales.

   Derivando, $y' = \dfrac{y - 2x}{2y - x}$.

   Tangentes horizontales: Igualando a cero el numerador de y', obtenemos $y = 2x$. Los puntos de tangencia son los de intersección de la recta $y = 2x$ con la curva dada. Resolviendo el sistema se obtienen los puntos (3,6) y (—3, —6).

   Tangentes verticales: Igualando a cero el denominador de y' resulta $x = 2y$. Los puntos de tangencia son los de intersección de la recta $x = 2y$ con la curva dada. Resolviendo el sistema se obtienen los puntos (6, 3) y (—6, —3).

2. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y = x^3 - 2x^2 + 4$ en el punto (2, 4).

   $f'(x) = 3x^2 - 4x$; la pendiente de la tangente en el punto (2, 4) es $m = f'(2) = 4$.

   La ecuación de la tangente es $y - 4 = 4(x - 2)$, o bien, $y = 4x - 4$.

   La ecuación de la normal es $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)$, o bien, $x + 4y = 18$.

3. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ en el punto (1, 1).

   $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x + 3y}{3x + 2y}$. La pendiente de la tangente en el punto (1, 1) es $m = -1$.

   La ecuación de la tangente es $y - 1 = -1(x - 1)$, o bien, $x + y = 2$.

   La ecuación de la normal es $y - 1 = 1(x - 1)$, o bien, $x - y = 0$.

4. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la elipse $4x^2 + 9y^2 = 40$, de pendiente $m = -2/9$.

   Sea $P_0(x_0, y_0)$ el punto de tangencia de la tangente buscada. Se tiene,

   (*a*) $4x_0^2 + 9y_0^2 = 40$, puesto que P_0 es un punto de la elipse.

   (*b*) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x}{9y}$. Para (x_0, y_0), $m = -\dfrac{4x_0}{9y_0} = -\dfrac{2}{9}$, con lo que $y_0 = 2x_0$.

   (*c*) Los puntos de tangencia son las soluciones del sistema de ecuaciones (*a*) y (*b*). Resolviendo dicho sistema se obtienen los puntos (1, 2) y (—1, —2).

   La ecuación de la tangente en el punto (1, 2) es $y - 2 = -2/9(x - 1)$, o bien, $2x + 9y = 20$.

   La ecuación de la tangente en el punto (—1 —2) es $y + 2 = -2/9(x + 1)$, o bien, $2x + 9y = -20$.

5. Hallar la ecuación de la tangente a la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$ en el punto $(2, -2)$.

Sea $P_0(x_0, y_0)$ el punto de tangencia de la recta buscada. Se tiene,

(a) $x_0^2 - y_0^2 = 16$, puesto que P_0 es un punto de la hipérbola.

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y}$. Para (x_0, y_0), $m = \dfrac{x_0}{y_0} = \dfrac{y_0 + 2}{x_0 - 2}$ = pendiente de la recta que une P_0 con $(2, -2)$; por tanto,

$$2x_0 + 2y_0 = x_0^2 - y_0^2 = 16 \text{ o sea } x_0 + y_0 = 8$$

(c) El punto de tangencia es la solución del sistema de ecuaciones (a) y (b). Resolviendo dicho sistema resulta el punto $(5, 3)$. La ecuación de la tangente es $y - 3 = \frac{5}{3}(x - 5)$, o bien $5x - 3y = 16$.

6. Hallar las ecuaciones de las rectas verticales que pasan por los puntos de las curvas (1) $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ y (2) $3y = 2x^3 + 9x^2 - 3x - 3$, en los que las tangentes a ellas son paralelas.

Sea $x = x_0$ la ecuación de la recta buscada.

En (1): $y' = 3x^2 + 4x - 4$; para $x = x_0$, $m = 3x_0^2 + 4x_0 - 4$.

En (2): $3y' = 6x^2 + 18x - 3$; para $x = x_0$, $m = 2x_0^2 + 6x_0 - 1$.

Igualando $3x_0^2 + 4x_0 - 4 = 2x_0^2 + 6x_0 - 1$, $x_0 = -1$ y 3. Las rectas son $x = -1$ y $x = 3$.

(a) Demostrar que la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 4px$ de pendiente $m \neq 0$ es $y = mx + p/m$.

(b) Demostrar que la ecuación de la tangente de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ en el punto $P_0(x_0, y_0)$ es $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$

(a) $y' = 2p/y$. Si $P_0(x_0, y_0)$ es el punto de tangencia, se tiene $y_0^2 = 4px_0$ y $m = 2p/y_0$. Así pues, $y_0 = 2p/m$, $x_0 = \frac{1}{4}y_0^2/p = p/m^2$ y la ecuación de la tangente, $y - 2p/m = m(x - p/m^2)$, o bien, $y = mx + p/m$.

(b) $y' = -\dfrac{b^2x}{a^2y}$. En P_0, $m = -\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$ y la ecuación de la tangente es $y - y_0 = -\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$

o sea $b^2x_0x + a^2y_0y = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$.

8. Demostrar que la tangente a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ en el punto $P_0(x_0, y_0)$ es la bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de P_0.

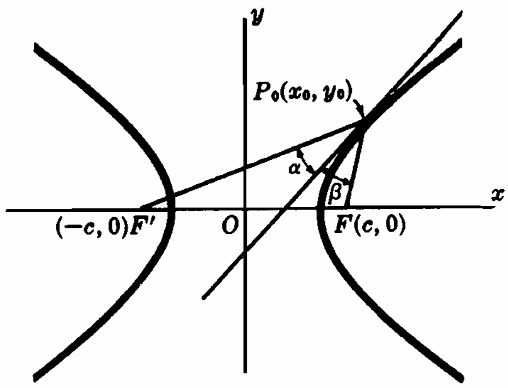


Fig. 7-3

En el punto P_0 la pendiente de la tangente a la hipérbola es b^2x_0/a^2y_0 y las pendientes de los radios vectores P_0F' y P_0F son $y_0/(x_0 + c)$ e $y_0/(x_0 - c)$, respectivamente. Así pues,

$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0} - \dfrac{y_0}{x_0 + c}}{1 + \dfrac{b^2x_0}{a^2y_0} \cdot \dfrac{y_0}{x_0 + c}} = \frac{(b^2x_0^2 - a^2y_0^2) + b^2cx_0}{(a^2 + b^2)x_0y_0 + a^2cy_0} = \frac{a^2b^2 + b^2cx_0}{c^2x_0y_0 + a^2cy_0} = \frac{b^2(a^2 + cx_0)}{cy_0(a^2 + cx_0)} = \frac{b^2}{cy_0}$$

puesto que $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$ y $a^2 + b^2 = c^2$, y

$$\operatorname{tag} \beta = \frac{\dfrac{y_0}{x_0 - c} - \dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}}{1 + \dfrac{b^2x_0}{a^2y_0} \cdot \dfrac{y_0}{x_0 - c}} = \frac{b^2cx_0 - (b^2x_0^2 - a^2y_0^2)}{(a^2 + b^2)x_0y_0 - a^2cy_0} = \frac{b^2cx_0 - a^2b^2}{c^2x_0y_0 - a^2cy_0} = \frac{b^2}{cy_0}$$

Luego, como $\operatorname{tag} \alpha = \operatorname{tag} \beta$, $\alpha = \beta$.

9. Demostrar que la cuerda que une los puntos de contacto de las tangentes a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ trazadas desde un punto de la directriz pasa por el foco correspondiente.

Sea $P_0(x_0, y_0)$ el punto desde el que se trazan las tangentes a la elipse y $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ los correspondientes puntos de contacto. Las ecuaciones de las tangentes en P_1 y P_2 son $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$ y $b^2x_2x + a^2y_2y = a^2b^2$. Como ambas pasan por P_0, se verifican $b^2x_1x_0 + a^2y_1y_0 = a^2b^2$ y $b^2x_2x_0 + a^2y_2y_0 = a^2b^2$. La recta $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$, que pasa por P_1 y P_2, es la cuerda de contacto. Sea $P(a^2/c, \bar{y})$ un punto de la directriz del lado derecho. La ecuación de la cuerda de contacto que pasa por P tiene de ecuación $(b^2a^2/c)x + a^2\bar{y}y = a^2b^2$ y, como se puede comprobar, pasa por el foco correspondiente $F(c, 0)$.

10. Hallar el ángulo agudo de intersección de las curvas (*1*) $y^2 = 4x$ y (*2*) $2x^2 = 12 - 5y$.

(*a*) Los puntos de intersección de las curvas son $P_1(1, 2)$ y $P_2(4, -4)$.

(*b*) En (*1*), $y' = 2/y$; en (*2*), $y' = -4x/5$.

En $P_1(1, 2)$, $m_1 = 1$ y $m_2 = -4/5$; en $P_2(4, -4)$, $m_1 = -1/2$ y $m_2 = -16/5$.

(*c*) En P_1: $\operatorname{tag}\phi = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} = \dfrac{1 + 4/5}{1 - 4/5} = 9$ y $\phi = 83°40'$ es el ángulo agudo de intersección.

En P_2: $\operatorname{tag}\phi = \dfrac{-1/2 + 16/5}{1 + 8/5} = 1{,}0385$ y $\phi = 46°5'$ es el ángulo agudo de intersección.

11. Hallar los ángulos agudos de intersección de las curvas (*1*) $2x^2 + y^2 = 20$ y (*2*) $4y^2 - x^2 = 8$.

Los puntos de intersección son $(\pm 2\sqrt{2}, 2)$ y $(\pm 2\sqrt{2}, -2)$.

En (*1*), $y' = -2x/y$, y en (*2*), $y' = x/4y$.

En el punto $(2\sqrt{2}, 2)$, $m_1 = -2\sqrt{2}$ y $m_2 = \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Como $m_1m_2 = -1$, el ángulo de intersección es $\phi = 90°$ (es decir, las curvas son *ortogonales*). Por simetría se deduce que las curvas son ortogonales en cada uno de sus puntos de intersección.

12. El cable de un puente colgante está unido a dos pilares separados entre sí una distancia de 250 m. Suponiendo que adquiere forma de parábola con su punto más bajo a una distancia de 50 m del punto de suspensión, calcular el ángulo que forma el cable con el pilar.

Se elige como origen el vértice de la parábola como se representa en la Fig. 7-4.

La ecuación de la parábola es $y = \dfrac{2}{625}x^2$, y $y' = \dfrac{4x}{625}$.

En el punto (125, 50), $m = 4(125/625) = 0{,}8000$ y $\theta = 38°40'$.

El ángulo pedido es $\phi = 90° - \theta = 51°20'$.

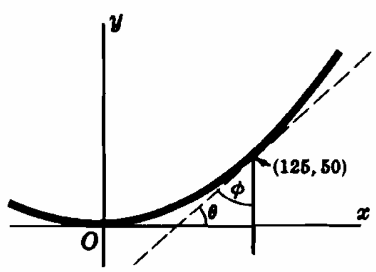


Fig. 7-4

13. Hallar la longitud de la subtangente, subnormal tagente y normal a la curva $xy + 2x - y = 5$ en el punto (2, 1).

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2 + y}{1 - x}$; en el punto (2, 1), $m = -3$.

Longitud de la subtangente $= y_0/m = -1/3$. Longitud de la subnormal $= my_0 = -3$.

Longitud de la tangente $= \sqrt{1/9 + 1} = \sqrt{10}/3$. Longitud de la normal $= \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$.

Problemas propuestos

14. Hallar en qué puntos de la curva $x^2 + 4xy + 16y^2 = 27$ la tangente es horizontal o vertical.
Sol. T.H. en $(3, -3/2)$ y $(-3, 3/2)$
T.V. en $(6, -3/4)$ y $(-6, 3/4)$

15. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $x^2 - y^2 = 7$ en el punto $(4, -3)$.
Sol. $4x + 3y = 7$; $3x - 4y = 24$.

16. Hallar en qué punto la tangente a la curva $y = x^3 + 5$ es (*a*) paralela a la recta $12x - y = 17$, (*b*) perpendicular a la recta $x + 3y = 2$. *Sol.* (*a*) $(2, 13)$, $(-2, -3)$; (*b*) $(1, 6)$, $(-1, 4)$.

17. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la curva $9x^2 + 16y^2 = 52$ paralelas a la recta $9x - 8y = 1$.
Sol. $9x - 8y = \pm 26$.

18. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $xy = 1$ trazadas desde el punto $(-1, 1)$.
Sol. $y = (2\sqrt{2} - 3)x + 2\sqrt{2} - 2$; $y = -(2\sqrt{2} + 3)x - 2\sqrt{2} - 2$.

19. Demostrar que la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 4px$ en un punto de ella $P(x_0, y_0)$ es, $yy_0 = 2p(x + x_0)$.

20. Demostrar que las ecuaciones de las tangentes a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ de pendiente igual a m son, $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$.

21. Dada la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, demostrar que (*a*) la ecuación de la tangente en un punto de ella, $P(x_0, y_0)$, es $b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$, (*b*) las ecuaciones de las tangentes de pendiente m son $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$.

22. Demostrar que la normal a una parábola en un punto de ella P_0 es la bisectriz del ángulo formado por el radio vector de dicho punto y la paralela al eje de la parábola trazada por él.

23. Demostrar que toda tangente a una parábola excepto la del vértice, corta a la directriz y al *latus rectum* (N. del T.: Cuerda perpendicular al eje por el foco) en puntos que equidistan del foco.

24. Demostrar que la cuerda que une los puntos de contacto de las tangentes a una parábola trazada desde un punto de la directriz, pasa por el foco.

25. Demostrar que la normal a una elipse en un punto de ella P_0 es bisectriz del ángulo que forman los radios vectores de dicho P_0.

26. Demostrar que la cuerda que une los puntos de contacto de las tangentes a una hipérbola trazada desde un punto de una directriz pasa por el foco correspondiente.

27. Demostrar que el punto de contacto de una tangente a una hipérbola es el punto medio del segmento de tangente comprendido entre las asíntotas.

28. Demostrar que la pendiente de la tangente a una hipérbola o una elipse en uno de los extremos de su *latus rectum* (*N. del T.*: Cuerda perpendicular al eje—mayor en la elipse y transversal en la hipérbola— por el foco) es numéricamente igual a su excentricidad.

29. Demostrar que (*a*) la suma de las coordenadas en el origen de una tangente cualquiera a la curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ es constante, (*b*) la suma de los cuadrados de las coordenadas en el origen de una tangente cualquiera a la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, es constante.

30. Hallar los ángulos agudos de intersección de las circunferencias $x^2 - 4x + y^2 = 0$ y $x^2 + y^2 = 8$. *Sol.* 45.°

31. Demostrar que las curvas $y = x^3 + 2$ e $y = 2x^2 + 2$ tienen una tangente común en el punto $(0, 2)$ y que se cortan en el punto $(2, 10)$ formando un ángulo $\phi = \text{arc tag } 4/97$.

32. Demostrar que la elipse $4x^2 + 9y^2 = 45$ y la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 5$ son ortogonales.

33. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal, así como las longitudes de subtangentes, subnormal, tangente y normal, a la parábola $y = 4x^2$ en el punto $(-1, 4)$.
Sol. $y + 8x + 4 = 0$, $8y - x - 33 = 0$; $-\frac{1}{2}$, -32, $\frac{1}{2}\sqrt{65}$, $4\sqrt{65}$.

34. Calcular la longitud de subtangente, subnormal, tangente y normal a la hipérbola $3x^2 - 2y^2 = 10$ en el punto $(-2, 1)$.
Sol. $-1/3$, -3, $\sqrt{10}/3$, $\sqrt{10}$.

35. Determinar en qué puntos de la curva $y = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$ sus tangentes pasan por el origen.
Sol. $x = -3$, -1, $3/4$.

Capítulo 8

Máximos y mínimos

FUNCION CRECIENTE Y DECRECIENTE. Una función $f(x)$ es *creciente* en un punto $x = x_0$ cuando, dado un h positivo e infinitamente pequeño, se verifica: $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$. Análogamente, $f(x)$ es *decreciente* en un punto $x = x_0$ cuando, dado un h positivo e infinitamente pequeño, se verifica: $f(x_0 - h) > f(x_0) > f(x_0 + h)$.

Si $f'(x_0) > 0$, la función $f(x)$ es creciente en el punto $x = x_0$ y si $f'(x_0) < 0$, es decreciente en dicho punto. (Ver Problema 17.) Cuando $f'(x_0) = 0$, diremos que la función es *estacionaria* en el punto $x = x_0$.

Una función es creciente (decreciente) en un intervalo, cuando es creciente (decreciente) o estacionaria en cada uno de los puntos del mismo.

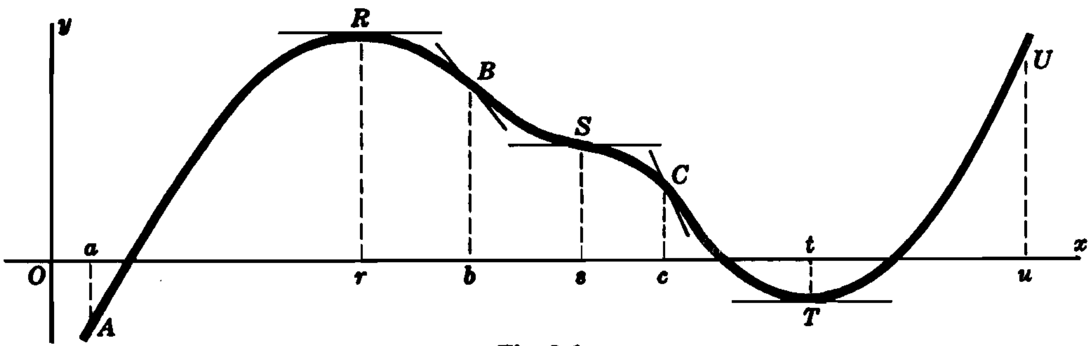


Fig. 8-1

En la Fig. 8-1, la función $y = f(x)$ es creciente en los intervalos $a < x < r$ y $t < x < u$, decreciente en el $r < x < t$ y estacionaria en los puntos $x = r$, $x = s$ y $x = t$. La curva tiene tangente horizontal en los puntos R, S y T. Los valores de x, (r, s y t) para los cuales la función $f(x)$ es estacionaria ($f'(x) = 0$), reciben el nombre de *valores críticos* y los puntos correspondientes de la curva (R, S y T) el de *puntos críticos*.

MAXIMOS Y MINIMOS RELATIVOS DE UNA FUNCION. Una función $y = f(x)$ tiene un *máximo* (*mínimo*) *relativo* en un punto $x = x_0$, cuando $f(x_0)$ es mayor (menor) que los valores de la función para los puntos inmediatamente anteriores y posteriores al considerado. (Ver Problema 1.)

En la Fig. 8-1, $R[r, f(r)]$ es un máximo relativo de la curva puesto que $f(r) > f(x)$ en el entorno $0 < |x - r| < \delta$. En estas condiciones, $y = f(x)$ tiene un *máximo relativo* $[= f(r)]$ en $x = r$. En la misma figura, $T[t, f(t)]$ es un mínimo relativo de la curva puesto que $f(t) < f(x)$ en el entorno $0 < |x - t| < \delta$. Por tanto, $y = f(x)$ tiene un *mínimo relativo* $[= f(t)]$ en $x = t$. Obsérvese que R es el punto de unión de un arco AR ascendente $[f'(x) > 0]$ y otro RB descendente $[f'(x) < 0]$, mientras que T une un arco CT descendente $[f'(x) < 0]$ con otro TU ascendente $[f'(x) > 0]$. En el punto S se unen dos arcos descendentes y, por consiguiente, en él no habrá ni máximo ni mínimo relativo.

Si la función $y = f(x)$ admite derivada en el intervalo $a \leq x \leq b$, y $f(x)$ tiene un máximo (mínimo) relativo en el punto $x = x_0$, siendo $a < x_0 < b$, se verifica $f'(x_0) = 0$. (Ver Problema 18.)

Para determinar los máximos (mínimos) relativos [o simplemente máximos (mínimos)] de una función $f(x)$ continua así como su derivada se puede seguir el siguiente proceso:

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

1. Resolver la ecuación $f'(x_0) = 0$ para calcular los valores críticos.
2. Representar estos valores críticos sobre el eje de abscisas de un sistema coordenado (escala numérica); de esta manera se han establecido un cierto número de intervalos.
3. Determinar el signo de $f'(x)$ en cada uno de los intervalos anteriores.
4. Para cada uno de los valores críticos $x = x_0$:

$f(x)$ tiene un máximo $[= f(x_0)]$, si $f'(x)$ pasa de $+$ a $-$,

$f(x)$ tiene un mínimo $[= f(x_0)]$, si $f'(x)$ pasa de $-$ a $+$,

$f(x)$ no tiene ni máximo ni mínimo en el punto $x = x_0$, si $f'(x)$ no cambia de signo.

(Ver Problemas 2-5.)

UNA FUNCION $y = f(x)$ puede tener máximos o mínimos $[= f(x_0)]$ aunque no exista $f'(x_0)$. Los valores, $x = x_0$, para los cuales $f(x)$ está definida pero no existe $f'(x)$, también reciben el nombre de valores críticos y junto con aquellos otros para los cuales $f'(x) = 0$, han de servir para establecer los intervalos del apartado 2 del párrafo anterior.

(Ver Problemas 6-8.)

Finalmente, se pueden presentar otros casos —de los que aquí no trataremos— en los que $f(x_0)$ tenga máximo (mínimo) aunque no exista un intervalo, $x_0 - \delta < x < x_0$, para el cual $f'(x)$ sea positiva (negativa) ni otro, $x_0 < x < x_0 + \delta$, para el que $f'(x)$ sea negativa (positiva).

CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. Un arco de curva $y = f(x)$ es cóncavo si en cada uno de sus puntos está situado por encima de la tangente. Al aumentar x, $f'(x)$ o aumenta sin cambiar de signo (como en el intervalo $b < x < s$ de la Fig. 8-1) o cambia de signo pasando de negativa a positiva (como en el intervalo $c < x < u$). En cualquier caso, la pendiente $f'(x)$ aumenta y $f''(x) > 0$.

Un arco de curva $y = f(x)$ es convexo, si en cada uno de sus puntos el arco está situado por debajo de la tangente. Al aumentar x, $f'(x)$ o disminuye sin cambiar de signo (como en el intervalo $s < x < c$) o cambia de signo pasando de positiva a negativa (como en el intervalo $a < x < b$). En cualquier caso, la pendiente $f'(x)$ disminuye y $f''(x) < 0$.

PUNTO DE INFLEXION. Es un punto en el cual la curva pasa de cóncava a convexa o viceversa. En la Fig. 8-1, los puntos B, S y C son de inflexión.

Una curva $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto $x = x_0$

si $f''(x_0) = 0$ ó no está definida y

si $f''(x)$ cambia de signo en un entorno de $x = x_0$.

La última condición equivale a $f'''(x_0) \neq 0$ cuando existe la tercera derivada $f'''(x_0)$.

(Ver Problemas 9-13.)

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

1. Resolver la ecuación $f'(x) = 0$ para calcular los valores críticos.
2. Para cada uno de los valores críticos $x = x_0$:

$f(x)$ tiene un máximo $[= f(x_0)]$, si $f''(x_0) < 0$.
$f(x)$ tiene un mínimo $[= f(x_0)]$, si $f''(x_0) > 0$,
si $f''(x_0) = 0$ ó se hace infinito, nada se puede afirmar.

En este último caso hay que recurrir al criterio de la primera derivada.

(Ver Problemas 14-16.)

Problemas resueltos

1. (*a*) $y = -x^2$ tiene un máximo relativo $(= 0)$ en $x = 0$, puesto que $y = 0$ para $x = 0$ e $y < 0$ para $x \neq 0$.

(*b*) $y = (x - 3)^2$ tiene un mínimo relativo $(= 0)$ en $x = 3$, puesto que $y = 0$ para $x = 3$ e $y > 0$ para $x \neq 3$.

(*c*) $y = \sqrt{25 - 4x^2}$ tiene un máximo relativo $(= 5)$ en $x = 0$, puesto que $y = 5$ para $x = 0$ e $y < 5$ en el intervalo $-1 < x < 1$.

(*d*) $y = \sqrt{x - 4}$ no tiene ni máximos ni mínimos relativos. [Algunos autores definen los máximos y mínimos relativos, de forma que esta función tiene un máximo relativo en el punto $x = 4$. Ver Problema 30.]

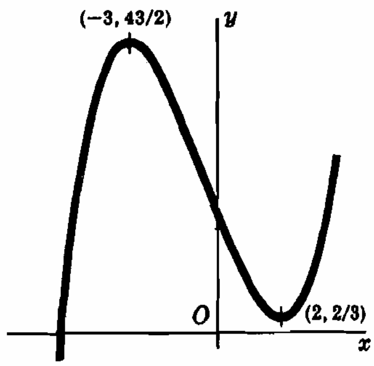


Fig. 8-2

2. Dada la función $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$, calcular:

(*a*) Puntos críticos.
(*b*) Intervalos en los cuales y es creciente y decreciente.
(*c*) Máximos y mínimos de y.

(*a*) $y' = x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$

Resolviendo $y' = 0$, obtenemos los valores críticos $x = -3, 2$.
Los puntos críticos son $(-3, 43/2)$, $(2, 2/3)$.

(*b*) Cuando y' es positiva, y es creciente; cuando y' es negativa, y es decreciente.

Cuando $x < -3$, por ejemplo $x = -4$, $y' = (-)(-) = +$, e y es creciente.
Cuando $-3 < x < 2$, por ejemplo $x = 0$, $y' = (+)(-) = -$, e y es decreciente.
Cuando $x > 2$, por ejemplo $x = 3$, $y' = (+)(+) = +$, e y es creciente.

En el siguiente diagrama se representan estos resultados.

$x < -3$	Máx. $x = -3$	$-3 < x < 2$	Mín. $x = 2$	$x > 2$
$y' = +$ y creciente		$y' = -$ y decreciente		$y' = +$ y creciente

(*c*) Veamos si hay máximo o mínimo en los valores críticos $x = -3, 2$.

Al ir aumentando x al pasar por -3, y' cambia de signo, de $+$ a $-$. Por tanto en $x = -3$, y tiene un máximo, igual a $43/2$.

Al ir aumentando x al pasar por 2, y' cambia de signo, de $-$ a $+$. Por tanto, en $x = 2$, y tiene un mínimo igual a $2/3$,

3. Dada la función $y = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$, calcular:

(*a*) Intervalos en los que y es creciente y decreciente.
(*b*) Máximos y mínimos de y.

$y' = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = 2(x + 2)(2x + 1)(x - 1)$
Resolviendo $y' = 0$ obtenemos los valores críticos $x = -2, -\frac{1}{2}, 1$.

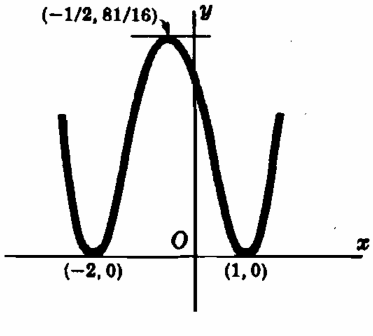


Fig. 8-3

(*a*) Cuando $x < -2$, $y' = 2(-)(-)(-) = -$, e y es decreciente.
Cuando $-2 < x < -\frac{1}{2}$, $y' = 2(+)(-)(-) = +$, e y es creciente.
Cuando $-\frac{1}{2} < x < 1$, $y' = 2(+)(+)(-) = -$, e y es decreciente.
Cuando $x > 1$, $y' = 2(+)(+)(+) = +$, e y es creciente.

En el siguiente diagrama se representan estos resultados.

$x < -2$	Mín. $x = -2$	$-2 < x < -\frac{1}{2}$	Máx. $x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	Mín. $x = 1$	$x > 1$
$y' = -$ y decrece		$y' = +$ y crece		$y' = -$ y decrece		$y' = +$ y crece

(*b*) Veamos si hay máximo o mínimo en los valores críticos $x = -2, -\frac{1}{2}, 1$.

Al ir aumentando x al pasar por -2, y' cambia de signo de $-$ a $+$. Por tanto, en $x = -2$, y tiene un mínimo igual a 0.

Al ir aumentando x al pasar por $-\frac{1}{2}$, y' cambia de signo, de $+$ a $-$. Por tanto, en $x = -\frac{1}{2}$, y tiene un máximo igual a 81/16.

Al ir aumentando x al pasar por 1, y' cambia de signo, de $-$ a $+$. Por tanto, en $x = 1$, y tiene un mínimo igual a 0.

4. Demostrar que la función $y = x^3 - 8$ no tiene máximos ni mínimos.

$y' = 3x^2$. De la ecuación $y' = 0$, se obtiene $x = 0$.
Para $x < 0$ y $x > 0$, $y' > 0$. Por tanto, no hay máximos ni mínimos.
En $x = 0$ la curva presenta un punto de inflexión.

5. Hallar los máximos y mínimos de la función $y = f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$, determinando los intervalos en los que la función es creciente y decreciente.

$f'(x) = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$. Como $f(2)$ no está definida (e.d., $f(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a 2) no hay valores críticos. Sin embargo, para determinar los intervalos en los que la función es creciente y decreciente se acude al punto $x = 2$.

$f'(x) < 0$ siempre que $x \neq 2$. Por tanto, $f(x)$ es decreciente en los intervalos $x < 2$ y $x > 2$.

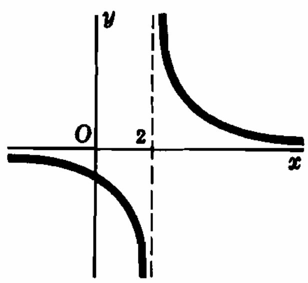


Fig. 8-4

6. Hallar los máximos y mínimos de la función $f(x) = 2 + x^{2/3}$ determinando los intervalos en los que la función es creciente y decreciente.

$f'(x) = \dfrac{2}{3x^{1/3}}$. El valor crítico es $x = 0$, ya que $f'(x)$ tiende a infinito cuando x tiende a 0.

Para $x < 0$, $f'(x) < 0$, y $f(x)$ es decreciente.
Para $x > 0$, $f'(x) > 0$, y $f(x)$ es creciente.
Por tanto, en $x = 0$, la función tiene un mínimo igual a 2.

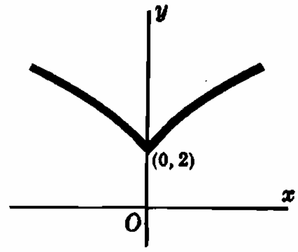


Fig. 8-5

7. Hallar los máximos y mínimos de la función $y = x^{4/3}(1 - x)^{1/3}$.

Derivando, $y' = \dfrac{x^{1/3}(4 - 5x)}{3(1 - x)^{2/3}}$ y los valores críticos son $x = 0$, 4/5 y 1.

Para $x < 0$, $y' < 0$; en el intervalo $0 < x < 4/5$, $y' > 0$; en $4/5 < x < 1$, $y' < 0$.
Para $x > 1$, $y' < 0$. La función tiene un mínimo (igual a 0) en $x = 0$ y un máximo (igual a $\frac{4}{25}\sqrt[3]{20}$) en $x = 4/5$.

8. Hallar los máximos y mínimos de la función $y = |x|$.

La función está definida para todos los valores de x y existe su derivada en todos ellos excepto en $x = 0$. (Ver Problema 11, Capítulo 4). Por tanto, $x = 0$ es un valor crítico. Para $x < 0$, $f'(x) = -1$, mientras que para $x > 0$, $f'(x) = +1$. La función tiene un mínimo ($= 0$) en $x = 0$. Dibujando la función se llegaría de forma inmediata a este resultado.

9. Determinar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función $y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$.

$$y' = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 12$$
$$y'' = 36x^2 - 60x - 24 = 12(3x + 1)(x - 2)$$

Resolviendo $y'' = 0$ obtenemos los posibles puntos de inflexión $x = -1/3, 2$.

Cuando $x < -1/3$, $y'' = +$, y el arco es cóncavo.
Cuando $-1/3 < x < 2$, $y'' = -$, y el arco es convexo.
Cuando $x > 2$, $y'' = +$, y el arco es cóncavo.

$x < -1/3$	$x = -1/3$	$-1/3 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$y'' = +$ cóncavo		$y'' = -$ convexo		$y'' = +$ cóncavo

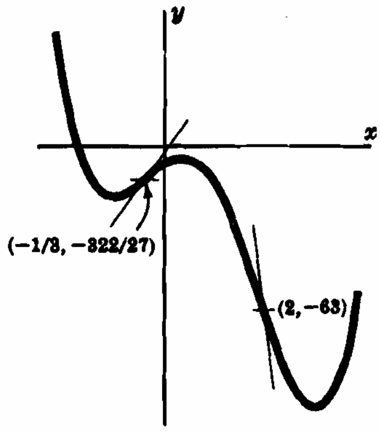


Fig. 8-6

Los puntos de inflexión son $(-1/3, -322/27)$ y $(2, -63)$, ya que y'' cambia de signo en $x = -1/3$ y $x = 2$.

10. Determinar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función $y = x^4 - 6x + 2$. Ver Fig. 8-7.

$y'' = 12x^2$. En $x = 0$ puede presentar un punto de inflexión.

En los intervalos $x < 0$ y $x > 0$, $y'' > 0$; los arcos son cóncavos. El punto $P(0, 2)$ no es de inflexión.

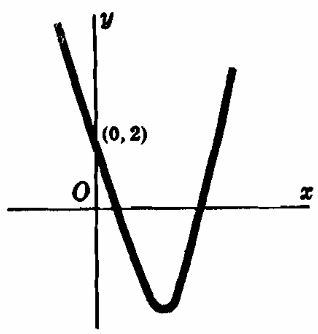


Fig. 8-7

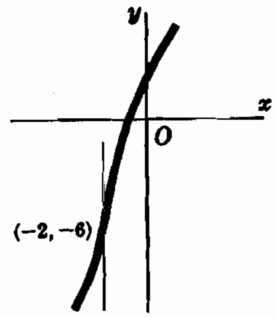


Fig. 8-8

11. Determinar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función $y = 3x + (x + 2)^{3/5}$. Ver Fig. 8-8.

$$y' = 3 + \frac{3}{5(x + 2)^{2/5}} \qquad y'' = \frac{-6}{25(x + 2)^{7/5}}$$

En $x = -2$, puede presentar un punto de inflexión.

Para $x > -2$, $y'' < 0$; el arco es convexo.
Para $x < -2$, $y'' > 0$; el arco es cóncavo.

El punto $(-2, -6)$ es un punto de inflexión.

12. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la curva $y = f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$ en sus puntos de inflexión.

$$y = f(x) = x^4 - 6x^3 + 12^2 - 8x$$

Para $x = x_0$ existe un punto de inflexión si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$.

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8$$

$$f''(x) = 12x^2 - 36x + 24 = 12(x-1)(x-2)$$

$$f'''(x) = 24x - 36 = 12(2x-3)$$

Los posibles puntos de inflexión son $x = 1, 2$. Como $f'''(1) \neq 0$ y $f'''(2) \neq 0$, los puntos $(1, -1)$ y $(2, 0)$ son de inflexión:

En el punto $(1, -1)$, la pendiente $m = f'(1) = 2$ y la ecuación de la tangente es

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{o sea} \quad y + 1 = 2(x-1) \quad \text{o} \quad y = 2x - 3$$

En el punto $(2, 0)$, la pendiente $m = f'(2) = 0$, y la ecuación de la tangente es $y = 0$.

13. Demostrar que los puntos de inflexión de $y = \dfrac{a-x}{x^2+a^2}$ están situados sobre una recta y deducir su ecuación.

$$y' = \frac{x^2 - 2ax - a^2}{(x^2+a^2)^2} \qquad \text{e} \qquad y'' = -2\,\frac{x^3 - 3ax^2 - 3a^2x + a^3}{(x^2+a^2)^3}$$

Los valores de $x = -a, a(2 \pm \sqrt{3})$, son las raíces de la ecuación $x^3 - 3ax^2 - 3a^2x + a^3 = 0$; los puntos de inflexión son: $[-a, 1/a]$, $[a(2+\sqrt{3}), (1-\sqrt{3})/4a]$, $[a(2-\sqrt{3}), (1+\sqrt{3})/4a]$. La pendiente de la recta que pasa por dos cualesquiera de estos puntos es $-1/4a^2$, y la ecuación de la recta que los une, $x + 4a^2y = 3a$.

14. Hallar los máximos y mínimos de la función $f(x) = x(12-2x)^2$ aplicando el criterio de la segunda derivada.

(*a*) $f'(x) = 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x-2)(x-6)$. Los valores críticos son $x = 2, 6$.

(*b*) $f''(x) = 12(2x - 8) = 24(x-4)$.

(*c*) $f''(2) < 0$. Por tanto $f(x)$ tiene un máximo igual a 128 para $x = 2$.
$f''(6) > 0$. Por tanto $f(x)$ tiene un mínimo igual a 0 para $x = 6$.

15. Hallar los máximos y mínimos de la función $y = x^2 + \dfrac{250}{x}$ aplicando el criterio de la segunda derivada.

(*a*) $y' = 2x - \dfrac{250}{x^2} = \dfrac{2(x^3 - 125)}{x^2}$. El valor crítico es $x = 5$.

(*b*) $y'' = 2 + \dfrac{500}{x^3}$

(*c*) $y'' > 0$ para $x = 5$. Por tanto tiene un mínimo igual a 75 para $x = 5$.

16. Hallar los máximos y mínimos de la función $y = (x-2)^{2/3}$.

(*a*) $y' = \dfrac{2}{3}(x-2)^{-1/3} = \dfrac{2}{3(x-2)^{1/3}}$. El valor crítico es $x = 2$.

(*b*) $y'' = -\dfrac{2}{9}(x-2)^{-4/3} = -\dfrac{2}{9(x-2)^{4/3}}$

(*c*) Como y'' tiende a infinito cuando x tiende a 2, hay que acudir al criterio de la primera derivada. Para $x < 2$, $y' < 0$; para $x > 2$, $y' > 0$. Por tanto, y presenta un mínimo relativo, igual a 0, en el punto $x = 2$.

17. Una función $f(x)$ es creciente en el punto $x = x_0$, si, dado un $h > 0$ y suficientemente pequeño, se verifica: $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$.

Demostrar que si $f'(x_0) > 0$, la función $f(x)$ es creciente en el punto $x = x_0$.

Como $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) > 0$, tendremos $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ para un $|\Delta x|$ suficientemente pequeño, Problema 4, Capítulo 3.

Si $\Delta x < 0$, $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$, y haciendo $\Delta x = -h$, $f(x_0 - h) < f(x_0)$. Si $\Delta x > 0$, por ejemplo $\Delta x = h$, $f(x_0 + h) > f(x_0)$. Es decir, $f(x_0 - h) < f(x_0) < f(x_0 + h)$, que es lo establecido en la definición.

Ver Problema 33 para una función decreciente.

18. Demostrar que si $y = f(x)$ admite derivada en el intervalo $a \leq x \leq b$, y $f(x)$ presenta un máximo relativo en el punto $x = x_0$, siendo $a < x_0 < b$, se verifica $f'(x_0) = 0$.

Como $f(x)$ presenta un máximo relativo en $x = x_0$, para todo Δx, siendo $|\Delta x|$ suficientemente pequeño,

$$f(x_0 + \Delta x) < f(x_0) \qquad \text{y} \qquad f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$$

Ahora bien cuando $\Delta x < 0$, $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ y $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0$.

y cuando $\Delta x > 0$, $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$ y $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0$.

Por tanto, $0 \leq f'(x_0) \leq 0$, y $f'(x_0) = 0$, como se quería demostrar. Ver Problema 34 para el mínimo relativo.

19. Demostrar el criterio de la segunda derivada para hallar máximos y mínimos: Si $f(x)$ y $f'(x)$ admiten derivada en el intervalo $a \leq x \leq b$, el punto $x = x_0$, siendo $a < x_0 < b$, representa un valor crítico de $f(x)$, y $f''(x_0) > 0$, la función $f(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = x_0$.

Como $f''(x_0) > 0$, $f'(x)$ es creciente en $x = x_0$ y existirá un $h > 0$ tal, que $f'(x_0 - h) < f'(x_0) < f'(x_0 + h)$. Por tanto, para valores de x inferiores a x_0, $f'(x) < f'(x_0)$, y para valores de x superiores a x_0, $f'(x) > f'(x_0)$. Ahora bien, como $f'(x_0) = 0$, $f'(x) < 0$ para $x < x_0$, y $f'(x) > 0$ para $x > x_0$. Estas son las condiciones (ver Problema 18) que aseguran la existencia de un mínimo relativo de la función $f(x)$ en el punto $x = x_0$. Se deja para el alumno, la demostración del teorema análogo para el máximo relativo.

20. Consideremos el problema de situar sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ un punto (X, Y) cuya distancia a uno dado $P(a, 0)$, siendo $a > 0$, sea mínima. De la expresión que da la distancia entre dos puntos, se deduce $D^2 = (X - a)^2 + Y^2$, y por pertenecer el punto (X, Y) a la hipérbola, $X^2 - Y^2 = 1$.

Expresando D^2 en función X solamente, resulta:

$$f(X) = (X - a)^2 + X^2 - 1 = 2X^2 - 2aX + a^2 - 1$$

cuyo valor crítico de esta función es $X = \frac{1}{2}a$.

Si tomamos $a = \frac{1}{2}$, no habrá ningún punto sobre la hipérbola, porque Y se hace imaginario para el valor crítico $X = \frac{1}{4}$. Dibujando la figura correspondiente se vería claramente que el punto de la hipérbola más próximo al $P(\frac{1}{2}, 0)$ es el $V(1, 0)$. Por tanto, lo que se trata en este caso es hallar el mínimo de la función $f(X) = (X - \frac{1}{2})^2 + X^2 - 1$ con la condición de que $X \geq 1$. (Obsérvese que esta condición no la lleva implícitamente la función $f(X)$. Esta función, sin poner condición alguna, presenta un mínimo relativo en el punto $X = \frac{1}{4}$.) En el intervalo $X \geq 1$, $f(X)$ tiene un mínimo absoluto en el extremo $X = 1$, que no es un mínimo relativo. Se deja como ejercicio para el alumno el estudio del problema cuando (i) $a = \sqrt{2}$ y (ii) $a = 3$.

Problemas propuestos

21. Determinar los intervalos en los que son crecientes y decrecientes cada una de las funciones del Problema 1.
Sol. (*a*) Crec. $x < 0$; Dec. $x > 0$. (*b*) Crec. $x > 3$, Dec. $x < 3$. (*c*) Crec. $-5/2 < x < 0$; Dec. $0 < x < 5/2$. (*d*) Crec. $x > 4$.

22. (*a*) Demostrar que $y = x^5 + 20x - 6$ es una función creciente para todos los valores de x.
(*b*) Demostrar que $y = 1 - x^3 - x^7$ es una función decreciente para todos los valores de x.

23. Hallar los máximos y mínimos, aplicando el criterio de la primera derivada, de las funciones siguientes:

(*a*) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ — *Sol.* $x = -1$ mínimo relativo $= -4$

(*b*) $f(x) = 3 + 2x - x^2$ — *Sol.* $x = 1$ máximo relativo $= 4$

(*c*) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ — *Sol.* $x = \frac{2}{3}$ mínimo relativo $= -256/27$
$x = -2$ máximo relativo $= 0$

(*d*) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ — *Sol.* $x = 1$ máximo relativo $= -4$
$x = 3$ máximo relativo $= -8$

(*e*) $f(x) = (2 - x)^3$ — *Sol.* No tiene ni máx. ni mín. relativos

(*f*) $f(x) = (x^2 - 4)^2$ — *Sol.* $x = 0$ máximo relativo $= 16$
$x = \pm 2$ mínimo relativo $= 0$

(*g*) $f(x) = (x - 4)^4(x + 3)^3$ *Sol.* $x = 0$ máximo relativo $= 6\,912$
$x = 4$ mínimo relativo $= 0$
$x = -3$ ni máximo ni mínimo

(*h*) $f(x) = x^3 + 48/x$ *Sol.* $x = -2$ máximo relativo $= -32$
$x = 2$ mínimo relativo $= 32$

(*i*) $f(x) = (x - 1)^{1/3}(x + 2)^{2/3}$ *Sol.* $x = -2$ máximo relativo $= 0$
$x = 0$ mínimo relativo $= -\sqrt[3]{4}$
$x = 1$ ni máximo ni mínimo

24. Hallar los máximos y mínimos de las funciones del Problema 23 (*a*)-(*f*) aplicando el criterio de la segunda derivada. Determinar, asimismo, los puntos de inflexión y los intervalos en los que la curva es cóncava o convexa.

Sol. (*a*) No tiene P.I.; es siempre cóncava.
(*b*) No tiene P.I.; es siempre convexa.
(*c*) P.I. en $x = -2/3$; cóncava para $x > -2/3$; convexa para $x < -2/3$.
(*d*) P.I. en $x = 2$; cóncava para $x > 2$; convexa para $x < 2$.
(*e*) P.I. en $x = 2$; convexa para $x > 2$; cóncava para $x < 2$.
(*f*) P.I en $x = \pm 2\sqrt{3}/3$; cóncava para $x > 2\sqrt{3}/3$ y $x < -2\sqrt{3}/3$; convexa en $-2\sqrt{3}/3 < x < 2\sqrt{3}/3$.

25. Demostrar que la función $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, carece de máximos y mínimos relativos.

26. Hallar los máximos y mínimos relativos de la función $y = x^3 - 3px + q$.
Sol. Mín. $= q - 2p^{3/2}$, Máx. $= q + 2p^{3/2}$ si $p > 0$; en los demás casos, ni máximo ni mínimo.

27. Demostrar que $y = (a_1 - x)^2 + (a^2 - x)^2 + \cdots + (a_n - x)^2$ tiene un mínimo relativo cuando $x = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n$.

28. Demostrar que si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$ hay un punto de inflexión en el punto $x = x_0$.

29. Demostrar que si $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene dos puntos críticos, en el punto medio del segmento que une los correspondientes valores críticos la función presenta un punto de inflexión, y que si solo tiene un punto crítico, éste es de inflexión.

30. Una función tiene un máximo (mínimo) absoluto en un punto $x = x_0$, cuando $f(x_0)$ es mayor (menor) o igual a cualquier otro valor de la función en su dominio de definición. Comprobar, gráficamente que (*a*) $y = -x^2$ tiene un máximo absoluto en el punto $x = 0$; (*b*) $y = (x - 3)^2$ tiene un mínimo absoluto ($= 0$) en el punto $x = 3$; (*c*) $y = \sqrt{25 - 4x^2}$ tiene un máximo absoluto ($= 5$) en $x = 0$ y un mínimo absoluto ($= 0$) en $x = \pm 5/2$; (*d*) $y = \sqrt{x - 4}$ tiene un mínimo absoluto ($= 0$) en $x = 4$.

31. Hallar los máximos y mínimos de las funciones siguientes en los intervalos dados:

(*a*) $y = -x^2$ en $-2 < x < 2$ *Sol.* Máx. ($= 0$) en $x = 0$
(*b*) $y = (x - 3)^2$ en $0 \leq x \leq 4$ *Sol.* Máx. ($= 9$) en $x = 0$
Mín. ($= 0$) en $x = 3$
(*c*) $y = \sqrt{25 - 4x^2}$ en $-2 \leq x \leq 2$ *Sol.* Máx. ($= 5$) en $x = 0$
Mín. ($= 3$) en $x = \pm 2$
(*d*) $y = \sqrt{x - 4}$ en $4 \leq x \leq 29$ *Sol.* Máx. ($= 5$) en $x = 29$
Mín. ($= 0$) en $x = 4$

Nota. Estos son los valores máximos y mínimos de los que se habla en la Propiedad II, Capítulo 3, de las funciones continuas.

32. Demostrar que una función $f(x)$ es creciente (decreciente) en un punto $x = x_0$, si el ángulo de inclinación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $x = x_0$ es agudo (obtuso).

33. Enunciar y demostrar el teorema análogo al del Problema 17 para una función decreciente.

34. Enunciar y demostrar el teorema análogo al del Problema 18 para el mínimo relativo.

35. Hallar los máximos y mínimos de la función $2x^2 - 4xy + 3y^2 - 8x + 8y - 1 = 0$.
Sol. Máx. en (5,3); mín en (-1, -3).

36. La fuerza ejercida por el campo magnético creado por la corriente eléctrica que circula por una bobina de radio r sobre un pequeño imán situado a una distancia x del centro de dicha bobina viene dado por $F = \dfrac{kx}{(x^2 + r^2)^{5/2}}$. Demostrar que F es máximo en $x = \frac{1}{2}r$.

37. El trabajo realizado por una pila de fuerza electromotriz constante E y resistencia interna r conectada a una resistencia de carga R, es proporcional a $E^2R/(r + R)^2$. Demostrar que dicho trabajo es máximo para $R = r$.

Capítulo 9

Problemas de aplicación de máximos y mínimos

PROBLEMAS DE MAXIMOS Y MINIMOS. Normalmente, en los problemas de aplicación no será necesario demostrar la existencia de un máximo o de un mínimo relativo. De un estudio previo se puede obtener la elección adecuada del valor crítico.

A veces, un máximo o un mínimo relativo de una función son un máximo o un mínimo *absolutos.* En estos casos están justificados los términos *máximo*, mayor que, menor que, etc., que figuran en los enunciados de los problemas.

Problemas resueltos

1. Hallar dos números cuya suma sea 120 y de forma que el producto P de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

Sean x y $120 - x$ dichos números. Por consiguiente, $P = (120 - x)x^2$. $dP/dx = 3x(80 - x)$. Los valores críticos son $x = 0$ y $x = 80$.

Prescindiendo de la solución trivial $x = 0$, los números pedidos son $x = 80$ y $120 - x = 40$.

2. El área de una superficie rectangular es de 18 m². Sabiendo que en su interior hay otra de forma que los márgenes superior e inferior son de 3/4 m y que los márgenes laterales son de 1/2 m, hallar las dimensiones de la superficie exterior para que el área comprendida entre los márgenes sea máxima.

Sean x = longitud $18/x$ = anchura de la superficie, en metros. (Ver figura 9-1.)

El área entre márgenes es $A = (x - 1)\left(\dfrac{18}{x} = \dfrac{3}{2}\right)$.

$\dfrac{dA}{dx} = \dfrac{18}{x^2} - \dfrac{3}{2}$. De la ecuación $\dfrac{dA}{dx} = 0$, se obtiene el valor crítico $x = 2\sqrt{3}$.

Las dimensiones de la superficie exterior son $x = 2\sqrt{3}$ y $18/x = 3\sqrt{3}$ m.

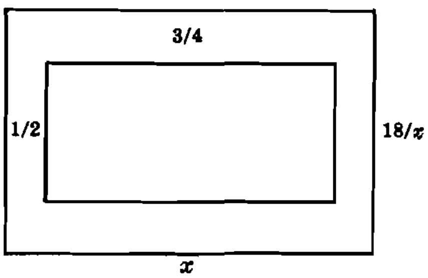


Fig. 9-1

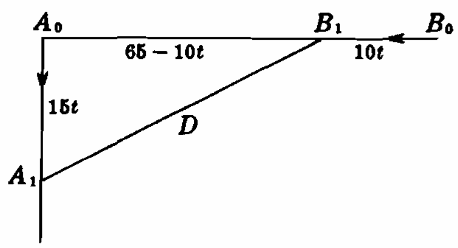


Fig. 9-2

3. En un instante determinado, un barco B se encuentra a 65 millas al este de otro barco A. El barco B empieza a navegar hacia el oeste con una velocidad de 10 millas hora, mientras que el A lo hace hacia el Sur con una velocidad de 15 millas/h. Sabiendo que las rutas iniciadas no se modifican, calcular el tiempo que transcurrirá hasta que la distancia que los separe sea mínima y hallar dicha distancia.

Sean A_0 y B_0 las posiciones de los barcos A y B en el instante inicial, y A_1 y B_1 sus respectivas posiciones t horas más tarde. La distancia recorrida por A en t horas es 15 t millas y la recorrida por B, 10 t millas.

La distancia D entre los barcos viene dada por $D^2 = (15t)^2 + (65 - 10t)^2$.

$\dfrac{dD}{dt} = \dfrac{325t - 650}{D}$. De la ecuación $\dfrac{dD}{dt} = 0$, se obtiene el valor crítico $t = 2$ para el cual la distancia es mínima.

Para $t = 2$, la función $D^2 = (15t)^2 + (65 - 10t)^2$ toma el valor $D = 15\sqrt{13}$ millas.

La distancia mínima entre los dos barcos es de $15\sqrt{13}$ millas y se produce 2 horas después de iniciarse el movimiento.

4. Se quiere construir un recipiente cilíndrico metálico de base circular y de 64 centímetros cúbicos de volumen. Hallar las dimensiones que debe tener para que la cantidad de metal (área total) sea mínima, en el caso en que (*a*) el recipiente sea abierto y (*b*) sea cerrado.

Sean r y h el radio de la base y la altura en centímetros, A la cantidad de metal y V el volumen del recipiente.

(*a*) $V = \pi r^2 h = 64$ y $A = 2\pi rh + \pi r^2$.

Para expresar A en función de una sola variable se despeja h de la primera relación y se sustituye en la segunda; resulta $A = 2\pi r(64/\pi r^2) + \pi r^2 = 128/r + \pi r^2$.

$\dfrac{dA}{dr} = -\dfrac{128}{r^2} + 2\pi r = \dfrac{2(\pi r^3 - 64)}{r^2}$, y el valor crítico es $r = \dfrac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$.

Por tanto, $h = 64/\pi r^2 = 4/\sqrt[3]{\pi}$, y $r = h = 4\sqrt[3]{\pi}$ cm.

(*b*) $V = \pi r^2 h = 64$, y $A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(64/\pi r^2) + 2\pi r^2 = 128/r + 2\pi r^2$.

$\dfrac{dA}{dr} = -\dfrac{128}{r^2} + 4\pi r = \dfrac{4(\pi r^3 - 32)}{r^2}$, y el valor crítico es $r = 2\sqrt[3]{4/\pi}$

Por tanto, $h = 64/\pi r^2 = 4\sqrt[3]{4/\pi}$, y $h = 2r = 4\sqrt[3]{4/\pi}$ cm.

5. El coste total de producción de x unidades diarias de un producto es de $(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)$ pesetas, y el precio de venta de una de ellas es de $(50 - \frac{1}{2}x)$ pesetas.

(*a*) Hallar el número de unidades que se deben vender diariamente para que el beneficio sea máximo.
(*b*) Demostrar que el coste de producción de una unidad tiene un mínimo relativo.

(*a*) El beneficio de la venta de x unidades diarias es $P = x(50 - \frac{1}{2}x) - (\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)$.

$\dfrac{dP}{dx} = 15 - \dfrac{3x}{2}$. Resolviendo $dP/dx = 0$ obtenemos el valor crítico $x = 10$.

Por tanto, la producción que proporciona el mayor beneficio es de 10 unidades al día.

(*b*) El coste de producción de una unidad es $C = \dfrac{(\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25)}{x} = \left(\dfrac{1}{4}x + 35 + \dfrac{25}{x}\right)$ pts.

$\dfrac{dC}{dx} = \dfrac{1}{4} - \dfrac{25}{x^2}$. Resolviendo $dC/dx = 0$ resulta $x = 10$, un mínimo.

6. El coste del combustible que consume una locomotora es proporcional al cuadrado de la velocidad y vale 1 600 pesetas por hora cuando la velocidad es de 40 kilómetros por hora. Independientemente de la velocidad, el coste por hora se incrementa, por otras causas, en 3 600 pesetas por hora. Calcular la velocidad a la que debe ir la locomotora para que el coste por kilómetro sea mínimo.

Sea v = velocidad buscada y C = coste total por kilómetro.

Coste de combustible por hora $= kv^2$, siendo k una constante que podemos determinar sabiendo que para $v = 40$, $kv^2 = 1\,600$ $v^2 = 1\,600$, de donde resulta $k = 1$.

$$C\,(\text{pts/km}) = \frac{\text{coste (pts/h)}}{\text{velocidad (km/h)}} = \frac{v^2 + 3\,600}{v} = v + \frac{3\,600}{v}$$

$\dfrac{dc}{dv} = 1 - \dfrac{3\,600}{v^2} = \dfrac{(v - 60)(v + 60)}{v^2}$. Como $v > 0$, la única solución posible para el valor crítico es $v = 60$.

Así pues, la velocidad más económica es la de 60 kilómetros por hora.

7. Un hombre, sobre un bote de remos, está situado en un punto P a una distancia de 5 kilómetros de un punto A de la costa (rectilínea) y desea llegar a un punto B de la costa a 6 kilómetros de A en el menor tiempo posible. Determinar el camino que debe seguir sabiendo que puede remar a una velocidad de 2 kilómetros por hora y andar a una velocidad de 4 kilómetros por hora.

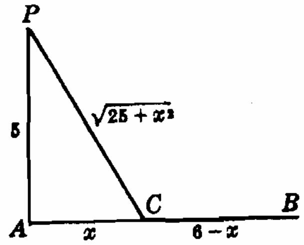


Fig. 9-3

Sea C el punto situado entre A y B al que se dirige el hombre, y llamemos x a la distancia AC

El espacio que ha de recorrer en bote es $PC = \sqrt{25 + x^2}$ y el tiempo empleado, $t_1 = \dfrac{\text{espacio}}{\text{velocidad}} = \dfrac{\sqrt{25+x^2}}{2}$.

El espacio que ha de recorrer andando por la costa es $CB = 6 - x$ y el tiempo empleado, $t_2 = (6-x)\frac{1}{4}$.

El tiempo total es $t = t_1 + t_2 = \frac{1}{2}\sqrt{25+x^2} + \frac{1}{4}(6-x)$.

$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{x}{2\sqrt{25+x^2}} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{2x - \sqrt{25+x^2}}{4\sqrt{25+x^2}}$ y el valor crítico, obtenido de la ecuación $2x - \sqrt{25+x^2} = 0$, es $x = \frac{5}{3}\sqrt{3} = 2{,}89$. Por tanto, deberá dirigirse a un punto situado entre A y B, a 2,89 kilómetros de A.

8. Se quiere poner una alambrada para proteger el contorno de un campo rectangular de área dada y uno de cuyos bordes lo constituye el cauce de un río. Sabiendo que en este borde no hay que colocar alambrada, demostrar que la menor cantidad de alambrada que se necesita es cuando la longitud del campo es igual al doble de su anchura.

Sea x = longitud e y = anchura del campo. Area $= xy$. Alambrada necesaria, $F = x + 2y$.

$dF/dx = 1 + 2\,dy/dx$. Para que $dF/dx = 0$ deberá ser $dy/dx = -\frac{1}{2}$.

$dA/dx = 0 = y + x\,dy/dx$. Por tanto, $y - \frac{1}{2}x = 0$, esto es $x = 2y$ como se quería demostrar.

9. Hallar las dimensiones del cono recto circular de volumen mínimo que se puede circunscribir a una esfera de 8 cm de diámetro.

Sea x = radio de la base del cono e $y + 8$ = altura del cono.

De los triángulos rectángulos semejantes ABC y AED, deducimos

$\dfrac{x}{8} = \dfrac{y+8}{\sqrt{y^2-64}}$. De donde $x^2 = \dfrac{64(y+8)^2}{y^2-64} = \dfrac{64(y+8)}{y-8}$.

Volumen del cono, $V = \dfrac{(\pi x^2)(y+8)}{3} = \dfrac{64\pi(y+8)^2}{3(y-8)}$.

$\dfrac{dV}{dy} = \dfrac{64\pi(y+8)(y-24)}{3(y-8)^2}$. El valor crítico es $y = 24$.

Altura del cono $= y + 8 = 32$ cm; radio de la base $= x = 8\sqrt{2}$ cm.

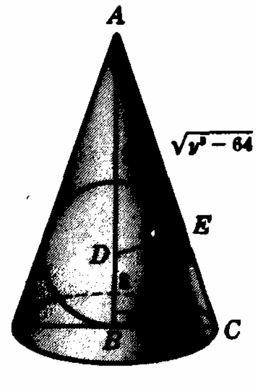


Fig. 9-4

10. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en la porción de parábola $y^2 = 4px$ limitada por la recta $x = a$.

Sea $PBB'P'$ el rectángulo y (x,y) las coordenadas de P. (Ver Fig. 9-5).

Area del rectángulo, $A = 2y(a-x) = 2y(a - y^2/4p) = 2ay - y^3/2p$.

$dA/dy = 2a - 3y^2/2p$. Resolviendo $dA/dy = 0$, el valor crítico es $y = \sqrt{4ap/3}$.

Las dimensiones del rectángulo son $2y = \frac{4}{3}\sqrt{3ap}$ y $a - x = a - y^2/4p = 2a/3$.

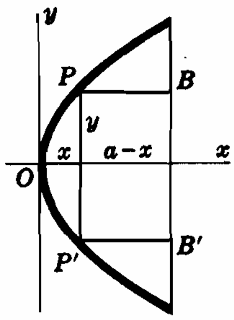


Fig. 9-5

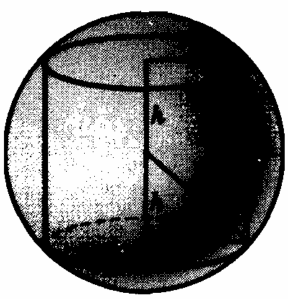


Fig. 9-6

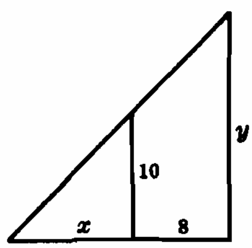


Fig. 9-7

11. Hallar la altura del cilindro circular recto de volumen máximo V que se puede inscribir en una esfera de radio R (Ver Fig. 9-6.)

Sea r el radio de la base y $2h$ la altura del cilindro.

$V = 2\pi r^2 h$ y $r^2 + h^2 = R^2$. Por tanto, $dV/dr = 2\pi(r^2\,dh/dr + 2rh)$ y $2r + 2h\,dh/dr = 0$.

De la última relación, $dh/dr = -r/h$. Por tanto, $dV/dr = 2\pi(-r^3/h + 2rh)$.

Cuando V es máximo, $dV/dr = 2\pi(-r^3/h + 2rh) = 0$ y $r^2 = 2h^2$.

Como $r^2 + h^2 = R^2$, $2h^2 + h^2 = R^2$ y $h = R/\sqrt{3}$. Altura del cilindro $= 2h = 2R/\sqrt{3}$.

12. Se quiere apuntalar la pared de un edificio por medio de una viga apoyada sobre una pared paralela, de 10 m de altura, situada a una distancia de 8 m de la primera. Hallar la longitud L de la viga más corta que se puede emplear al efecto.

Sea x la distancia del pie de la viga al de la pared paralela, e y la distancia metros del suelo al extremo superior. de la viga. (Ver Fig. 9-7.)

$L = \sqrt{(x+8)^2 + y^2}$. De los triángulos semejantes, $\dfrac{y}{10} = \dfrac{x+8}{x}$ e $y = \dfrac{10(x+8)}{x}$.

Por tanto $L = \sqrt{(x+8)^2 + \dfrac{100(x+8)^2}{x^2}} = \dfrac{x+8}{x}\sqrt{x^2+100}$ y

$$\frac{dL}{dx} = \frac{x[(x^2+100)^{1/2} + x(x+8)(x^2+100)^{-1/2}] - (x+8)(x^2+100)^{1/2}}{x^2} = \frac{x^3 - 800}{x^2\sqrt{x^2+100}}$$

El valor crítico es $x = 2\sqrt[3]{100}$. La longitud de la viga más corta es

$$\frac{2\sqrt[3]{100}+8}{2\sqrt[3]{100}}\sqrt{4\sqrt[3]{10\,000}+100} = (\sqrt[3]{100}+4)^{3/2}\text{ m}$$

Problemas propuestos

13. Hallar dos números positivos cuya suma sea 20 y (*a*) su producto sea máximo, (*b*) la suma de sus cuadrados sea mínima, (*c*) el producto del cuadrado de uno de ellos por el cubo del otro sea máximo. *Sol.* (*a*) 10,10; (*b*) 10,10; (*c*) 8,12.

14. Hallar dos números positivos cuyo producto sea 16 y (*a*) su suma sea mínima. (*b*) la suma de uno de ellos con el cuadrado del otro sea mínima. *Sol.* (*a*) 4,4; (*b*) 8,2.

15. Hallar las dimensiones de una caja rectangular abierta de 6 400 centímetros cúbicos para que resulte la más económica, teniendo en cuenta que el precio de coste de la base es de 75 pesetas y el de las superficies laterales de 25 pesetas por centímetro cuadrado.
Sol. 20 × 22 × 16 cm.

16. Una pared de 3,2 metros de altura está situada a una distancia de 1,35 metros de una casa. Hallar la longitud de la escalera más corta de manera que, apoyándose en el suelo y en la pared, llegue a la cima de la casa. *Sol.* 6,25 metros.

17. Una entidad bancaria tiene las siguientes tarifas: 30 pesetas por cada mil para operaciones de hasta 50 000 pesetas; para la cantidad que sobrepase esta cifra, disminuye la tasa anterior en 0,375 pesetas por cada mil. Hallar la operación óptima de manera que el beneficio del banco sea máximo. *Sol.* 90 000 pesetas.

18. Hallar la ecuación de la recta que, pasando por el punto (3, 4), determina en el primer cuadrante con los ejes coordenados, un triángulo de área mínima. *Sol.* $4x + 3y - 24 = 0$.

19. Hallar un punto de la parábola $y = 4 - x^2$ en el que la tangente determine en el primer cuadrante con los ejes coordenados un triángulo de área mínima. *Sol.* $(2\sqrt{3}/3, 8/3)$.

20. Hallar la mínima distancia del punto (4, 2) a la parábola $y^2 = 8x$. *Sol.* $2\sqrt{2}$ unidades.

21. Se traza la tangente en un punto de la elipse $x^2/25 + y^2/16 = 1$ de forma que el segmento de ella interceptado por los ejes coordenados sea mínimo. Demostrar que la longitud de este segmento es de 9 unidades.

22. Se inscribe un rectángulo en la elipse $x^2/400 + y^2/225 = 1$ con sus lados paralelos a los ejes. Hallar las dimensiones de dicho rectángulo para que (*a*) el área sea máxima, (*b*) el perímetro sea máximo. *Sol.* (*a*) $20\sqrt{2} \times 15\sqrt{2}$, (*b*) 32 × 18.

23. Hallar el radio R del cono circular recto de volumen máximo que se puede inscribir en una esfera de radio r.
Sol. $R = \frac{2}{3}r\sqrt{2}$.

24. En un cono circular recto r, se inscribe un cilindro circular recto. Hallar el radio R del cilindro para que (*a*) su volumen sea máximo (*b*) su área lateral sea máxima. *Sol.* (*a*) $R = \frac{2}{3}r$, (*b*) $R = \frac{1}{2}r$.

25. Demostrar que la menor cantidad de lona empleada en confeccionar una tienda de campaña cónica de un volumen determinado ocurre cuando su altura sea dos veces el radio de la base.

26. Demostrar que todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r, el de área mínima es el equilátero de lado $3r$.

27. Determinar las dimensiones del cilindro circular recto de área lateral máxima que se puede inscribir en una esfera de 8 centímetros de radio. *Sol.* $h = 2r = 8\sqrt{2}$ centímetros.

28. Estudiar la posibilidad de inscribir un cilindro circular recto de área total máxima en un cono circular recto de radio r y altura h. *Sol.* Si $h > 2r$, radio del cilindro $= \frac{1}{2}hr/(h - r)$.

Capítulo 10

Movimientos rectilíneo y circular

MOVIMIENTO RECTILINEO

El movimiento de una partícula P a lo largo de una línea recta queda completamente definido por la ecuación $s = f(t)$, ley del movimiento, siendo $t \geqq 0$ el tiempo y s la distancia de P a un punto fijo O de la trayectoria.

La velocidad de P, en un instante t, es: $v = \dfrac{ds}{dt}$.

Si $v > 0$, P se mueve en la dirección creciente de s.
Si $v < 0$, P se mueve en la dirección decreciente de s.
Si $v = 0$, P está en reposo en dicho instante.

La aceleración de P, en un instante t, es: $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2s}{dt^2}$.

Si $a > 0$, v aumenta; si $a < 0$, v disminuye.
Si v y a tienen el mismo signo, la celeridad (módulo de la velocidad) de P aumenta.
Si v y a tienen signo contrario, la celeridad de P disminuye.

(Ver Problemas 1-5.)

MOVIMIENTO CIRCULAR

El movimiento de una partícula P a lo largo de una circunferencia queda completamente definido por la ecuación $\theta = f(t)$, ley de movimiento, siendo θ el ángulo en el centro (radianes) barrido en el tiempo t por la recta que une P con el centro de la circunferencia.

La velocida angular de P en el instante t es $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$.

La aceleración angular de P, en el instante t es $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$.

Si α es constante para todos los valores de t, P se mueve con una aceleración angular constante.
Si $\alpha = 0$ para todos los valores de t, P se mueve con una velocidad angular constante.

(Ver Problema 6.)

Problemas resueltos

En los problemas que siguen sobre el movimiento rectilíneo el espacio s se mide en metros y el tiempo t en segundos.

1. La ley del movimiento rectilíneo de un cuerpo viene dada por $s = \frac{1}{2}t^3 - 2t$. Hallar su velocidad y aceleración al cabo de 2 segundos.

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{3}{2}t^2 - 2 \qquad \text{Para } t = 2, \quad v = \frac{3}{2}(2)^2 - 2 = 4 \text{ m/s.}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 3t \qquad \text{Para } t = 2, \quad a = 3(2) = 6 \text{ m/s.}$$

2. El espacio recorrido por un móvil en línea recta viene dado por la ecuación $s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ (ley del movimiento).

(*a*) Hallar s y a cuando $v = 0$.
(*b*) Hallar s y v cuando $a = 0$.
(*c*) ¿Cuándo aumenta s?
(*d*) ¿Cuándo aumenta v?
(*e*) ¿Cuándo cambia el sentido del movimiento?

$$v = ds/dt = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3) \qquad a = dv/dt = 6(t-2)$$

(*a*) Para $v = 0$, $t = 1$ y 3. Para $t = 1$, $s = 8$ y $a = -6$. Para $t = 3$, $s = 4$ y $a = 6$.

(*b*) Para $a = 0$, $t = 2$. Para $t = 2$, $s = 6$ y $v = -3$.

(*c*) s aumenta cuando $v > 0$, e.d, cuando $t < 1$ y $t > 3$.

(*d*) v aumenta cuando $a > 0$, e.d., cuando $t > 2$.

(*e*) El sentido del movimiento cambia cuando $v = 0$ y $a \neq 0$. De (*a*) se deduce que el sentido cambia cuando $t = 1$ y $t = 3$.

3. La ley del movimiento rectilíneo de un cuerpo viene dada por $s = f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$. Determinar cuando aumenta y disminuye:

(*a*) El espacio s.

(*b*) La velocidad v.

(*c*) La celeridad del cuerpo.

(*d*) La distancia total recorrida en los primeros 5 segundos del movimiento.

$$v = ds/dt = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t-2)(t-4) \qquad a = dv/dt = 6(t-3)$$

(*a*) s aumenta cuando $v > 0$, esto es, cuando $t < 2$ y $t > 4$.
s disminuye cuando $v < 0$, esto es, cuando $2 < t < 4$.

(*b*) v aumenta cuando $a > 0$, esto es, cuando $t > 3$.
v disminuye cuando $a < 0$, esto es, cuando $t < 3$.

(*c*) La celeridad aumenta cuando v y a tienen el mismo signo y disminuye cuando v y a son de signos contrarios. Como v cambia de signo en $t = 2$ y $t = 4$ y a lo hace en $t = 3$, hemos de comparar los signos en los intervalos $t < 2$, $2 < t < 3$, $3 < t < 4$ y $t > 4$.

En el intervalo $t < 2$, $v > 0$ y $a < 0$; la celeridad disminuye.

En el intervalo $2 < t < 3$, $v < 0$ y $a < 0$; la celeridad aumenta.

En el intervalo $3 < t < 4$, $v < 0$ y $a > 0$; la celeridad disminuye.

En el intervalo $t > 4$, $v > 0$ y $a > 0$; la celeridad aumenta.

(*d*) Para $t = 0$, $s = 0$, y el cuerpo se encuentra en el origen O. Al principio, el cuerpo se mueve hacia la derecha ($v > 0$), durante los dos primeros segundos, alcanzando una distancia del origen O de $s = f(2) = 20$ metros.

Durante los dos segundos siguientes se mueve hacia la izquierda, y al final de este tiempo, se encuentra en $s = f(4) = 16$ metros de O.

A continuación, se mueve hacia la derecha y, después de transcurridos 5 segundos desde que se inició el movimiento, $s = f(5) = 20$ metros de O.

El espacio total recorrido es $20 + 4 + 4 = 28$ metros.

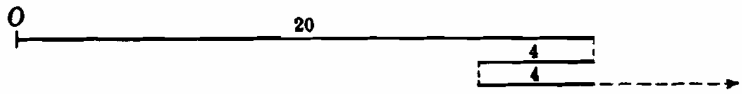


Fig. 10-1

4. Una partícula se mueve a lo largo de una línea horizontal de acuerdo con la ley $s = f(t) = t^4 - 6t^3 + 12t^2 - 10t + 3$ Determinar:

(*a*) Cuándo aumenta la velocidad y cuándo disminuye.

(*b*) En qué instante cambia el sentido del movimiento.

(*c*) El espacio total recorrido en los 3 primeros segundos del movimiento.

$$v = ds/dt = 4t^3 - 18t^2 + 24t - 10 = 2(t-1)^2(2t-5) \qquad a = dv/dt = 12(t-1)(t-2)$$

(*a*) v cambia de signo cuando $t = 1$ y $t = 2{,}5$; a cambia de signo cuando $t = 1$ y $t = 2$.

En el intervalo $t < 1$, $v < 0$ y $a > 0$; la celeridad disminuye.

En el intervalo $1 < t < 2$, $v < 0$ y $a < 0$; la celeridad aumenta.

En el intervalo $2 < t < 2{,}5$, $v < 0$ y $a > 0$; la celeridad disminuye.

En el intervalo $t > 2{,}5$ $v > 0$ y $a > 0$; la celeridad aumenta.

(*b*) El sentido del movimiento cambia en el instante $t = 2{,}5$ en el que $v = 0$, $a \neq 0$; pero no se invierte en $t = 1$, puesto que v no cambia de signo al ir aumentando t al pasar por $t = 1$. Obsérvese que para $t = 1$, $v = 0$ y $a = 0$ y, por tanto, no se posee información alguna.

(*c*) Para $t = 0$, $s = 3$, y la partícula se encuentra 3 metros a la derecha del origen O.

El movimiento se efectúa hacia la izquierda durante los 2,5 primeros segundos, al final de los cuales la partícula se encuentra a 27/16 metros a la izquierda de O.
Para $t = 3$, $s = 0$; la partícula se ha desplazado 27/16 metros hacia la derecha.
El espacio total recorrido es $3 + 27/16 = 51/8$ metros.

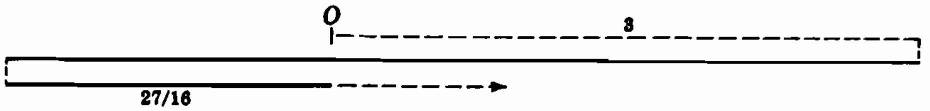


Fig. 10-2

5. Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 112 metros por segundo. Sabiendo que la ley del movimiento es $s = 112t - 16t^2$, siendo s la distancia al punto de partida, calcular (*a*) la velocidad y la aceleración en los instantes $t = 3$ y $t = 4$, (*b*) la máxima altura alcanzada y (*c*) el tiempo que tardará en llegar a una altura de 96 metros.

$$v = ds/dt = 112 - 32t \qquad a = dv/dt = -32$$

(*a*) Para $t = 3$, $v = 16$ y $a = -32$. La piedra está subiendo a 16 m/seg.
Para $t = 4$, $v = -16$ y $a = -32$. La piedra está bajando a 16 m/seg.
(*b*) En el punto más alto, $v = 0$.
Resolviendo $v = 0 = 112 - 32t$, $t = 3{,}5$. Para este tiempo, $s = 196$ m.
(*c*) $96 = 112t - 16t^2$, $t^2 - 7t + 6 = 0$, $(t - 1)(t - 6) = 0$, $t = 1{,}6$.

Al cabo de 1 seg de iniciarse el movimiento, la piedra está a una altura de 96 metros y además está subiendo, puesto que $v > 0$. Al cabo de 6 seg también se encuentra a esa altura, pero en este caso está bajando, ya que $v < 0$.

6. Una partícula posee un movimiento de rotación en sentido contrario al de las agujas del reloj, partiendo del reposo, según la ley $\theta = t^3/50 - t$, en donde θ se expresa en radianes y t en segundos. Calcular el desplazamiento angular θ, la velocidad angular ω, y la aceleración angular al cabo de 10 segundos.

$$\theta = t^3/50 - t = 10 \text{ rad}, \quad \omega = d\theta/dt = 3t^2/50 - 1 = 5 \text{ rad/seg}, \quad \alpha = d\omega/dt = 6t/50 = 6/5 \text{ rad/seg}^2$$

Problemas propuestos

7. La ley del movimiento rectilíneo de una partícula viene dada por $s = t^3 - 6t^2 + 9t$, en donde las unidades son el metro y el segundo. Hallar la situación de la partícula con respecto a su posición inicial ($t = 0$) en O, determinar el sentido y la velocidad del movimiento y averiguar si la velocidad está aumentando o disminuyendo en los instantes (*a*) $t = 1/2$, (*b*) $t = 3/2$, (*c*) $t = 5/2$, (*d*) $t = 4$.
Sol. (*a*) 25/8 metros a la derecha de O; se mueve hacia la derecha con una $v = 15/4$ metros por segundo; disminuyendo.
(*b*) 27/ metros a la derecha de O; se mueve hacia la izquierda con una $v = 9/4$ metros por segundo; aumentando.
(*c*) 5/8 metros a la derecha de O; se mueve hacia la izquierda con una $v = -9{,}4$ metros por segundo; disminuyendo.
(*d*) 4 metros a la derecha de O; se mueve hacia la izquierda con una $v = 9$ metros por segundo; aumentando.

8. El espacio recorrido por una locomotora sobre una vía horizontal, con respecto a un punto fijo, viene dado, en función del tiempo t, por $s = 3t^4 - 44t^3 + 144t^2$. Calcular el intervalo de tiempo en el que la locomotora marcha en sentido contrario al inicial. *Sol.* $3 < t < 8$.

9. Estudiar, tal como se hizo en el Problema 2, los movimientos rectilíneos siguientes:
(*a*) $s = t^3 - 9t^2 + 24t$, (*b*) $s = t^3 - 3t^2 + 3t + 3$, (*c*) $s = 2t^3 - 12t^2 + 18t - 5$, (*d*) $s = 3t^4 - 28t^3 + 90t^2 - 108t$.
Sol. (*a*) Se detiene en $t = 2$ y en $t = 4$ con cambio de sentido.
(*b*) Se detiene en $t = 1$ y no hay cambio de sentido.
(*c*) Se detiene en $t = 1$ y en $t = 3$ con cambio de sentido.
(*d*) Se detiene en $t = 1$ con cambio de sentido y en $t = 3$ sin cambio de sentido.

10. La ley del movimiento rectilíneo ascendente de un cuerpo es $s = 64t - 16t^2$. Demostrar que a los 48 metros de altura, su velocidad es igual a la mitad de la inicial.

11. Desde un tejado de 112 metros de altura, se lanza verticalmente hacia arriba una pelota que, finalmente, regresa al suelo. Sabiendo que el espacio s metros recorrido desde el tejado en función del tiempo t viene dado por $s = 96t - 16t^2$, calcular (*a*) la posición de la pelota, su velocidad y el sentido del movimiento en el instante $t = 2$ y (*b*) su velocidad al llegar al suelo.
Sol. (*a*) 240 metros desde el suelo, 32 metros por segundo, hacia arriba. (*b*) $= -128$ metros por segundo.

12. El ángulo θ (radianes) girado por una rueda en función del tiempo t(seg) viene dado por $\theta = 128t - 12t^2$. Calcular la velocidad angular y la aceleración al cabo de 3 segundos. *Sol.* $\omega = 56$ radianes por segundo, $\alpha = -24$ radianes por segundo al cuadrado.

13. Demostrar, en los Problemas 2 y 9, que cuando el móvil se detiene con cambio de sentido del movimiento, el valor de t en el que ocurre es el que hace a la función $s = f(t)$ máxima o mínima, mientras que si la detención es sin cambio de sentido, se verifica en un punto de inflexión.

Capítulo 11

Variaciones con respecto al tiempo

VARIACION CON RESPECTO AL TIEMPO. Si una variable x es función del tiempo t, la *variación* de x en la unidad de tiempo viene dada por dx/dt.

Cuando dos o más variables, todas funciones de t, están relacionadas por una ecuación, se puede obtener la relación entre sus variaciones derivando la ecuación con respecto a t.

Problemas resueltos

1. Un gas escapa de un globo esférico a razón de 2 metros cúbicos por minuto. Hallar la disminución de su superficie en la unidad de tiempo, sabiendo que el radio es de 12 metros.

Sea r el radio de la esfera en el instante t. El volumen correspondiente es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y la superficie, $S = 4\pi r^2$.

Tendremos, $\dfrac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \dfrac{dr}{dt}$, $\dfrac{dS}{dt} = 8\pi r \dfrac{dr}{dt}$, $\dfrac{dS/dt}{dV/dt} = \dfrac{2}{r}$, de donde, $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{2}{r}\left(\dfrac{dV}{dt}\right) = \dfrac{2}{12}(-2) = -\dfrac{1}{3}$ m²/min

2. De un embudo cónico sale agua a razón de 1 centímetro cúbico por segundo. Sabiendo que el radio de la base es de 4 centímetros y la altura de 8 centímetros, calcular el descenso del nivel en la unidad de tiempo en el instante en que la superficie libre se encuentra a una distancia de 2 centímetros de la base del embudo.

Sea r el radio, h la altura de la superficie del agua en el instante t y V el volumen de agua que contiene el cono.

De los triángulos semejantes, $r/4 = h/8$ ó $r = \frac{1}{2}h$.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3$ y $dV/dt = \frac{1}{4}\pi h^2\, dh/dt$.

Cuando $dV/dt = -1$ y $h = 8 - 2 = 6$, tendremos $dh/dt = -1/9\pi$ cm/seg

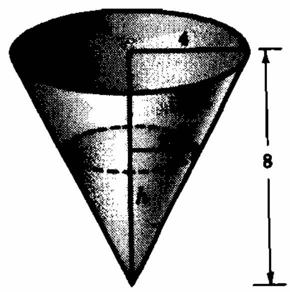


Fig. 11-1

3. Se forma un montículo cónico de arena cuya altura es constantemente, igual a los 4/3 del radio de la base. Hallar: (*a*) el incremento del volumen en la unidad de tiempo cuando el radio de la base es de 3 metros, sabiendo además que éste aumenta a razón de 25 cm cada minuto; (*b*) el incremento del radio en la unidad de tiempo cuando éste es de 6 metros y el volumen aumenta a razón de 24 metros cúbicos por minuto.

Sea r = radio de la base y h = altura del cono en el tiempo t.

Como $h = \dfrac{4}{3}r$, $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{4}{9}\pi r^3$, y $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{4}{3}\pi r^2 \dfrac{dr}{dt}$.

(*a*) Cuando $r = 3$ y $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{4}$, $\dfrac{dV}{dt} = 3\pi$ m³/min. (*b*) Cuando $r = 6$ y $\dfrac{dV}{dt} = 24$, $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{2\pi}$ m/min.

4. Un barco A navega hacia el sur a una velocidad de 16 millas por hora, y otro B, situado 32 millas al sur de A, lo hace hacia el este con una velocidad de 12 millas por hora. Hallar (*a*) la velocidad a la que dichos barcos se aproximan o separan al cabo de una hora de haberse iniciado el movimiento. (*b*) Idem, después de 2 horas; (*c*) el momento en que dejan de aproximarse y comienzan a separarse así como la distancia a que se encuentran en dicho instante.

Sean A_0 y B_0 las posiciones iniciales de los barcos, y A_t y B_t las correspondientes al cabo de t horas. Llamemos D a la distancia que los separa t horas después de iniciado el movimiento.

$$D^2 = (32 - 16t)^2 + (12t)^2 \quad \text{y} \quad \frac{dD}{dt} = \frac{400t - 512}{D}$$

(*a*) Cuando $t = 1$, $D = 20$ y $dD/dt = -5{,}6$. Se aproximan a razón de 5,6 min/h.

(*b*) Cuando $t = 2$, $D = 24$ y $dD/dt = 12$. Se separan a razón de 12 min/h.

(*c*) Dejarán de aproximarse cuando $dD/dt = 0$, e.d. cuando $t = 512/400 = 1{,}28$ h, en cuyo momento $D = 19{,}2$ millas.

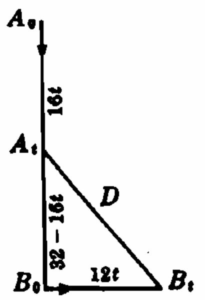


Fig. 11-2

5. Dos lados paralelos de un rectángulo se alargan a razón de 2 centímetros cada segundo, mientras que los otros 2, se acortan de manera que la figura resultante, en todo momento, es un rectángulo de área constante e igual a 50 centímetros cuadrados. Calcular la variación en la unidad de tiempo del perímetro P cuando la longitud de los lados extensibles es de (*a*) 5 centímetros (*b*) 10 centímetros. (*c*) Hallar las dimensiones del rectángulo cuando el perímetro deja de disminuir.

Sea x = longitud de los lados que se alargan e y = longitud de los otros lados en el tiempo t.

$$P = 2(x + y) \text{ y } \frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right). \quad A = xy = 50 \text{ y } x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} = 0.$$

(*a*) Cuando $x = 5$, $y = 10$ y $dx/dt = 2$.

Por tanto $5\dfrac{dy}{dt} + 10(2) = 0$ ó $\dfrac{dy}{dt} = -4$, y $\dfrac{dP}{dt} = 2(2 - 4) = -4$ cm/s (disminuyendo).

(*b*) Cuando $x = 10$, $y = 5$ y $dx/dt = 2$.

Por tanto $10\dfrac{dy}{dt} + 5(2) = 0$ ó $\dfrac{dy}{dt} = -1$, y $\dfrac{dP}{dt} = 2(2 - 1) = 2$ cm/s (aumentando).

(*c*) El perímetro dejará de disminuir cuando $dP/dt = 0$, e.d., cuando $dy/dt = -dx/dt = -2$.

Por tanto $x(-2) + y(2) = 0$, y el rectángulo es un cuadrado de lado $x = y = 5\sqrt{2}$ cm.

6. Sea r el radio de una esfera en el instante t. Hallar dicho radio cuando su incremento en la unidad de tiempo es igual, numéricamente, al de la superficie.

Superficie de la esfera, $S = 4\pi r^2$. $\dfrac{dS}{dt} = 8\pi r\dfrac{dr}{dt}$.

Cuando $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{dr}{dt}$, $\dfrac{dr}{dt} = 8\pi r\dfrac{dr}{dt}$, y el radio es $r = \dfrac{1}{8\pi}$ cm.

7. Un peso W está unido a una cuerda de 50 metros de longitud que pasa por una polea P situada a una altura de 20 metros con respecto al suelo. El otro extremo de la cuerda, se encuentra unido a un vehículo en el punto A, situado a una altura de 2 metros como indica la Fig. 11-3. Sabiendo que el vehículo se mueve a una velocidad de 9 metros segundo, calcular la velocidad a la que se eleva el cuerpo cuando se halle a una altura de 6 metros.

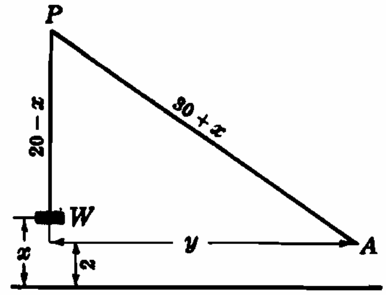


Fig. 11-3

Sea x el espacio recorrido por el cuerpo e y la distancia horizontal hasta el punto A en el instante t.

Tenemos que calcular $\dfrac{dx}{dt}$ cuando $\dfrac{dy}{dt} = 9$ y $x = 6$.

Ahora bien, $y^2 = (30 + x)^2 - (18)^2$ y $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{30 + x}{y} \cdot \dfrac{dx}{dt}$.

Para $x = 6$, $y = 18\sqrt{3}$ y $\dfrac{dy}{dt} = 9$. Por tanto, $9 = \dfrac{30 + 6}{18\sqrt{3}} \cdot \dfrac{dx}{dt}$ de donde $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{9}{2}\sqrt{3}$ m/s.

8. Un foco de luz está situado a una altura de H metros sobre la calle. Un objeto de h metros de altura se encuentra en el punto O justamente debajo del foco y se mueve en línea recta, a partir de esta posición inicial, a lo largo de la calle a una velocidad de v metros por segundo. Hallar la velocidad V del extremo de la sombra sobre la calle al cabo de t segundos. (Ver Fig. 11-4.)

Al cabo de t segundos el objeto ha recorrido una distancia vt. Sea y = distancia del extremo de la sombra a O.

$$\frac{y-vt}{y}=\frac{h}{H} \text{ o sea } y=\frac{Hvt}{H-h} \quad \text{y} \quad V=\frac{dy}{dt}=\frac{Hv}{H-h}=\frac{1}{1-h/H}\,v$$

Por consiguiente, la velocidad del extremo de la sombra es proporcional a la velocidad del objeto, y el factor de proporcionalidad depende de la relación h/H. Cuando $h \to 0$, $V \to v$, mientras que si $h \to H$, V aumenta mucho más rápidamente.

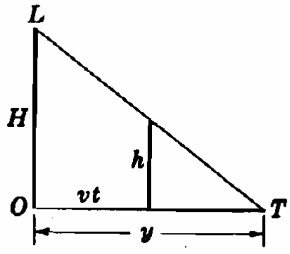


Fig. 11-4

Problemas propuestos

9. Las dimensiones de un depósito paralelepipédico son en metros, 8 largo, 2 de ancho y 4 de profundidad. Se llena de agua a razón de 2 metros cúbicos por minuto, hallar la variación de la altura del nivel, con respecto al tiempo, cuando la profundidad del agua es de 1 metro. *Sol.* 1/8 m/min.

10. Un líquido penetra en un tanque cilíndrico vertical de 6 metros de radio a razón de 8 metros cúbicos por minuto. Hallar la variación de la altura del nivel del agua con respecto al tiempo. *Sol.* $2/9\pi$ m/min.

11. Un objeto de 5 metros de altura se encuentra justamente debajo de un foco de luz de la calle situado a 20 metros de altura. Suponiendo que el objeto se mueve a una velocidad de 4 metros por segundo, calcular: (*a*) la velocidad del extremo de la sombra, (*b*) la variación de la longitud de la sombra en la unidad de tiempo.
Sol. (*a*) 16/3 m/s. (*b*) 4/3 m/s.

12. Un globo se eleva desde un punto A de la tierra a una velocidad de 15 metros por segundo y su ascenso se observa desde otro punto B situado en la horizontal que pasa por A y a una distancia de este punto de 30 metros. Hallar la variación de la distancia del punto B al globo cuando la altura de éste es de 40 metros. *Sol.* 12 metros/segundo.

13. Una escalera de 20 metros se apoya contra un edificio. Hallar (*a*) la velocidad a la que se mueve el extremo superior cuando el inferior se aleja del edificio a una velocidad de 2 metros por segundo y se encuentra a una distancia de él de 12 metros, (*b*) la velocidad a la que disminuye la pendiente. *Sol.* (*a*) 3/2 m/s., (*b*) 25/72 cada segundo.

14. De un recipiente cónico de 3 metros de radio y 10 de profundidad sale agua a razón de 4 metros cúbicos por minuto. Hallar la variación, con respecto al tiempo, de la altura de la superficie libre y del radio de ésta cuando la profundidad del agua es de 6 metros. *Sol.* $100/81\pi$ m/min, $10/27\pi$ m/min.

15. Un barco, cuya cubierta está a una distancia de 10 metros por debajo de la superficie de un muelle, es arrastrado hacia éste por medio de un cable unido a la cubierta y que pasa por una argolla situada en el muelle. Sabiendo que cuando el barco se encuentra a una distancia del muelle de 24 metros, aproximándose con una velocidad de 3/4 metros por segundo, hallar la velocidad del extremo del cable. *Sol.* 9/13 m/s.

16. Un muchacho lanza una cometa a una altura de 150 metros. Sabiendo que la cometa se aleja del muchacho a una velocidad de 20 metros por segundo, hallar la velocidad a la que suelta el hilo cuando la cometa se encuentra a una distancia de 250 metros del muchacho. *Sol.* 16 m/s.

17. Un tren que sale a las 11 horas de la mañana se dirige hacia el este a una velocidad de 45 kilómetros por hora, mientras que otro, que sale al mediodía desde la misma estación, se dirige hacia el sur a una velocidad de 60 kilómetros por hora. Hallar la velocidad a que se separan ambos trenes a las tres de la tarde. *Sol.* $150\sqrt{2}/2$ km/h.

18. Un foco de luz está situado en la cúspide de una torre de 80 metros de altura. Desde un punto situado a 20 metros del foco y a su misma altura, se deja caer una pelota. Suponiendo que ésta cae según la ley $s = 16t^2$, hallar la velocidad a la que se mueve la sombra de la pelota sobre el suelo, un segundo después de empezar a caer. *Sol.* 200 m/s.

19. Un barco A se encuentra a una distancia de 15 millas al este de un punto O, y se mueve hacia el oeste a una velocidad de 20 millas por hora. Otro barco B, a 60 millas de O, se mueve hacia el norte a una velocidad de 15 millas por hora. Determinar: (*a*) si los barcos se aproximan o se separan al cabo de 1 hora y a qué velocidad, (*b*) ídem al cabo de 3 horas, (*c*) el momento en que están más próximos.
Sol. (*a*) Aprox., $115\sqrt{82}$ millas/h; (*b*) Sep. $9\sqrt{10}/2$ millas/h; (*c*) 1 h. 55 min.

20. Un depósito cónico, de 8 metros de diámetro y 16 de profundidad, se llena de agua a razón de 10 metros cúbicos por minuto. Sabiendo que el depósito en cuestión tiene una fuga y que cuando la profundidad del agua es de 1 metro el nivel se eleva a razón de 1/3 metros por minuto, hallar la cantidad de agua que abandona el depósito en la unidad de tiempo. *Sol.* $(10 - 3\pi)$ m³/min.

21. Una solución llega a un depósito cilíndrico de 30 centímetros de diámetro después de haber pasado por un filtro cónico de 60 centímetros de profundidad y 40 de diámetro. Hallar la velocidad a la que se eleva la superficie libre de la solución en el cilindro, sabiendo que cuando su profundidad en el filtro es de 30 centímetros, su nivel desciende a razón de 2,5 centímetros por minuto. *Sol.* 10/9 cm/min.

Capítulo 12

Derivada de las funciones trigonométricas

MEDIDA EN RADIANES. Sea s la longitud de un arco AB correspondiente al ángulo AOB de una circunferencia de radio r, y S el área del sector AOB. (Si s corresponde a 1/360 de circunferencia, $\angle AOB = 1°$; si $s = r$, $\angle AOB = 1$ radián.) Suponiendo que $\angle AOB$ es de α grados, tendremos

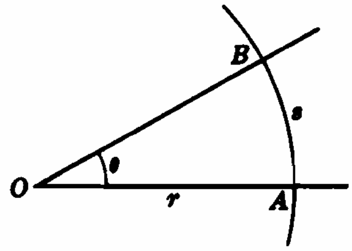


Fig. 12-1

(i) $$s = \frac{\pi}{180}\alpha r \quad \text{y} \quad S = \frac{\pi}{360}\alpha r^2$$

Supongamos ahora que $\angle AOB$ es de θ radianes; en este caso,

(ii) $$s = \theta r \quad \text{y} \quad S = \tfrac{1}{2}\theta r^2$$

Comparando (i) con (ii) se aprecia, claramente, la enorme ventaja que representa la medida de un ángulo en radianes.

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS. Sea θ un número real cualquiera. Tracemos un ángulo cuya medida sea θ radianes de forma que su vértice esté situado en el origen de un sistema cartesiano de coordenadas, siendo el eje x el origen de ángulos. Tomando un punto $P(x, y)$ sobre el otro lado del ángulo, a una unidad de O, se verifica: sen $\theta = y$ y cos $\theta = x$. El dominio de definición de sen θ y de cos θ es el conjunto de los números reales; el campo de variación de sen θ es $-1 \leq y \leq 1$ y el de cos θ, $-1 \leq x \leq 1$. De las expresiones

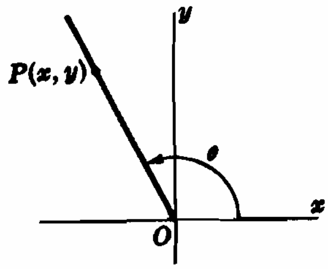


Fig. 12-2

$$\operatorname{tag}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \quad \text{y} \quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

se deduce que el campo de variación de las funciones tag θ y sec θ es el conjunto de los números reales, mientras que el dominio de definición (cos $\theta \neq 0$) es $\theta \neq \pm \frac{2n-1}{2}\pi$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Se deja como ejercicio para el alumno la consideración, desde este punto de vista, de las funciones cot θ y csc θ.

En el Problema 1 se demuestra que

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

(Si el ángulo se mide en grados, este límite vale $\pi/180$. Por esta razón se utiliza la medida en radianes, en los cálculos.)

REGLAS DE DERIVACION. Sea u una función derivable de x; en estas condiciones,

14. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u \dfrac{du}{dx}$

15. $\dfrac{d}{dx}(\cos u) = -\operatorname{sen} u \dfrac{du}{dx}$

16. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tag} u) = \sec^2 u \dfrac{du}{dx}$

17. $\dfrac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \dfrac{du}{dx}$

18. $\dfrac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \operatorname{tag} u \dfrac{du}{dx}$

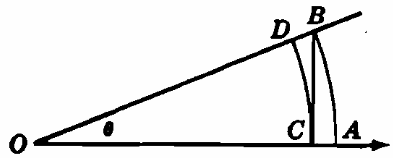
19. $\dfrac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u \dfrac{du}{dx}$

(Ver Problemas 2-23).

Problemas resueltos

1. Demostrar que: $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\text{sen}\ \theta}{\theta} = 1.$

Como $\dfrac{\text{sen}\,(-\theta)}{-\theta} = \dfrac{\text{sen}\ \theta}{\theta}$, consideraremos solamente $\lim\limits_{\theta\to 0+} \dfrac{\text{sen}\ \theta}{\theta}$.



$OC = \cos\theta$, $CB = \text{sen}\ \theta$

Fig. 12-3

En la Fig. 12-3, sea $\theta = \angle AOB$ un ángulo en el centro, positivo y pequeño, de radio $OA = 1$. Llamando C al pie de la perpendicular trazada desde B a OA y D la intersección de OB con un arco de radio OC, tendremos,

$$\text{sector } COD \ \leqslant\ \Delta COB \ \leqslant\ \text{sector } AOB$$

con lo que $$\tfrac{1}{2}\theta\cos^2\theta \ \leqslant\ \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\ \theta\cos\theta \ \leqslant\ \tfrac{1}{2}\theta$$

Dividiendo por $\tfrac{1}{2}\theta\cos\theta > 0$, tenemos

$$\cos\theta \ \leqslant\ \frac{\text{sen}\ \theta}{\theta} \ \leqslant\ \frac{1}{\cos\ \theta}$$

Si $\theta\to 0^+$; se tendrá $\cos\theta\to 1$, $\dfrac{1}{\cos\theta}\to 1$, y $1 \leqslant \lim\limits_{\theta\to 0+} \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta} \leqslant 1$; de donde, $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\theta} = 1$,

2. Derivar $\dfrac{d}{dx}(\text{sen}\ u) = \cos u\,\dfrac{du}{dx}$, siendo u una función derivable de x.

Sea $$y = \text{sen}\ u$$

tendremos $$y + \Delta y = \text{sen}\,(u + \Delta u)$$

$$\Delta y = \text{sen}\,(u + \Delta u) - \text{sen}\ u = 2\cos(u + \tfrac{1}{2}\Delta u)\ \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\Delta u$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \cos(u + \tfrac{1}{2}\Delta u)\ \frac{\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\Delta u}{\tfrac{1}{2}\Delta u}$$

$$\frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u\to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta u} = \lim_{\Delta u\to 0} \cos(u + \tfrac{1}{2}\Delta u)\cdot \lim_{\Delta u\to 0} \frac{\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\Delta u}{\tfrac{1}{2}\Delta u} = \cos u$$

y derivando la función de función,

$$\frac{d}{dx}(\text{sen}\ u) = \frac{d}{du}(\text{sen}\ u)\cdot\frac{du}{dx} = \cos u\,\frac{du}{dx}$$

3. $\dfrac{d}{dx}(\cos u) = \dfrac{d}{dx}[\text{sen}\,(\tfrac{1}{2}\pi - u)] = \dfrac{d}{du}[\text{sen}\,(\tfrac{1}{2}\pi - u)]\,\dfrac{du}{dx} = -\cos(\tfrac{1}{2}\pi - u)\,\dfrac{du}{dx} = -\text{sen}\ u\,\dfrac{du}{dx}.$

4. $\dfrac{d}{dx}(\text{tag}\ u) = \dfrac{d}{dx}\cdot\left(\dfrac{\text{sen}\ u}{\cos u}\right) = \dfrac{\cos u\cdot\cos u\,\dfrac{du}{dx} - \text{sen}\ u\left(-\text{sen}\ u\,\dfrac{du}{dx}\right)}{\cos^2 u} = \dfrac{1}{\cos^2 u}\,\dfrac{du}{dx} = \sec^2 u\,\dfrac{du}{dx}.$

Hallar la primera derivada de las funciones de los Problemas 5-12.

5. $y = \text{sen}\ 3x + \cos 2x.$ $\quad y' = \cos 3x\,\dfrac{d}{dx}(3x) - \text{sen}\ 2x\,\dfrac{d}{dx}(2x) = 3\cos 3x - 2\ \text{sen}\ 2x$

6. $y = \text{tag}\ x^2.$ $\quad y' = \sec^2 x^2\,\dfrac{d}{dx}(x^2) = 2x\sec^2 x^2$

7. $y = \text{tag}^2\,x = (\text{tag}\ x)^2.$ $\quad y' = 2\ \text{tag}\ x\,\dfrac{d}{dx}(\text{atg}\ x) = 2\ \text{tag}\ x\sec^2 x$

8. $y = \cot(1 - 2x^2).$ $\quad y' = -\csc^2(1 - 2x^2)\,\dfrac{d}{dx}(1 - 2x^2) = 4x\csc^2(1 - 2x^2)$

9. $y = \sec^3\sqrt{x} = \sec^3 x^{1/2}.$

$$y' = 3\sec^2 x^{1/2}\,\frac{d}{dx}(\sec x^{1/2}) = 3\sec^2 x^{1/2}\cdot\sec x^{1/2}\ \text{tag}\ x^{1/2}\cdot\frac{d}{dx}(x^{1/2}) = \frac{3}{2\sqrt{x}}\sec^3\sqrt{x}\ \text{tag}\sqrt{x}$$

10. $\varrho = \sqrt{\csc 2\theta} = (\csc 2\theta)^{1/2}.$

$$\varrho' = \tfrac{1}{2}(\csc 2\theta)^{-1/2}\,\frac{d}{dx}(\csc 2\theta) = -\tfrac{1}{2}(\csc 2\theta)^{-1/2}\cdot\csc 2\theta\cot 2\theta\cdot 2 = -\sqrt{\csc 2\theta}\cdot\cot 2\theta$$

11. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x.\quad f'(x) = x^2 \dfrac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x \dfrac{d}{dx}(x^2) = x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x$

12. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}.\quad f'(x) = \dfrac{x \dfrac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \dfrac{d}{dx}(x)}{x^2} = \dfrac{-x \operatorname{sen} x - \cos x}{x^2}$

Hallar las derivadas indicadas en los Problemas 13-16.

13. $y = x \operatorname{sen} x;\ y'''.$

$$y' = x \cos x + \operatorname{sen} x$$

$$y'' = x(-\operatorname{sen} x) + \cos x + \cos x = -x \operatorname{sen} x + 2 \cos x$$

$$y''' = -x \cos x - \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x = -x \cos x - 3 \operatorname{sen} x$$

14. $y = \operatorname{tag}^2(3x-2);\ y''.$

$$y' = 2 \operatorname{tag}(3x-2) \sec^2(3x-2) \cdot 3 = 6 \operatorname{tag}(3x-2) \sec^2(3x-2)$$

$$y'' = 6[\operatorname{tag}(3x-2) \cdot 2 \sec(3x-2) \cdot \sec(3x-2) \operatorname{tag}(3x-2) \cdot 3 + \sec^2(3x-2) \sec^2(3x-2) \cdot 3]$$

$$= 36 \operatorname{tag}^2(3x-2) \sec^2(3x-2) + 18 \sec^4(3x-2)$$

15. $y = \operatorname{sen}(x+y);\ y'.\quad y' = \cos(x+y) \cdot (1+y')$ e $y' = \dfrac{\cos(x+y)}{1-\cos(x+y)}$

16. $\operatorname{sen} y + \cos x = 1;\ y''.$

$$\cos y \cdot y' - \operatorname{sen} x = 0 \text{ e } y' = (\operatorname{sen} x)/(\cos y)$$

$$y'' = \frac{\cos y \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} y) \cdot y'}{\cos^2 y} = \frac{\cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cdot y'}{\cos^2 y}$$

$$= \frac{\cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y (\operatorname{sen} x)/(\cos y)}{\cos^2 y} = \frac{\cos x \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} y}{\cos^3 y}$$

17. Hallar $f'(\pi/3), f''(\pi/3), f'''(\pi/3)$, en la función $f(x) = \operatorname{sen} x \cos 3x$.

$$f'(x) = -3 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x + \cos 3x \cos x$$

$$= (\cos 3x \cos x - \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} x) - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x$$

$$= \cos 4x - 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x. \qquad f'(\pi/3) = -\tfrac{1}{2} - 2(\sqrt{3}/2)(0) = -\tfrac{1}{2}$$

$$f''(x) = -4 \operatorname{sen} 4x - 2(3 \operatorname{sen} x \cos 3x + \operatorname{sen} 3x \cos x)$$

$$= -4 \operatorname{sen} 4x - 2(\operatorname{sen} x \cos 3x + \operatorname{sen} 3x \cos x) - 4 \operatorname{sen} x \cos 3x$$

$$= -6 \operatorname{sen} 4x - 4f(x). \qquad f''(\pi/3) = -6(-\sqrt{3}/2) - 4(\sqrt{3}/2)(-1) = 5\sqrt{3}$$

$$f'''(x) = -24 \cos 4x - 4f'(x). \qquad f'''(\pi/3) = -24(-\tfrac{1}{2}) - 4(-\tfrac{1}{2}) = 14$$

18. Hallar los ángulos agudos de intersección de las curvas (*1*) $y = \operatorname{sen}^2 x$ y (*2*) $y = \cos 2x$, en el intervalo $0 < x < 2\pi$.

(*a*) De la ecuación $2 \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$, se obtiene $\pi/6$, $5\pi/6$, $7\pi/6$ y $11\pi/6$, que son las abscisas de los puntos de intersección pedidos.

(*b*) $y' = 4 \operatorname{sen} x \cos x$ en (*1*), e $y' = -2 \operatorname{sen} 2x$ en (*2*).

En el punto $\pi/6$, $m_1 = \sqrt{3}$ y $m_2 = -\sqrt{3}$.

(*c*) $\operatorname{tag} \phi = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{1-3} = -\sqrt{3}$; el ángulo agudo de intersección es de 60°. En los demás puntos los ángulos de intersección también son de 60°.

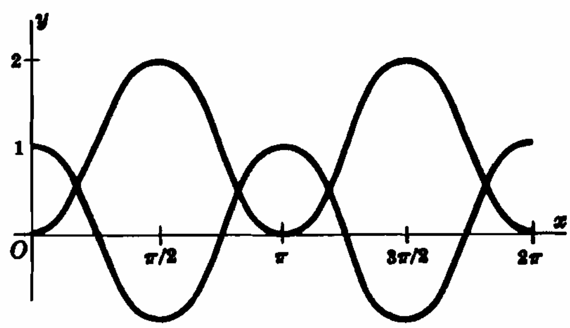


Fig. 12-4

19. Un terreno rectangular está limitado por dos caminos M y N, y en uno de sus vértices P se encuentra el extremo de un pequeño lago. Sabiendo que la distancia de P a los caminos M y N es de 108 y 256 metros, respectivamente, hallar la longitud de la trayectoria más corta por la que se puede ir de un camino al otro cruzando el terreno y pasando por el extremo del lago.

Sea s la longitud de la trayectoria buscada y θ el ángulo que forma con el camino M.

$$s = AP + PB = 108 \csc \theta + 256 \sec \theta$$

$$ds/d\theta = -108 \csc \theta \cot \theta + 256 \sec \theta \operatorname{tag} \theta$$

$$= \frac{-108 \cos^3 \theta + 256 \operatorname{sen}^3 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta}$$

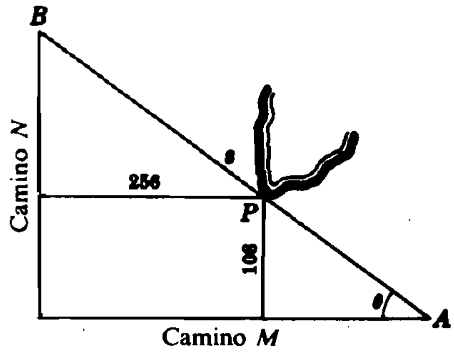


Fig. 12-5

De $-108 \cos^3 \theta + 256 \operatorname{sen}^3 \theta = 0$, $\operatorname{tag}^3 \theta = 27/64$ y el valor crítico es $\theta = \operatorname{arc\,tag} 3/4$.

Por tanto, $s = 108 \csc \theta + 256 \sec \theta = 108(5/3) + 256(5/4) = 500$ m.

20. Estudiar la función $y = f(x) = 4 \operatorname{sen} x - 3 \cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Cuando $x = 0$, $y = f(0) = 4(0) - 3(1) = -3$.

$f(x) = 4 \operatorname{sen} x - 3 \cos x$. De la ecuación $f(x) = 0$, resulta $\operatorname{tag} x = 3/4$, con lo que los puntos de intersección con el eje x son $x = 0{,}64$ radianes y $x = \pi + 0{,}64 = 3{,}78$ radianes.

$f'(x) = 4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x$. De la ecuación $f'(x) = 0$, se deduce $\operatorname{tag} x = -4/3$, con lo que los valores críticos son $x = \pi - 0{,}93 = 2{,}21$ y $x = 2\pi - 0{,}93 = 5{,}35$.

$f''(x) = -4 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$. De la ecuación $f''(x) = 0$, se deduce $\operatorname{tag} x = 3/4$, con lo que los valores críticos son $x = \pi - 0{,}93 = 2{,}21$ y $x = \pi + 0{,}64 = 3{,}78$.

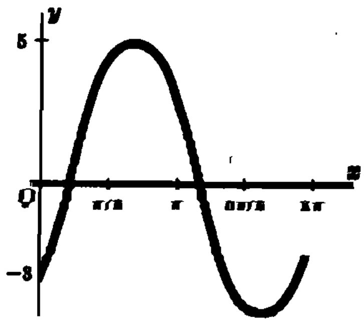


Fig. 12-6

$f'''(x) = -4 \cos x - 3 \operatorname{sen} x$.

(*a*) Para $x = 2{,}21$, $\operatorname{sen} x = 4/5$ y $\cos x = -3/5$; $f''(x) < 0$ y, por tanto, en $x = 2{,}21$ hay un mínimo relativo e igual a 5. En $x = 5{,}35$, se tiene un mínimo relativo igual a -5.

(*b*) $f'''(0{,}64) \neq 0$ y $f'''(3{,}78) \neq 0$. Los puntos de inflexión son $(0{,}64; 0)$ y $(3{,}78; 0)$.

(*c*) La curva es cóncava desde $x = 0$ a $x = 0{,}64$; convexa desde $x = 0{,}64$ a $3{,}78$, y cóncava desde $x = 3{,}78$ a 2π.

21. Cuatro barras de longitudes a, b, c, d están articuladas formando un cuadrilátero. Demostrar que el área A es máxima cuando los ángulos opuestos son suplementarios.

Sea θ el ángulo formado por las barras de longitudes a y b, ϕ el ángulo opuesto y h la longitud de la diagonal opuesta a dicho ángulo.

Hemos de calcular el máximo de la función.

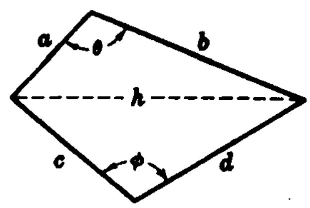


Fig. 12-7

(*1*) $A = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{2}cd \operatorname{sen} \phi$ con la condición

(*2*) $h^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta = c^2 + d^2 - 2cd \cos \phi$. Derivando con respecto a θ:

$$(1') \quad \frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2}ab \cos \theta + \frac{1}{2}cd \cos \phi \frac{d\phi}{d\theta} = 0 \qquad \text{y} \qquad (2') \quad ab \operatorname{sen} \theta = cd \operatorname{sen} \phi \frac{d\phi}{d\theta}$$

Despejando $d\phi/d\theta$ en (*2'*) y sustituyendo en (*1'*), resulta,

$$ab \cos \theta + cd \cos \phi \frac{ab \operatorname{sen} \theta}{cd \operatorname{sen} \phi} = 0 \qquad \text{ó} \qquad \operatorname{sen} \phi \cos \theta + \cos \phi \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen}(\phi + \theta) = 0$$

de donde $\phi + \theta = 0$ ó π, con lo que queda demostrado prescindiendo de la primera solución.

22. El piloto de un bombardero, que vuela a 2 kilómetros de altura y a una velocidad de 240 kilómetros por hora, observa un blanco terrestre hacia el que se dirige. Calcular la velocidad a la que debe girar el instrumento óptico cuando el ángulo entre la ruta del avión y la línea de mira es de 30°.

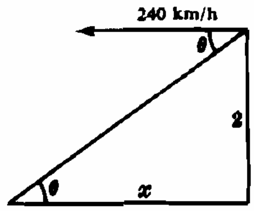


Fig. 12-8

$$\frac{dx}{dt} = -240 \text{ km/h}, \quad \theta = 30°, \quad \text{y} \quad x = 2 \cot \theta.$$

$$\frac{dx}{dt} = -2 \csc^2 \theta \frac{d\theta}{dt} \text{ o sea } -240 = -2(4)\frac{d\theta}{dt}, \text{ y } \frac{d\theta}{dt} = 30 \text{ rad/h} = \frac{3}{2\pi} \text{ grados/s.}$$

23. Un rayo de luz parte de un punto P y se propaga por el aire a una velocidad v_1 incidiendo sobre un punto O de una superficie de agua situada a unidades de longitud por debajo de P. Sabiendo que en el interior del agua se propaga a una velocidad v_2 y que pasa por otro punto Q a una distancia de b unidades de la superficie, demostrar que el paso de luz de P a Q se verifica de la manera más rápida cuando $\dfrac{\text{sen }\theta_1}{\text{sen }\theta_2} = \dfrac{v_1}{v_2}$, siendo θ_1 y θ_2 los ángulos de incidencia y refracción con la normal a la superficie.

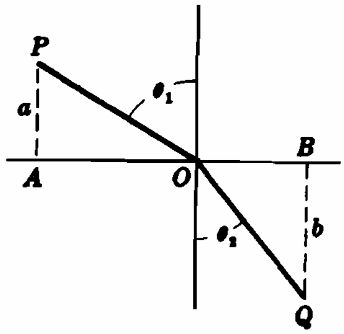


Fig. 12-9

Sea t el tiempo que emplea la luz en ir de P a Q y c la distancia de A a B; en estas condiciones,

$$t = \frac{a \sec \theta_1}{v_1} + \frac{b \sec \theta_2}{v_2} \quad \text{y} \quad c = a \operatorname{tag} \theta_1 + b \operatorname{tag} \theta_2$$

Derivando con respecto a θ_1,

$$\frac{dt}{d\theta_1} = \frac{a \sec \theta_1 \operatorname{tag} \theta_1}{v_1} + \frac{b \operatorname{tag} \theta_2 \sec \theta_2}{v_2} \cdot \frac{d\theta_2}{d\theta_1} \quad \text{y} \quad 0 = a \sec^2 \theta_1 + b \sec^2 \theta_2 \cdot \frac{d\theta_2}{d\theta_1}$$

De la última ecuación, $\dfrac{d\theta_2}{d\theta_1} = -\dfrac{a \sec^2 \theta_1}{b \sec^2 \theta_2}$. Para que t sea mínimo se precisa que

$$\frac{dt}{d\theta_1} = \frac{a \sec \theta_1 \operatorname{tag} \theta_1}{v_1} + \frac{b \sec \theta_2 \operatorname{tag} \theta_2}{v_2}\left(-\frac{a \sec^2 \theta_1}{b \sec^2 \theta_2}\right) = 0$$

de donde se obtiene la relación pedida.

Problemas propuestos

24. Hallar: (*a*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{x} = 2 \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{2x}$, (*b*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx}$, (*c*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{sen}^2 2x}{x \text{ sen}^2 3x}$, (*d*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$.
Sol. (*a*) 2, (*b*) a/b, (*c*) 8/9, (*d*) 0.

25. Deducir la fórmula 17 de derivación utilizando las relaciones (*a*) $\cot u = \dfrac{\cos u}{\text{sen } u}$ y (*b*) $\cot u = \dfrac{1}{\operatorname{tag} u}$. Deducir asimismo las fórmulas de derivación 18 y 19.

Hallar las derivadas dy/dx o $d\rho/d\theta$ en los Problemas 26-45.

26. $y = 3 \text{ sen } 2x$ *Sol.* $6 \cos 2x$

27. $y = 4 \cos \frac{1}{2}x$ *Sol.* $-2 \text{ sen } \frac{1}{2}x$

28. $y = 4 \operatorname{tag} 5x$ *Sol.* $20 \sec^2 5x$

29. $y = \frac{1}{4} \cot 8x$ *Sol.* $-2 \csc^2 8x$

30. $y = 9 \sec \frac{1}{3}x$ *Sol.* $3 \sec \frac{1}{3}x \operatorname{tag} \frac{1}{3}x$

31. $y = \frac{1}{4} \csc 4x$ *Sol.* $y = -\csc 4x \cot 4x$

32. $y = \operatorname{sen} x - x \cos x + x^2 + 4x + 3$ *Sol.* $x \operatorname{sen} x + 2x + 4$

33. $\varrho = \sqrt{\operatorname{sen} \theta}$ *Sol.* $(\cos \theta)/(2\sqrt{\operatorname{sen} \theta})$

34. $y = \operatorname{sen} 2/x$ *Sol.* $(-2 \cos 2/x)/x^2$

35. $y = \cos(1 - x^2)$ *Sol.* $2x \operatorname{sen}(1 - x^2)$

36. $y = \cos(1 - x)^2$ *Sol.* $y = 2(1 - x) \operatorname{sen}(1 - x)^2$

37. $y = \operatorname{sen}^2(3x - 2)$ *Sol.* $3 \operatorname{sen}(6x - 4)$

38. $y = \operatorname{sen}^3(2x - 3)$ *Sol.* $-\frac{3}{2}\{\cos(6x - 9) - \cos(2x - 3)\}$

39. $y = \frac{1}{2} \operatorname{tag} x \operatorname{sen} 2x$ *Sol.* $\operatorname{sen} 2x$

40. $\varrho = \dfrac{1}{(\sec 2\theta - 1)^{3/2}}$ *Sol.* $\dfrac{-3 \sec 2\theta \operatorname{tag} 2\theta}{(\sec 2\theta - 1)^{5/2}}$

41. $\varrho = \dfrac{\operatorname{tag} 2\theta}{1 - \cot 2\theta}$ *Sol.* $2\,\dfrac{\sec^2 2\theta - 4 \csc 4\theta}{(1 - \cot 2\theta)^2}$

42. $y = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x$ *Sol.* $x^2 \cos x$

43. $\operatorname{sen} y = \cos 2x$ *Sol.* $-\dfrac{2 \operatorname{sen} 2x}{\cos y}$

44. $\cos 3y = \operatorname{tag} 2x$ *Sol.* $-\dfrac{2 \sec^2 2x}{3 \operatorname{sen} 3y}$

45. $x \cos y = \operatorname{sen}(x + y)$ *Sol.* $\dfrac{\cos y - \cos(x + y)}{x \operatorname{sen} y + \cos(x + y)}$

46. Si $x = A \operatorname{sen} kt + B \cos kt$, siendo A, B, k constantes, demostrar que $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k^2x$ y $\dfrac{d^{2n}x}{dt^{2n}} = (-1)^n k^{2n} x$.

47. Demostrar: (*a*) $y'' + 4y = 0$ siendo $y = 3 \operatorname{sen}(2x + 3)$, (*b*) $y''' + y'' + y' + y = 0$ siendo $y = \operatorname{sen} x + 2 \cos x$.

48. Estudiar las funciones siguientes en el intervalo $0 \leq x < 2\pi$:

(*a*) $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x$ (*c*) $y = x - 2 \operatorname{sen} x$ (*e*) $y = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$
(*b*) $y = \cos^2 x - \cos x$ (*d*) $y = \operatorname{sen} x (1 + \cos x)$

Sol. (*a*) Max. en $x = \pi/4, 5\pi/4$; min. en $x = 3\pi/4, 7\pi/4$; P.I. en $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$
(*b*) Max. en $x = 0, \pi$; min. en $x = \pi/3, 5\pi/3$; P.I. en $x = 32°32', 126°23', 233°37', 327°28'$
(*c*) Max. en $x = 5\pi/3$; min. en $x = \pi/3$; P.I. en $x = 0, \pi$
(*d*) Max. en $x = \pi/3$; min en $x = 5\pi/3$; P.I. en $x = 0, \pi, 104°29', 255°31'$
(*e*) Max. en $x = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$; min. en $x = \pi/3, \pi, 5\pi/3$; P.I. en $x = \pi/2, 3\pi/2, \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6, 11/\pi 6$

49. Sabiendo que el ángulo de elevación del sol es de 45° y que va disminuyendo a razón de $\frac{1}{4}$ radianes por hora, hallar la velocidad a que se desplaza la sombra de una torre de 50 metros de altura sobre la tierra. *Sol.* 25 m/h.

50. Un cometa, a una altura de 120 metros sobre la tierra, se mueve horizontalmente a una velocidad de 10 metros por segundo. Hallar la velocidad a la que disminuye el ángulo de inclinación del hilo con la horizontal cuando la longitud de éste sea de 240 metros. *Sol.* 1/48 rad/s.

51. La luz de un foco situado a una distancia de 3 600 metros de una costa rectilínea gira a una velocidad de 4π radianes por minuto. Hallar la velocidad a la que se desplaza un rayo de luz sobre la costa (*a*) en el punto más próximo, (*b*) en un punto situado a 4 800 metros del punto más próximo. *Sol.* (*a*) 240π m/s, (*b*) $2\,000\pi/3$ m/s.

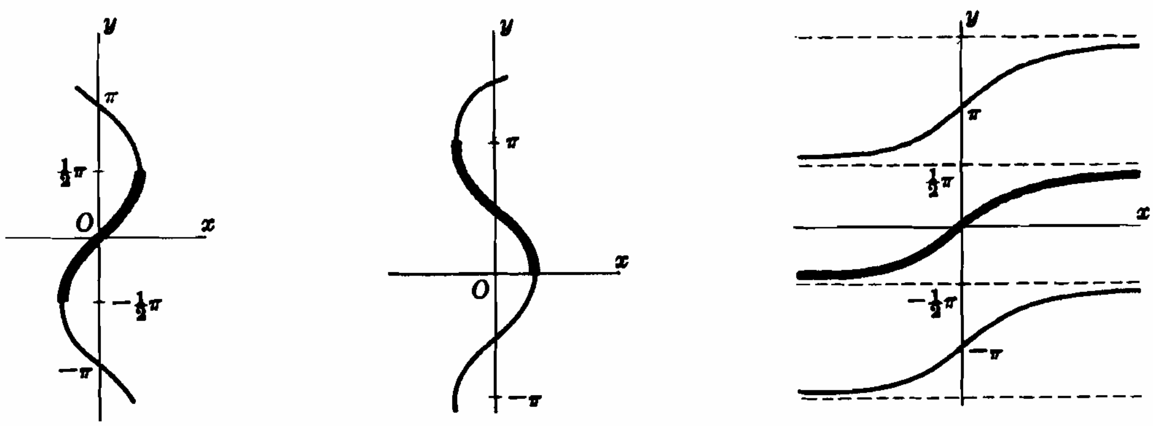
52. Las longitudes de dos lados de un triángulo son 15 y 20 metros. Hallar (*a*) la velocidad de variación del tercer lado cuando el ángulo formado por los otros dos es de 60° y aumenta a razón de 2° por segundo (*b*) la velocidad a la que aumenta el área. *Sol.* (*a*) $\pi/\sqrt{39}$ m/s, (*b*) $\frac{5}{6}\pi$ m^2/s.

Capítulo 13

Derivada de las funciones trigonométricas inversas

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS INVERSAS. La función inversa de $x = \text{sen } y$ es $y = \text{arc sen } x$ (o bien, $\text{sen}^{-1}x$). El dominio de definición del arc sen x es $-1 \leq x \leq 1$, es decir, el campo de variación de y; el campo de variación de arc sen x es el conjunto de los números reales, es decir el dominio de la definición de sen y. El dominio de definición y el campo de variación de las restantes funciones trigonométricas inversas se establece de forma análoga.

Las funciones trigonométricas inversas son multiformes. Con objeto de evitar confusiones de referirnos a una determinada parte de estas funciones, se define para cada una de ellas un arco llamado *rama principal*. En los gráficos que figuran a continuación la rama principal se representa con un trazo más grueso.



$y = \text{arc sen } x$ $\qquad$ $y = \text{arc cos } x$ $\qquad$ $y = \text{arc tag } x$

Fig. 13-1

Función	Rama Principal
$y = \text{arc sen } x$	$-\frac{1}{2}\pi \leqq y \leqq \frac{1}{2}\pi$
$y = \text{arc cos } x$	$0 \leqq y \leqq \pi$
$y = \text{arc tag } x$	$-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$
$y = \text{arc cot } x$	$0 < y < \pi$
$y = \text{arc sec } x$	$-\pi \leqq y < -\frac{1}{2}\pi, \quad 0 \leqq y < \frac{1}{2}\pi$
$y = \text{arc csc } x$	$-\pi < y \leqq -\frac{1}{2}\pi, \quad 0 < y \leqq \frac{1}{2}\pi$

REGLAS DE DERIVACION. Sea u una función derivable de x; entonces

20. $\dfrac{d}{dx}(\text{arc sen } u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

21. $\dfrac{d}{dx}(\text{arc cos } u) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

22. $\dfrac{d}{dx}(\text{arc tag } u) = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

23. $\dfrac{d}{dx}(\text{arc cot } u) = -\dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

24. $\dfrac{d}{dx}(\text{arc sec } u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

25. $\dfrac{d}{dx}(\text{arc csc } u) = -\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

Problemas resueltos

1. Derivar: (a) $\dfrac{d}{dx}(\text{arc sen } u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$, (b) $\dfrac{d}{dx}(\text{arc sec } u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$.

(a) Sea $y = \text{arc sen } u$, siendo u una función derivable de x. Tendremos $u = \text{sen } y$ y

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\text{sen } y) = \frac{d}{dy}(\text{sen } y)\frac{dy}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-u^2}\frac{dy}{dx}$$

tomamos el signo positivo porque $\cos y \geq 0$ en el intervalo $-\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$. Por tanto, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$.

(b) Sea $y = \text{arc sec } u$, siendo u una función derivable de x. Tendremos $u = \sec y$ y

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dy}(\sec y)\frac{dy}{dx} = \sec y \text{ tag } y\frac{dy}{dx} = u\sqrt{u^2-1}\frac{dy}{dx}$$

tomamos el signo positivo porque $\text{tag } y \geq 0$ en los intervalos $0 \leq y < \frac{1}{2}\pi$ y $-\pi \leq y < -\frac{1}{2}\pi$. Por tanto, $\dfrac{d}{dx}(\text{arc sec } u) = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$.

Hallar la primera derivada en los problemas 2-9.

2. $y = \text{arc sen}(2x-3)$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}\dfrac{d}{dx}(2x-3) = \dfrac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}}$

3. $y = \text{arc cos } x^2$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}\dfrac{d}{dx}(x^2) = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

4. $y = \text{arc tag } 3x^2$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+(3x^2)^2}\dfrac{d}{dx}(3x^2) = \dfrac{6x}{1+9x^4}$

5. $f(x) = \text{arc cot}\dfrac{1+x}{1-x}$

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

6. $f(x) = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \text{ arc sen}\dfrac{x}{a}$

$$f'(x) = x\cdot\tfrac{1}{2}(a^2-x^2)^{-1/2}(-2x) + (a^2-x^2)^{1/2} + a^2\frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\cdot\frac{1}{a} = 2\sqrt{a^2-x^2}$$

7. $y = x \text{ arc csc}\dfrac{1}{x} + \sqrt{1-x^2}$

$$y' = x\left[\frac{-1}{\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right] + \text{arc csc}\frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}(x) + \tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2}(-2x) = \text{arc csc}\frac{1}{x}$$

8. $y = \dfrac{1}{ab}\text{ arc tag}\left(\dfrac{b}{a}\text{ tag } x\right)$

$$y' = \frac{1}{ab}\frac{1}{1+\left(\frac{b}{a}\text{ tag } x\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{b}{a}\text{ tag } x\right)\Bigg] = \frac{1}{ab}\cdot\frac{a^2}{a^2+b^2\text{ tag}^2 x}\cdot\frac{b}{a}\sec^2 x$$

$$= \frac{\sec^2 x}{a^2+b^2\text{ tag}^2 x} = \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2\text{ sen}^2 x}$$

9. $y^2 \text{ sen } x + y = \text{arc tag } x$ $\qquad 2yy'\text{ sen } x + y^2\cos x + y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$y'(2y\text{ sen } x + 1) = \frac{1}{1+x^2} - y^2\cos x \qquad \text{y} \qquad y' = \frac{1-(1+x^2)y^2\cos x}{(1+x^2)(2y\text{ sen } x + 1)}$$

10. En un terreno circular hay un foco de luz L situado como indica la figura. Un objeto parte de B y se mueve hacia el centro O a una velocidad de 10 metros por segundo. Hallar la velocidad de su sombra sobre la circunferencia cuando el objeto se encuentra en el punto medio de BO.

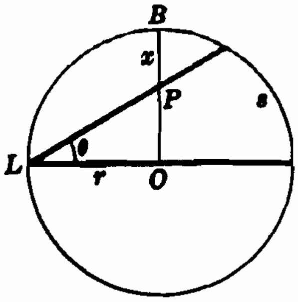


Fig. 13-2

Sea x (metros) la distancia de P a B en el instante t; llamando r al radio del círculo, θ el ángulo OLP y s el arco interceptado por θ, tendremos

$$s = r(2\theta), \text{ y } \theta = \text{arc tag } OP/LO = \text{arc tag }(r - x)/r.$$

$$\frac{ds}{dt} = 2r\frac{d\theta}{dt} = 2r \cdot \frac{1}{1 + [(r-x)/r]^2} \cdot \left(-\frac{1}{r}\right) \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{-2r^2}{x^2 - 2rx + 2r^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Cuando $x = \frac{1}{2}r$ y $dx/dt = 10$, será $ds/dt = -16$ m/s.

La sombra se mueve a una velocidad de 16 m/s.

11. La arista inferior de un cartel de 12 metros de altura, está situado a 6 metros por encima de los ojos de un observador. Suponiendo que la visión más favorable se obtiene cuando el ángulo subtendido por el cartel y los ojos es máximo, calcular la distancia de la pared a la que se debe situar el observador.

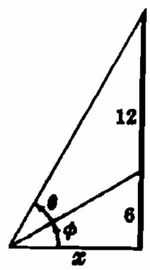


Fig. 13-3

Sea θ el ángulo subtendido y x la distancia a la pared. De la Fig. 13-3, se deduce $\text{tag}(\theta + \phi) = 18/x$, $\text{tag}\,\phi = 6/x$ y

$$\text{tag}\,\theta = \text{tag}\,\{(\theta+\phi) - \phi\} = \frac{\text{tag}(\theta+\phi) - \text{tag}\,\phi}{1 + \text{tag}(\theta+\phi)\,\text{tag}\,\phi} = \frac{18/x - 6/x}{1 + (18/x)(6/x)} = \frac{12x}{x^2 + 108}$$

$$\theta = \text{arc tag}\,\frac{12x}{x^2+108} \quad \text{y} \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{12(-x^2+108)}{x^4 + 360x^2 + 11.664}.$$

El valor crítico es $x = 6\sqrt{3} = 10,4$. El observador se debe situar a una distancia de 10,4 m de la pared.

Problemas propuestos

12. Deducir las fórmulas de derivación 21, 22, 23 y 25.

Hallar dy/dx en los Problemas 13-20.

13. $y = \text{arc sen } 3x$ *Sol.* $\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$

14. $y = \text{arc cos } \frac{1}{2}x$ *Sol.* $-\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

15. $y = \text{arc tag } 3/x$ *Sol.* $-\dfrac{3}{x^2+9}$

16. $y = \text{arc sen}(x-1)$ *Sol.* $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

17. $y = x^2 \text{ arc cos } 2/x$ *Sol.* $2x\left(\text{arc cos}\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}\right)$

18. $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \text{arc sen}\dfrac{x}{a}$ *Sol.* $\dfrac{x^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$

19. $y = (x-a)\sqrt{2ax-x^2} + a^2 \text{ arc sen}\dfrac{x-a}{a}$ *Sol.* $2\sqrt{2ax-x^2}$

20. $y = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} + \dfrac{1}{2}\text{arc sec}\dfrac{x}{2}$ *Sol.* $\dfrac{8}{x^3\sqrt{x^2-4}}$

21. En la vertical del centro de un terreno circular de 30 metros de radio se quiere situar un foco de luz a una altura tal que la iluminación en el perímetro sea máxima. Sabiendo que la intensidad en un punto cualquiera del contorno es directamente proporcional al coseno del ángulo de incidencia (ángulo entre el rayo luminoso y la vertical) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco, hallar la altura que debe tener este.

Ind: Sea x la altura, y la distancia del foco a un punto de la circunferencia exterior y θ el ángulo de incidencia. Tendremos $I = k\dfrac{\cos\theta}{y^2} = \dfrac{kx}{(x^2+900)^{3/2}}$. *Sol.* $15\sqrt{2}$ metros.

22. Dos barcos parten de un mismo punto A, uno se dirige hacia el Sur a una velocidad de 15 millas por hora y el otro hacia el Este a una velocidad de 25 millas por hora, durante 1 hora, volviendo después hacia el Norte. Hallar la velocidad de rotación de la línea que los une al cabo de 3 horas de iniciado el movimiento. *Sol.* 20/193 rad/h.

Capítulo 14

Derivada de las Funciones Exponenciales y Logarítmicas

NUMERO $e = \lim_{k \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^k = \lim_{k \to 0} (1 + k)^{1/k}$

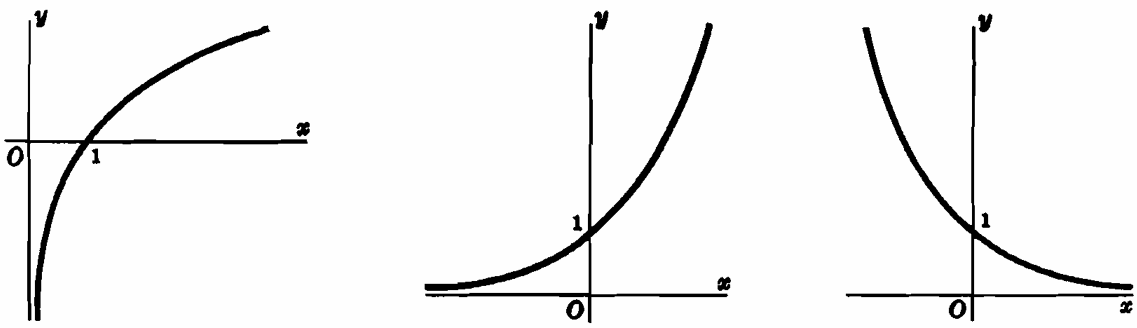
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = 2{,}71828\ldots$$

(Ver Problema 1.)

NOTACION. Si $a > 0$ y $a \neq 1$, y si $a^y = x$, entonces $y = \log_a x$.

$$y = \log_e x = \ln x \qquad y = \log_{10} x = \log x$$

El dominio de definición es $x > 0$; el intervalo de variación es el conjunto de los números reales.



$y = \ln x$ $\qquad$ $y = e^{ax}$ $\qquad$ $y = e^{-ax}$

Fig. 14-1

REGLAS DE DERIVACION. Si u es una función derivable de x,

26. $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u} \log_a e \frac{du}{dx}, \quad (a > 0,\ a \neq 1)$

27. $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$

28. $\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a \frac{du}{dx}, \quad (a > 0)$

29. $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \frac{du}{dx}$

(Ver Problemas 2-17.)

DERIVADA LOGARITMICA. Cuando una función derivable, $y = f(x)$, es un producto de factores, el proceso de derivación se simplifica tomando previamente logaritmos neperianos, o lo que es igual, aplicando la fórmula

30. $$\frac{d}{dx}(y) = y \frac{d}{dx}(\ln y)$$

(Ver Problemas 18-19.)

Problemas resueltos

1. Demostrar que: $2 < \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Desarrollando por el binomio de Newton, siendo n un número entero positivo,

$$\text{(i)}\quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n!}$$

Evidentemente, para cualquier valor de $n \neq 1$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$. También, si en (i) cada diferencia $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right)$, ... se sustituye por un número mayor 1, tendremos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$< 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \quad \left(\text{ya que } \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$< 3 \quad \left(\text{puesto que } \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1\right)$$

Por tanto, $2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Si $n \to \infty$ tomando valores positivos enteros; tendremos

$$1-\frac{1}{n}\to 1,\quad 1-\frac{2}{n}\to 1,\quad \ldots,\quad \text{y}\quad \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!} \to \frac{1}{k!}$$

Esto conduce a $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots = 2{,}71828\ldots$

2. Derivar $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{u}\log_a e\,\frac{du}{dx}$ y $\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$.

Sea $y = \log_a u$, siendo u una función derivable de x. Tendremos

$$y + \Delta y = \log_a(u+\Delta u)$$

$$\Delta y = \log_a(u+\Delta u) - \log_a u = \log_a\frac{u+\Delta u}{u} = \log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \frac{1}{\Delta u}\log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right) = \frac{1}{u}\cdot\frac{u}{\Delta u}\log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right) = \frac{1}{u}\log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u}$$

y

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{u}\lim_{\Delta u\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u} = \frac{1}{u}\log_a\left\{\lim_{\Delta u\to 0}\left(1+\frac{\Delta u}{u}\right)^{u/\Delta u}\right\} = \frac{1}{u}\log_a e$$

Así pues, derivando como función de función $\frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{d}{du}(\log_a u)\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\log_a e\,\frac{du}{dx}$.

Cuando $a = e$, $\log_a e = \log_e e = 1$ y $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$.

3. $y = \log_a(3x^2-5)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2-5}\log_a e\cdot\frac{d}{dx}(3x^2-5) = \frac{6x}{3x^2-5}\log_a e$

4. $y = \ln(x+3)^2 = 2\ln(x+3)$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{x+3}\cdot\frac{d}{dx}(x+3) = \frac{2}{x+3}$

5. $y = \ln^2(x+3)$

$$y' = 2\ln(x+3)\cdot\frac{d}{dx}[\ln(x+3)] = 2\ln(x+3)\cdot\frac{1}{x+3}\cdot\frac{d}{dx}(x+3) = \frac{2\ln(x+3)}{x+3}$$

6. $y = \ln (x^3+2)(x^2+3) = \ln (x^3+2) + \ln (x^2+3)$

$$y' = \frac{1}{x^3+2}\cdot\frac{d}{dx}(x^3+2) + \frac{1}{x^2+3}\cdot\frac{d}{dx}(x^2+3) = \frac{3x^2}{x^3+2} + \frac{2x}{x^2+3}$$

7. $f(x) = \ln\frac{x^4}{(3x-4)^2} = \ln x^4 - \ln(3x-4)^2 = 4\ln x - 2\ln(3x-4)$

$$f'(x) = 4\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x) - 2\frac{1}{3x-4}\frac{d}{dx}(3x-4) = \frac{4}{x} - \frac{6}{3x-4}$$

8. $y = \ln \operatorname{sen} 3x \qquad y' = \frac{1}{\operatorname{sen} 3x}\cdot\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} 3x) = 3\frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x} = 3\cot 3x$

9. $y = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

$$y' = \frac{1+\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2}(2x)}{x+(1+x^2)^{1/2}} = \frac{1+x(1+x^2)^{-1/2}}{x+(1+x^2)^{1/2}}\cdot\frac{(1+x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

10. Deducir $\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \ln a\,\frac{du}{dx}$ y $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$.

Sea $y = a^u$, siendo u una función derivable de x. Tendremos $\ln y = u\ln a$,

$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln a\,\frac{du}{dx}, \qquad \frac{dy}{dx} = y\ln a\,\frac{du}{dx} \qquad \text{o} \qquad \frac{d}{dx}(a^u) = a^u\ln a\,\frac{du}{dx}$$

Cuando $a = e$, $\ln a = \ln e = 1$, con lo cual $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$.

11. $y = e^{-\frac{1}{2}x} \qquad y' = e^{-\frac{1}{2}x}\frac{d}{dx}(-\tfrac{1}{2}x) = -\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$

12. $y = e^{x^2} \qquad y' = e^{x^2}\cdot\frac{d}{dx}(x^2) = 2xe^{x^2}$

13. $y = a^{3x^2} \qquad y' = a^{3x^2}\ln a\cdot\frac{d}{dx}(3x^2) = 6xa^{3x^2}\ln a$

14. $y = x^2 3^x \qquad y' = x^2\cdot\frac{d}{dx}(3^x) + 3^x\cdot\frac{d}{dx}(x^2) = x^2 3^x\ln 3 + 3^x 2x = x3^x(x\ln 3+2)$

15. $y = \dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{ax}+e^{-ax}}$

$$y' = \frac{(e^{ax}+e^{-ax})\frac{d}{dx}(e^{ax}-e^{-ax}) - (e^{ax}-e^{-ax})\frac{d}{dx}(e^{ax}+e^{-ax})}{(e^{ax}+e^{-ax})^2}$$

$$= \frac{(e^{ax}+e^{-ax})[a(e^{ax}+e^{-ax})] - (e^{ax}-e^{-ax})[a(e^{ax}-e^{-ax})]}{(e^{ax}+e^{-ax})^2}$$

$$= a\frac{(e^{2ax}+2+e^{-2ax}) - (e^{2ax}-2+e^{-2ax})}{(e^{ax}+e^{-ax})^2} = \frac{4a}{(e^{ax}+e^{-ax})^2}$$

16. Hallar y'', en la función $y = e^{-x}\ln x$.

$$y' = e^{-x}\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x\frac{d}{dx}(e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x}\ln x = \frac{e^{-x}}{x} - y$$

$$y'' = \frac{x\frac{d}{dx}(e^{-x}) - e^{-x}\frac{d}{dx}(x)}{x^2} - y' = \frac{-xe^{-x}-e^{-x}}{x^2} - \frac{e^{-x}}{x} + e^{-x}\ln x = -e^{-x}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\ln x\right)$$

17. Hallar y'', en la función $y = e^{-2x}\operatorname{sen} 3x$.

$$y' = e^{-2x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} 3x) + \operatorname{sen} 3x\frac{d}{dx}(e^{-2x}) = 3e^{-2x}\cos 3x - 2e^{-2x}\operatorname{sen} 3x = 3e^{-2x}\cos 3x - 2y$$

$$y'' = 3e^{-2x}\frac{d}{dx}(\cos 3x) + 3\cos 3x\frac{d}{dx}(e^{-2x}) - 2y'$$

$$= -9e^{-2x}\operatorname{sen} 3x - 6e^{-2x}\cos 3x - 2(3e^{-2x}\cos 3x - 2e^{-2x}\operatorname{sen} 3x)$$

$$= -e^{-2x}(12\cos 3x + 5\operatorname{sen} 3x)$$

Hallar la primera derivada aplicando la derivación logarítmica.

18. $y = (x^2+2)^3(1-x^3)^4 \qquad \ln y = \ln (x^2+2)^3(1-x^3)^4 = 3\ln(x^2+2) + 4\ln(1-x^3)$

$$y' = y\frac{d}{dx}[3\ln(x^2+2) + 4\ln(1-x^3)] = (x^2+2)^3(1-x^3)^4\left[\frac{6x}{x^2+2} - \frac{12x^2}{1-x^3}\right]$$

$$= 6x(x^2+2)^2(1-x^3)^3(1-4x-3x^3)$$

19. $y = \dfrac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}} \qquad \ln y = \ln x + 2\ln(1-x^2) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$

$$y' = \frac{x(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}}\left[\frac{1}{x} - \frac{4x}{1-x^2} - \frac{x}{1+x^2}\right] = \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{1/2}} - \frac{4x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^{1/2}} - \frac{x^2(1-x^2)^2}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{(1-5x^2-4x^4)(1-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$$

20. Hallar (*a*) los máximos y mínimos relativos y (*b*) los puntos de inflexión de la curva $y = f(x) = x^2e^x$.

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = xe^x(2+x)$$
$$f''(x) = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x = e^x(2+4x+x^2)$$
$$f'''(x) = 6e^x + 6xe^x + x^2e^x = e^x(6+6x+x^2)$$

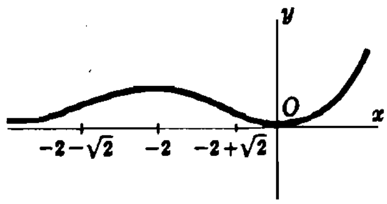


Fig. 14-2

(*a*) Resolviendo $f'(x) = 0$ obtenemos los valores críticos $x = 0$ y $x = -2$.

$f''(0) > 0$ y $(0, 0)$ es un mínimo relativo.

$f''(-2) < 0$ y $(-2, 4/e^2)$ es un máximo relativo.

(*b*) Resolviendo $f''(x) = 0$ obtenemos los posibles puntos de inflexión en $x = -2 \pm \sqrt{2}$.

$f'''(-2-\sqrt{2}) \neq 0$ y $f'''(-2+\sqrt{2}) \neq 0$; los puntos $x = -2 \pm \sqrt{2}$ son puntos de inflexión.

21. Estudiar la curva de probabilidades $y = ae^{-b^2x^2}$, $a > 0$.

(*a*) La curva está situada por encima del eje x, puesto que $e^{-b^2x^2} > 0$ para todos los valores de x. Cuando $x \to \pm\infty$, $y \to 0$, con lo que el eje x es una asíntota horizontal.

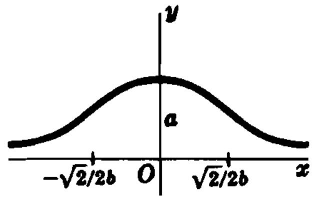


Fig. 14-3

(*b*) $y' = -2ab^2xe^{-b^2x^2}$ e $y'' = 2ab^2(2b^2x^2 - 1)e^{-b^2x^2}$.

Cuando $y' = 0$, $x = 0$; y cuando $x = 0$, $y'' < 0$. El punto $(0, a)$ es un máximo de la curva.

(*c*) Cuando $y'' = 0$, $2b^2x^2 - 1 = 0$, y $x = \pm\sqrt{2}/2b$ son posibles puntos de inflexión.

	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2b}$	0	$\dfrac{\sqrt{2}}{2b}$	
$y'' > 0$ cóncava		$y'' < 0$ convexa		$y'' > 0$ cóncava

Los puntos $(\pm\sqrt{2}/2b, ae^{-1/2})$ son puntos de inflexión.

22. La constante de equilibrio K de una reacción química, varía con la temperatura absoluta T según la ley $K = K_0 e^{-\frac{1}{2}q(T-T_0)/T_0T}$, siendo K_0, q y T_0 constantes. Hallar la variación de K por grado de variación de T expresando el resultado en tantos por ciento.

El tanto por ciento de la variación de K por grado de variación de T viene dado por $\dfrac{1}{K}\dfrac{dK}{dT} = \dfrac{d(\ln K)}{dT}$

Por tanto $\ln K = \ln K_0 - \frac{1}{2}q\dfrac{T - T_0}{T_0T}$ y $\dfrac{d(\ln K)}{dT} = -\dfrac{q}{2T^2} = -\dfrac{50q}{T^2}\,\%$.

23. Estudiar la función de las vibraciones forzadas $y = f(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\,\text{sen}\,2\pi t$.

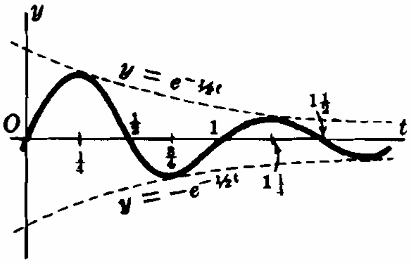


Fig. 14-4

(*a*) Cuando $t = 0$, $y = 0$. La intersección con el eje y es 0.

Cuando $y = 0$, sen $2\pi t = 0$ y $t = \ldots, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$
Estos son los puntos de intersección con el eje t.

(*b*) Cuando $t = \ldots, -\frac{7}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \ldots$, sen $2\pi t = 1$ y $y = e^{-\frac{1}{2}t}$.
Cuando $t = \ldots, -\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \ldots$, sen $2\pi t = -1$ y $y = -e^{\frac{1}{2}t}$.

La función dada oscila entre las dos curvas $y = e^{-\frac{1}{2}t}$ e $y = -e^{-\frac{1}{2}t}$, siendo tangente a ellas en los puntos mencionados.

(*c*)
$$y' = f'(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(2\pi\cos 2\pi t - \tfrac{1}{2}\,\text{sen}\,2\pi t)$$
$$y'' = f''(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\{(\tfrac{1}{4} - 4\pi^2)\,\text{sen}\,2\pi t - 2\pi\cos 2\pi t\}$$

Cuando $y' = 0$, $2\pi\cos 2\pi t - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\pi t = 0$, esto es, tag $2\pi t = 4\pi$.

Si $t = \xi = 0{,}237$ es el ángulo positivo más pequeño que satisface esta relación, tendremos que $t = \ldots, \xi - \frac{3}{2}$ $\xi - 1, \xi - \frac{1}{2}, \xi, \xi + \frac{1}{2}, \xi + 1, \ldots$ son los valores críticos.

Para $n = 0,1,2,\ldots, f''(\xi \pm \frac{1}{2}n)$ y $f''\left(\xi \pm \dfrac{n+1}{2}\right)$ tienen signo contrario y $f''(\xi \pm \frac{1}{2}n)$ y $f''\left(\xi \pm \dfrac{n+2}{2}\right)$ tienen el mismo signo; por tanto, los valores críticos dan lugar, alternativamente, a máximos y mínimos de la función. Estos puntos están situados ligeramente a la izquierda de los puntos de contacto con las curvas $y = e^{-\frac{1}{2}t}$ e $y = -e^{-\frac{1}{2}t}$.

(*d*) Cuando $y'' = 0$, tag $2\pi t = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{4} - 4\pi^2} = \dfrac{8\pi}{1 - 16\pi^2}$.

Si $t = \eta = 0{,}475$ es el menor ángulo positivo que satisface esta relación, tendremos, $t = \ldots, \eta - 1, \eta - \frac{1}{2}, \eta, \eta + \frac{1}{2}, \eta + 1, \ldots$ son los posibles puntos de inflexión. Estos puntos, situados ligeramente a la izquierda de los puntos de intersección de la curva con el eje x, son puntos de inflexión.

24. En la ecuación $s = ce^{-bt}\,\text{sen}(kt + \theta)$ del movimiento de vibración amortiguado y en la que c, b, k y θ son constantes, demostrar que $a = -2bv - (k^2 + b^2)s$.

$$v = ds/dt = ce^{-bt}[-b\,\text{sen}\,(kt + \theta) + k\cos(kt + \theta)]$$

$$\begin{aligned} a = dv/dt &= ce^{-bt}[(b^2 - k^2)\,\text{sen}\,(kt + \theta) - 2bk\cos(kt + \theta)] \\ &= ce^{-bt}[-2b\{-b\,\text{sen}\,(kt + \theta) + k\cos(kt + \theta)\} - (k^2 + b^2)\,\text{sen}\,(kt + \theta)] \\ &= -2bv - (k^2 + b^2)s \end{aligned}$$

Problemas propuestos

Hallar dy/dx en los Problemas 25-35.

25. $y = \ln(4x - 5)$ *Sol.* $4/(4x - 5)$

26. $y = \ln \sqrt{3 - x^2}$ *Sol.* $x/(x^2 - 3)$

27. $y = \ln 3x^5$ *Sol.* $5/x$

28. $y = \ln(x^2 + x - 1)^3$ *Sol.* $(6x + 3)/(x^2 + x - 1)$

29. $y = x \cdot \ln x - x$ *Sol.* $\ln x$

30. $y = \ln(\sec x + \operatorname{tag} x)$ *Sol.* $\sec x$

31. $y = \ln(\ln \operatorname{tag} x)$ *Sol.* $2/(\operatorname{sen} 2x \ln \operatorname{tag} x)$

32. $y = (\ln x^2)/x^2$ *Sol.* $(2 - 4 \ln x)/x^3$

33. $y = \frac{1}{4}x^4(\ln x - \frac{1}{4})$ *Sol.* $x^4 \ln x$

34. $y = x(\operatorname{sen} \ln x - \cos \ln x)$ *Sol.* $2 \operatorname{sen} \ln x$

35. $y = x \ln(4 + x^2) + 4 \operatorname{arc\,tag} \frac{1}{2}x - 2x$
Sol. $\ln(4 + x^2)$

36. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = \ln x$ en uno de sus puntos (x_0, y_0). Deducir un procedimiento para trazar la tangente a la curva utilizando la intersección con el eje y.

37. Estudiar la función: $y = x^2 \ln x$. *Sol.* Min. en $x = 1/\sqrt{e}$, P.I. en $x = 1/e^{3/2}$.

38. Demostrar que el ángulo de intersección de las curvas $y = \ln(x - 2)$ e $y = x^2 - 4x + 3$ en el punto $(3, 0)$ es $\phi = \operatorname{arc\,tag} 1/3$.

Hallar dy/dx en los Problemas 39-46.

39. $y = e^{5x}$ *Sol.* $5e^{5x}$

40. $y = e^{x^3}$ *Sol.* $3x^2e^{x^3}$

41. $y = e^{\operatorname{sen} 3x}$ *Sol.* $3e^{\operatorname{sen} 3x} \cos 3x$

42. $y = 3^{-x^2}$ *Sol.* $-2x \cdot 3^{-x^2} \ln 3$

43. $y = e^{-x} \cos x$ *Sol.* $-e^{-x}(\cos x + \operatorname{sen} x)$

44. $y = \operatorname{arc\,sen} e^x$ *Sol.* $e^x/\sqrt{1 - e^{2x}}$

45. $y = \operatorname{tag}^2 e^{3x}$ *Sol.* $6e^{3x} \operatorname{tag} e^{3x} \sec^2 e^{3x}$

46. $y = e^{e^x}$ *Sol.* $e^{(x + e^x)}$

47. Si $y = x^2e^x$, demostrar que $y''' = (x^2 + 6x + 6)e^x$.

48. Si $y = e^{-2x}(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$, demostrar que $y'' + 4y' + 8y = 0$.

49. Estudiar la función: (*a*) $y = x^2e^{-x}$, (*b*) $y = x^2e^{-x^2}$.
Sol. (*a*) Max. en $x = 2$; min. en $x = 0$; P.I. en $x = 2 \pm \sqrt{2}$
(*b*) Max. en $x = \pm 1$; min. en $x = 0$; P.I. en $x = \pm 1{,}51$, $x = \pm 0{,}47$.

50. Hallar el rectángulo de área máxima que tiene uno de sus vértices sobre la curva $y = e^{-x^2}$ y uno de sus lados sobre el eje x.
Ind: $A = 2xy = 2xe^{-x^2}$, siendo $P(x,y)$ un vértice del rectángulo sobre la curva. *Sol.* $A = \sqrt{2/e}$.

51. Demostrar que las curvas $y = e^{ax}$ e $y = e^{ax} \cos ax$ son tangentes en los puntos $x = 2n\pi/a$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ y que las curvas $y = e^{-ax}/a^2$ e $y = e^{ax} \cos ax$ son mutuamente perpendiculares en los mismos puntos.

52. Dada la curva $y = xe^x$, demostrar (*a*) que el punto $(-1, -1/e)$ es un número relativo, (*b*) que el punto $(-2\ -2/e^2)$ es un punto de inflexión y (*c*) que la curva es convexa a la izquierda y cóncava a la derecha del punto de inflexión.

Hallar dy/dx en los Problemas 53-56, aplicando la derivación logarítmica.

53. $y = x^x$ *Sol.* $x^x(1 + \ln x)$

54. $y = x^{\ln x}$ *Sol.* $2\, x^{(\ln x - 1)} \ln x$

55. $y = x^2 e^{2x} \cos 3x$ *Sol.* $x^2 e^{2x} \cos 3x \{2/x + 2 - 3 \operatorname{tag} 3x\}$

56. $y = x^{e^{-x^2}}$ *Sol.* $e^{-x^2} x^{e^{-x^2}} (1/x - 2x \ln x)$

57. Demostrar (*a*) $\dfrac{d^n}{dx^n}(xe^x) = (x + n)e^x$, (*b*) $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} \ln x) = \dfrac{(n - 1)!}{x}$.

Capítulo 15

Derivada de las funciones hiperbólicas

DEFINICION DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS. Supondremos que u es un número real, mientras que no se advierta otra cosa:

$$\operatorname{senh} u = \frac{e^u - e^{-u}}{2} \qquad \coth u = \frac{1}{\operatorname{tagh} u} = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}}, \quad (u \neq 0)$$

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \qquad \operatorname{sech} u = \frac{1}{\cosh u} = \frac{2}{e^u + e^{-u}}$$

$$\operatorname{tagh} u = \frac{\operatorname{senh} u}{\cosh u} = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}} \qquad \operatorname{csch} u = \frac{1}{\operatorname{senh} u} = \frac{2}{e^u - e^{-u}}, \quad (u \neq 0)$$

FORMULAS DE DERIVACION. Si u es una función derivable de x,

31. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \cosh u \dfrac{du}{dx}$

32. $\dfrac{d}{dx}(\cosh u) = \operatorname{senh} u \dfrac{du}{dx}$

33. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tagh} u) = \operatorname{sech}^2 u \dfrac{du}{dx}$

34. $\dfrac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \dfrac{du}{dx}$

35. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \operatorname{tagh} u \dfrac{du}{dx}$

36. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \dfrac{du}{dx}$

Ver Problemas 1-12.

DEFINICION DE LAS FUNCIONES HIPERBOLICAS INVERSAS.

$$\operatorname{senh}^{-1} u = \ln(u + \sqrt{1 + u^2}), \text{ para todos los valores de } u \qquad \coth^{-1} u = \tfrac{1}{2} \ln \frac{u+1}{u-1}, \quad (u^2 > 1)$$

$$\cosh^{-1} u = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}), \quad (u \geqq 1) \qquad \operatorname{sech}^{-1} u = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - u^2}}{u}, \quad (0 < u \leqq 1)$$

$$\operatorname{tagh}^{-1} u = \tfrac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}, \quad (u^2 < 1) \qquad \operatorname{csch}^{-1} u = \ln\left(\frac{1}{u} + \frac{\sqrt{1+u^2}}{|u|}\right), \quad (u \neq 0)$$

(Unicamente figuran los valores principales de $\cosh^{-1}x$ y $\operatorname{sech}^{-1}x$.)

FORMULAS DE DERIVACION. Si u es una función derivable de x,

37. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1} u) = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} \dfrac{du}{dx}$

38. $\dfrac{d}{dx}(\cosh^{-1} u) = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}} \dfrac{du}{dx}, \quad (u > 1)$

39. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{tagh}^{-1} x) = \dfrac{1}{1-u^2} \dfrac{du}{dx}, \quad (u^2 < 1)$

40. $\dfrac{d}{dx}(\coth^{-1} u) = \dfrac{1}{1-u^2} \dfrac{du}{dx}, \quad (u^2 > 1)$

41. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} u) = \dfrac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} \dfrac{du}{dx}, \quad (0 < u < 1)$

42. $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} u) = \dfrac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}} \dfrac{du}{dx}, \quad (u \neq 0)$

Ver Problemas 13-19.

Problemas resueltos

1. Demostrar: $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$.

$$\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}(e^{2u} + 2 + e^{-2u}) - \tfrac{1}{4}(e^{2u} - 2 + e^{-2u}) = 1$$

2. Derivar: $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \cosh u \dfrac{du}{dx}$, siendo u una función derivable de x.

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^u - e^{-u}}{2}\right) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}\frac{du}{dx} = \cosh u \frac{du}{dx}$$

Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ en los Problemas 3-12.

3. $y = \operatorname{senh} 3x$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \cosh 3x \cdot \dfrac{d}{dx}(3x) = 3\cosh 3x$

4. $y = \cosh \frac{1}{2}x$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{senh} \frac{1}{2}x \cdot \dfrac{d}{dx}(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}\operatorname{senh}\frac{1}{2}x$

5. $y = \operatorname{tagh}(1 + x^2)$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2(1 + x^2) \cdot \dfrac{d}{dx}(1 + x^2) = 2x \operatorname{sech}^2(1 + x^2)$

6. $y = \coth \dfrac{1}{x}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = -\operatorname{csch}^2 \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{x^2}\operatorname{csch}^2\dfrac{1}{x}$

7. $y = x \operatorname{sech} x^2$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= x \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x^2) + \operatorname{sech} x^2 \cdot \frac{d}{dx}(x)\\ &= x(-\operatorname{sech} x^2 \operatorname{tagh} x^2)2x + \operatorname{sech} x^2\\ &= -2x^2 \operatorname{sech} x^2 \operatorname{tagh} x^2 + \operatorname{sech} x^2\end{aligned}$$

8. $y = \operatorname{csch}^2(x^2 + 1)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2\operatorname{csch}(x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx}[\operatorname{csch}(x^2 + 1)]\\ &= 2\operatorname{csch}(x^2 + 1)[-\operatorname{csch}(x^2 + 1)\coth(x^2 + 1) \cdot 2x]\\ &= -4x \operatorname{csch}^2(x^2 + 1)\coth(x^2 + 1)\end{aligned}$$

9. $y = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2x - \frac{1}{2}x$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \frac{1}{4}(\cosh 2x)2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1) = \operatorname{senh}^2 x$

10. $y = \ln \operatorname{tagh} 2x$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\operatorname{tagh} 2x}(2\operatorname{sech}^2 2x) = \dfrac{2}{\operatorname{senh} 2x \cosh 2x} = 4\operatorname{csch} 4x$

11. Hallar las coordenadas del punto mínimo de la catenaria $y = a\cosh\dfrac{x}{a}$.

$$f'(x) = \frac{1}{a}\left(a \operatorname{senh}\frac{x}{a}\right) = \operatorname{senh}\frac{x}{a}, \qquad f''(x) = \frac{1}{a}\cosh\frac{x}{a} = \frac{1}{a}\left(\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}\right)$$

Cuando $f'(x) = \dfrac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2} = 0$, $x = 0$; $f''(0) > 0$. El punto $(0, a)$ es el mínimo.

12. Hallar los puntos de inflexión de las funciones (*a*) $y = \operatorname{senh} x$, (*b*) $y = \cosh x$, (*c*) $y = \operatorname{tagh} x$.

(*a*) $f'(x) = \cosh x, f''(x) = \operatorname{senh} x$, y $f'''(x) = \cosh x$.

$f''(x) = \operatorname{senh} x = 0$, cuando $x = 0$; $f'''(0) \neq 0$. El punto (0, 0) es un punto de inflexión.

(*b*) $f'(x) = \operatorname{senh} x, f''(x) = \cosh x \neq 0$ para todos los valores de x. No tiene punto de inflexión.

(*c*) $f'(x) = \operatorname{sech}^2 x, f''(x) = -2 \operatorname{sech}^2 x \operatorname{tagh} x = -2 \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh^3 x}$, y $f'''(x) = \dfrac{4 \operatorname{senh}^2 x - 2}{\cosh^4 x}$.

$f''(x) = 0$ cuando $x = 0$; $f'''(0) \neq 0$. El punto (0, 0) es un punto de inflexión.

13. Deducir: (*a*) $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$,

(*b*) $\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \dfrac{1}{x} = \ln \dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$, $0 < x \leq 1$.

(*a*) Sea $\operatorname{senh}^{-1} x = y$; tendremos $x = \operatorname{senh} y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$ o sea $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$.

Despejando e^y: $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$, puesto que $e^y > 0$. Por tanto, $y = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$.

(*b*) Sea $\operatorname{sech}^{-1} x = y$; tendremos $x = \operatorname{sech} y = \dfrac{1}{\cosh y}$, $\cosh y = \dfrac{1}{x}$, e $y = \cosh^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \operatorname{sech}^{-1} x$.

También, $x = \operatorname{sech} y = \dfrac{2}{e^y + e^{-y}}$ o $e^{2y} x - 2e^y + x = 0$.

Despejando e^y: $e^y = \dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$, cuando $y \geq 0$. Por tanto, $y = \ln \dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$, $0 < x \leq 1$.

14. Deducir: $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{senh}^{-1} u) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \dfrac{du}{dx}$.

Sea $y = \operatorname{senh}^{-1} u$, siendo u una función derivable de x. Tendremos $\operatorname{senh} y = u$,

$$\cosh y \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}} \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} \frac{du}{dx}$$

Hallar dy/dx en los Problemas 15-19.

15. $y = \operatorname{senh}^{-1} 3x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(3x)^2 + 1}} \cdot \frac{d}{dx}(3x) = \frac{3}{\sqrt{9x^2 + 1}}$$

16. $y = \cosh^{-1} e^x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} \cdot \frac{d}{dx}(e^x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$$

17. $y = 2 \operatorname{tagh}^{-1} (\tan \frac{1}{2}x)$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{1}{1 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}x} \cdot \frac{d}{dx} (\operatorname{tag} \tfrac{1}{2}x)$$

$$= 2 \frac{1}{1 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}x} \sec^2 \tfrac{1}{2}x \cdot \tfrac{1}{2} = \frac{\sec^2 \frac{1}{2}x}{1 - \operatorname{tag}^2 \frac{1}{2}x} = \sec x$$

18. $y = \coth^{-1} \dfrac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\dfrac{1}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x^2}} = \frac{-1}{x^2 - 1}$$

19. $y = \operatorname{sech}^{-1} (\cos x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\cos x \sqrt{1 - \cos^2 x}} \cdot \frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x \sqrt{1 - \cos^2 x}} = \sec x$$

Problemas propuestos

20. (*a*) Representar las funciones $y = e^x$ e $y = -e^{-x}$ y promediar las ordenadas de las dos curvas para todos los valores de x con objeto de obtener puntos de la función $y = \operatorname{senh} x$. Trazar esta curva.

    (*b*) Representar la función $y = \cosh x$ aplicando (*a*) a las funciones $y = e^x$ e $y = e^{-x}$.

21. Dada la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, demostrar: (*a*) que el punto $P(\cosh u, \operatorname{senh} u)$ es un punto de la hipérbola, (*b*) que la tangente en A corta a la recta OP en el punto $T(1, \operatorname{tagh} u)$. (Ver Fig. 15-1.)

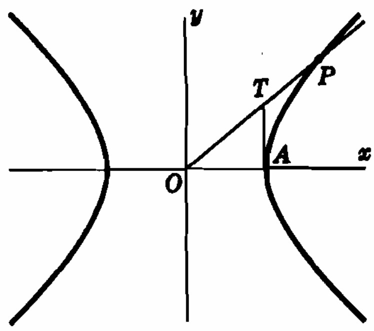


Fig. 15-1

22. Demostrar: (*a*) $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$

    (*b*) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

    (*c*) $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

    (*d*) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\operatorname{senh}^2 x + 1$

    (*e*) $\operatorname{tagh} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tagh} x}{1 + \operatorname{tagh}^2 x}$

Hallar dy/dx en los Problemas 23-28.

23. $y = \operatorname{senh} \frac{1}{4}x$ — *Sol.* $\frac{1}{4} \cosh \frac{1}{4}x$

24. $y = \cosh^2 3x$ — *Sol.* $3 \operatorname{senh} 6x$

25. $y = \operatorname{tagh} 2x$ — *Sol.* $2 \operatorname{sech}^2 2x$

26. $y = \ln \cosh x$ — *Sol.* $\operatorname{tagh} x$

27. $y = \operatorname{arc\,tag} \operatorname{senh} x$ — *Sol.* $\operatorname{sech} x$

28. $y = \ln\sqrt{\operatorname{tagh} 2x}$ — *Sol.* $2 \operatorname{csch} 4x$

29. Demostrar: (*a*) Si $y = a \cosh \dfrac{x}{a}$, se verifica $y'' = \dfrac{1}{a}\sqrt{1 + (y')^2}$.

    (*b*) Si $y = A \cosh bx + B \operatorname{senh} bx$, siendo b, A, B constante, se verifica $y'' = b^2 y$.

30. Demostrar: (*a*) $\cosh^{-1} u = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1})$, $u \geq 1$.

    (*b*) $\operatorname{tagh}^{-1} u = \frac{1}{2} \ln \dfrac{1 + u}{1 - u}$, $u^2 < 1$.

31. (*a*) Representar la curva $y = \operatorname{senh}^{-1} x$, trazando la simétrica de la función $y = \operatorname{senh} x$ con respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

    (*b*) Representar la rama principal de la función $y = \cosh^{-1} x$ trazando la simétrica de la mitad derecha de la función $y \cosh x$ con respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

32. Deducir las fórmulas de derivación 32-36 y 38-40,42.

Hallar dy/dx en los Problemas 33-36.

33. $y = \operatorname{senh}^{-1} \frac{1}{2}x$ — *Sol.* $1/\sqrt{x^2 + 4}$

34. $y = \cosh^{-1}(1/x)$ — *Sol.* $-1/x\sqrt{1 - x^2}$

35. $y = \operatorname{tagh}^{-1}(\operatorname{sen} x)$ — *Sol.* $\sec x$

36. $x = a \operatorname{sech}^{-1}(y/a) - \sqrt{a^2 - y^2}$ — *Sol.* $-y/\sqrt{a^2 - y^2}$

Capítulo 16

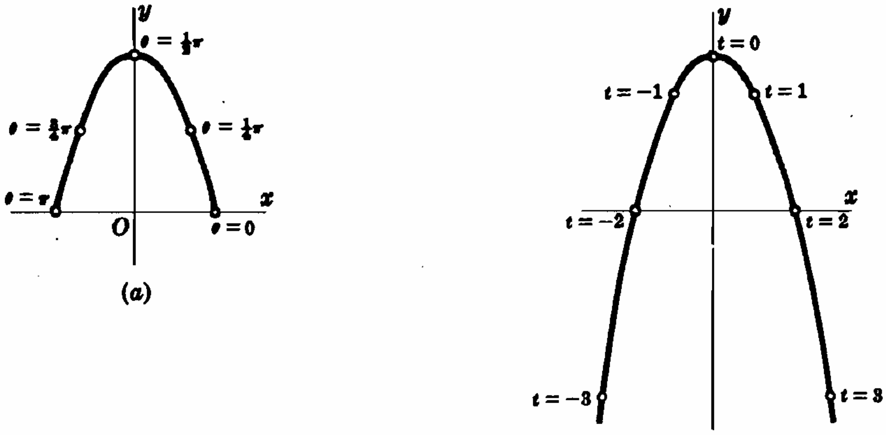
Representación de curvas en forma paramétrica

ECUACIONES PARAMETRICAS. Las coordenadas (x, y) de un punto P de una curva pueden ser funciones, $x = f(u)$, $y = g(u)$, de una tercera variable o parámetro u; las ecuaciones $x = f(u)$ $y = g(u)$ reciben el nombre de *ecuaciones paramétricas* de la curva dada.

Ejemplo:

(*a*) $x = \cos\theta$, $y = 4\,\text{sen}^2\,\theta$ son las ecuaciones paramétricas, siendo el parámetro θ, de la parábola $4x^2 + y = 4$, ya que, $4x^2 + y = 4\cos^2\theta + 4\,\text{sen}^2\,\theta = 4$.

(*b*) $x = \frac{1}{2}t$, $y = 4 - t^2$ es otra representación paramétrica de la curva, en la que el parámetro es t.



(*a*) (*b*)

Fig. 16-1

Obsérvese, sin embargo, que el primer sistema de ecuaciones paramétricas solo representa una porción de la curva, mientras que el segundo representa la totalidad de ella.

LA PRIMERA DERIVADA $\dfrac{dy}{dx}$ viene dada por $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/du}{dx/du}$.

LA SEGUNDA DERIVADA $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ viene dada por $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) \cdot \dfrac{du}{dx}$.

Problemas resueltos

1. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, siendo $x = \theta - \text{sen}\,\theta$, $y = 1 - \cos\theta$.

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = \text{sen}\,\theta, \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\text{sen}\,\theta}{1 - \cos\theta}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\text{sen}\,\theta}{1 - \cos\theta}\right) \cdot \frac{d\theta}{dx} = \frac{\cos\theta - 1}{(1 - \cos\theta)^2} \cdot \frac{1}{1 - \cos\theta} = -\frac{1}{(1 - \cos\theta)^2}$$

2. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, siendo $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$.

$$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t), \quad \frac{dy}{dt} = e^t(\operatorname{sen} t + \cos t), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\operatorname{sen} t + \cos t}{\cos t - \operatorname{sen} t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\operatorname{sen} t + \cos t}{\cos t - \operatorname{sen} t}\right)\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{2}{(\cos t - \operatorname{sen} t)^2}\cdot\frac{1}{e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)} = \frac{2}{e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)^3}$$

3. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $x = \sqrt{t}$, $y = t - 1/\sqrt{t}$ en el punto para $t = 4$.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad \frac{dy}{dt} = 1 + \frac{1}{2t\sqrt{t}}, \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = 2\sqrt{t} + \frac{1}{t}$$

Para $t = 4$: $x = 2$, $y = 7/2$, y $m = dy/dx = 17/4$.

La ecuación de la tangente es $(y - 7/2) = (17/4)(x - 2)$ o sea $17x - 4y = 20$.

4. La posición de una partícula que se mueve a lo largo de una curva viene dada, en función del tiempo t, por las ecuaciones paramétricas $x = 2 - 3\cos t$, $y = 3 + 2 \operatorname{sen} t$, en donde x se expresa en metros y t en segundos. Hallar la variación en la unidad de tiempo y el cambio de dirección (*a*) de la abscisa en el instante $t = \pi/3$, (*b*) de la ordenada en el instante $t = 5\pi/3$, (*c*) del ángulo θ de inclinación de la tangente en el instante $t = 2\pi/3$.

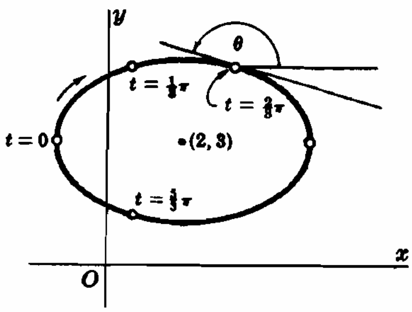


Fig. 16-2

$dx/dt = 3 \operatorname{sen} t$, $\quad dy/dt = 2\cos t$, $\quad \operatorname{tag}\theta = dy/dx = \frac{2}{3}\cot t$

(*a*) Cuando $t = \pi/3$, $dx/dt = 3\sqrt{3}/2$. La abscisa aumenta a razón de $3\sqrt{3}/2$ m/seg.

(*b*) Cuando $t = 5\pi/3$, $dy/dt = 2(\frac{1}{2}) = 1$. La ordenada aumenta a razón de 1 m/seg.

(*c*) $\theta = \operatorname{arc\,tag}(\frac{2}{3}\cot t)$, y $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{-6\csc^2 t}{9 + 4\cot^2 t}$. Para $t = 2\pi/3$, $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{-6(2/\sqrt{3})^2}{9 + 4(-1/\sqrt{3})^2} = -\dfrac{24}{31}$. El ángulo de inclinación de la tangente disminuye a razón de 24/31 radianes/segundo.

Problemas propuestos

Hallar dy/dx y d^2y/dx^2 en los Problemas 6-9.

5. $x = 2 + t$, $y = 1 + t^2$ *Sol.* $dy/dx = 2t$, $d^2y/dx^2 = 2$

6. $x = t + 1/t$, $y = t + 1$ *Sol.* $dy/dx = t^2/(t^2 - 1)$, $d^2y/dx^2 = -2t^3/(t^2 - 1)^3$

7. $x = 2 \operatorname{sen} t$, $y = \cos 2t$ *Sol.* $dy/dx = -2 \operatorname{sen} t$, $d^2y/dx^2 = -1$

8. $x = \cos^3\theta$, $y = \operatorname{sen}^3\theta$ *Sol.* $dy/dx = -\operatorname{tag}\theta$, $d^2y/dx^2 = 1/(3\cos^4\theta \operatorname{sen}\theta)$

9. $x = a(\cos\phi + \phi \operatorname{sen}\phi)$, $y = a(\operatorname{sen}\phi - \phi\cos\phi)$ *Sol.* $dy/dx = \operatorname{tag}\phi$, $d^2y/dx^2 = 1/(a\phi\cos^3\phi)$

10. Hallar la pendiente de la tangente a la curva $x = e^{-t}\cos 2t$, $y = e^{-2t} \operatorname{sen} t$ en el punto $t = 0$. *Sol.* -2.

11. Hallar las coordenadas cartesianas del punto de mayor ordenada de la curva $x = 96t$, $y = 96t - 16t^2$. Ind: Calcular t para que y sea máximo. *Sol.* (288, 144).

12. Hallar la ecuación de la tangente y de la normal a la curva (*a*) $x = 3e^t$, $y = 5e^{-t}$ en el punto $t = 0$, (*b*) $x = a\cos^4\theta$ $y = a \operatorname{sen}^4\theta$ en $\theta = \frac{1}{4}\pi$.
Sol. (*a*) $5x + 3y - 30 = 0$, $3x - 5y + 16 = 0$; (*b*) $2x + 2y - a = 0$, $x - y = 0$.

13. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $x = a\cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$ en un punto $P(x, y)$. Demostrar que la longitud, del segmento de tangente interceptado por los ejes coordenados es igual a a.
Sol. $x \operatorname{sen} t + y\cos t = \frac{1}{2}a \operatorname{sen} 2t$.

14. Dada la curva $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$, determinar los puntos en los cuales la tangente es (*a*) horizontal y (*b*) vertical. Demostrar que en los puntos en que la curva se corta consigo mismo, las dos tangentes son mutuamente perpendiculares.
Sol. (*a*) $t = \pm\sqrt{3}/3$, (*b*) $t = 0$.

Capítulo 17

Curvatura

DERIVADA DE LA LONGITUD DE ARCO. Sea $y = f(x)$ una función cuya primera derivada es una función continua. Sean A (ver Fig. 17-1) un punto fijo de la curva, s la longitud del arco comprendido entre A y otro punto cualquiera de ella $P(x, y)$, $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ un punto de la curva muy próximo al anterior y Δs la longitud del arco comprendido entre P y Q; la variación de la longitud del arco s $(= AP)$ por unidad de variación de x y de y vienen expresadas, respectivamente, por

$$\frac{ds}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \qquad \frac{ds}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta y} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

El signo, más o menos de la primera fórmula corresponde a los casos en que s aumenta o disminuye al aumentar x y en la segunda fórmula, según que s aumente o disminuya al aumentar y.

Cuando la función se defina por sus ecuaciones paramétricas, $x = f(u)$, $y = g(u)$, la variación de s con respecto a u viene dada por $\dfrac{ds}{du} = \pm\sqrt{\left(\dfrac{dx}{du}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{du}\right)^2}$. El signo más o menos se tomará según que s aumente o disminuya al aumentar u.

Para evitar la repetición del doble signo supondremos en lo sucesivo que sobre cada arco considerado se ha elegido un sentido tal que la derivada de la longitud de arco sea positiva.

(Ver Problemas 1-5.)

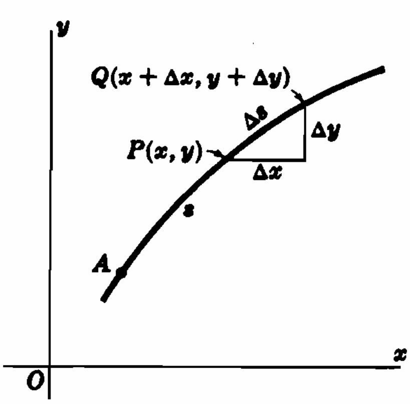


Fig. 17-1

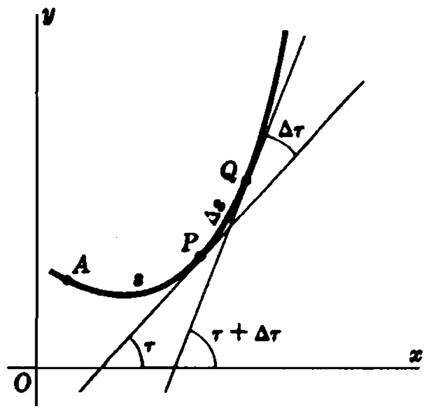


Fig. 17-2

CURVATURA. La curvatura K de una curva $y = f(x)$ en un punto P de ella es igual a la variación del ángulo de inclinación τ de la tangente en P por unidad de longitud de arco s. Es decir,

$$K = \frac{d\tau}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}; \qquad K = \frac{-\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left\{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2\right\}^{3/2}}$$

De la primera de estas fórmulas se deduce que K es positiva cuando P está sobre un arco cóncavo y negativa cuando pertenezca a un arco convexo.

No es extraño encontrar en otros textos el valor de K definido de manera que siempre resulte positivo, esto es, como el valor absoluto de la fórmula anterior. Por esta razón, en las soluciones de los problemas no tendremos en cuenta el signo de K.

EL RADIO DE CURVATURA R de un punto P de una curva viene dado por $R = |1/K|$ siempre que $K \neq 0$.

EL CIRCULO OSCULADOR o de curvatura de una curva en un punto P es el círculo de radio R situado en la región cóncava de la curva y tangente a ella en P.

Para construir el círculo osculador se procede como sigue: se traza la normal en el punto P hacia región cóncava de la curva y, sobre ella, se lleva una distancia $PC = R$. El punto C es el centro del círculo buscado.

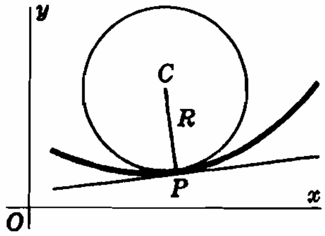


Fig. 17-3

EL CENTRO DE CURVATURA. Correspondiente a un punto $P(x, y)$ de una curva es el centro C del círculo osculador en P. Las coordenadas (α, β) del centro de curvatura vienen dadas por

$$\alpha = x - \frac{\dfrac{dy}{dx}\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}, \qquad \beta = y + \frac{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$$

o bien, $$\alpha = x + \frac{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}{\dfrac{d^2x}{dy^2}}, \qquad \beta = y - \frac{\dfrac{dx}{dy}\left[1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2\right]}{\dfrac{d^2x}{dy^2}}$$

LA EVOLUTA de una curva es el lugar geométrico de los centros de curvatura de la misma.

(Ver Problemas 6-13.)

Problemas resueltos

1. Derivar: $\left(\dfrac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$.

Sea s (ver Fig. 17-1) la longitud de arco de un punto fijo P a otro variable $P(x, y)$ de una curva $y = f(x)$ cuya derivada es continua. Sea Δs la longitud de arco desde P hasta otro punto muy próximo $Q(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ y PQ la longitud de la cuerda que une P y Q.

Tendremos $\dfrac{\Delta s}{\Delta x} = \dfrac{\Delta s}{PQ} \cdot \dfrac{PQ}{\Delta x}$, y, como $(PQ)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$, resulta

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{PQ}\right)^2\left(\frac{PQ}{\Delta x}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{PQ}\right)^2 \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2} = \left(\frac{\Delta s}{PQ}\right)^2\left\{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\}$$

Cuando Q se aproxima a P a lo largo de la curva, $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ y $\dfrac{\Delta s}{PQ} = \dfrac{\text{arc } PQ}{\text{cuerda } PQ} \to 1$. (Para demostrar esto último, ver Capítulo 41. Problema 22.) Por tanto,

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = \lim_{\Delta x \to 0}\left\{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right\} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

2. Hallar $\dfrac{ds}{dx}$ en el punto $P(x, y)$ de la parábola $y = 3x^2$. $\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + (6x)^2} = \sqrt{1 + 36x^2}$

3. Hallar $\dfrac{ds}{dx}$ y $\dfrac{ds}{dy}$ en el punto $P(x, y)$ de la elipse $x^2 + 4y^2 = 8$.

$$(a)\ \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y};\ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{16y^2} = \frac{x^2 + 16y^2}{16y^2} = \frac{32 - 3x^2}{32 - 4x^2} \quad \text{y} \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{32 - 3x^2}{32 - 4x^2}}$$

$$(b)\ \frac{dx}{dy} = -\frac{4y}{x};\quad 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 1 + \frac{16y^2}{x^2} = \frac{x^2 + 16y^2}{x^2} = \frac{2 + 3y^2}{2 - y^2} \quad \text{y} \quad \frac{ds}{dy} = \sqrt{\frac{2 + 3y^2}{2 - y^2}}$$

4. Hallar $\dfrac{ds}{d\theta}$ en el punto $P(\theta)$ de la curva $x = \sec\theta$, $y = \operatorname{tag}\theta$.

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{\sec^2\theta\ \operatorname{tag}^2\theta + \sec^4\theta} = |\sec\theta|\sqrt{\operatorname{tag}^2\theta + \sec^2\theta}$$

5. Las coordenadas (x, y), metros de un móvil P, vienen dadas por $x = \cos t - 1$, $y = 2\operatorname{sen} t + 1$, en donde t es el tiempo en segundos. Hallar la velocidad de P a lo largo de la curva en el instante (*a*) $t = 5\pi/6$, (*b*) $t = 5\pi/3$ y (*c*) la velocidad máxima y mínima de P.

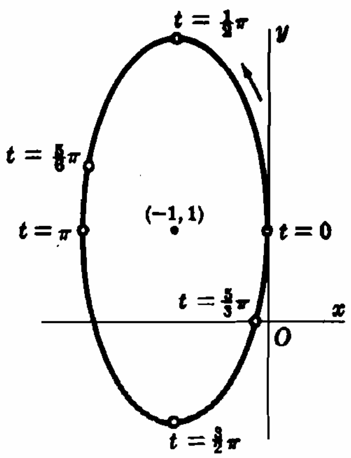


Fig. 17-4

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\operatorname{tag}^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{1 + 3\cos^2 t}$$

(*a*) Para $t = 5\pi/6$, $ds/dt = \sqrt{1 + 3(\frac{3}{4})} = \sqrt{13}/2$ m/s.

(*b*) Para $t = 5\pi/3$, $ds/dt = \sqrt{1 + 3(\frac{1}{4})} = \sqrt{7}/2$ m/s.

(*c*) Sea $S = \dfrac{ds}{dt} = \sqrt{1 + 3\cos^2 t}$. Tendremos $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{-3\cos t\operatorname{sen} t}{S}$.

Resolviendo $dS/dt = 0$ obtenemos los valores críticos $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

Para $t = 0$ y π, la velocidad $ds/dt = \sqrt{1 + 3(1)} = 2$ m/seg es máxima.

Para $t = \pi/2$ y $3\pi/2$, la velocidad $ds/dt = \sqrt{1 + 3(0)} = 1$ m/s.
es mínima

6. Hallar la curvatura de la parábola $y^2 = 12x$ en los puntos (*a*) $(3, 6)$, (*b*) $(\frac{3}{4}, -3)$, (*c*) $(0, 0)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{y},\quad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{36}{y^2},\quad \text{y}\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx} = -\frac{36}{y^3}$$

(*a*) En $(3, 6)$: $\dfrac{dy}{dx} = 1$, $1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 2$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{6}$, y $K = \dfrac{-1/6}{2^{3/2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{24}$.

(*b*) En $(\frac{3}{4}, -3)$: $\dfrac{dy}{dx} = -2$, $1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 5$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{4}{3}$, y $K = \dfrac{4/3}{5^{3/2}} = \dfrac{4\sqrt{5}}{75}$.

(*c*) En $(0, 0)$, $\dfrac{dy}{dx}$ no está definida. Pero $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y}{6} = 0$, $1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2 = 1$, $\dfrac{d^2x}{dy^2} = \dfrac{1}{6}$, y $K = -\frac{1}{6}$.

7. Hallar la curvatura de la cicloide cuyas ecuaciones paramétricas son $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$, en el punto de mayor ordenada —más alto— de un arco.

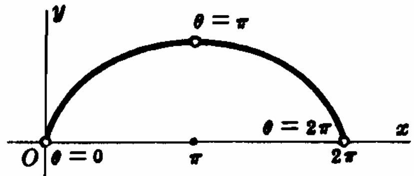


Fig. 17-5

Hallemos el punto de mayor ordenada en el intervalo $0 < x < 2\pi$: $dy/d\theta = \operatorname{sen}\theta$, con lo que el valor crítico en dicho intervalo es $x = \pi$. Como $d^2y/d\theta^2 = \cos\theta < 0$ cuando $\theta = \pi$ es un máximo relativo y, por tanto, el más alto de la curva en el intervalo.

Para calcular la curvatura,

$$\frac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta,\quad \frac{dy}{d\theta} = \operatorname{sen}\theta,\quad \frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1 - \cos\theta}\right)\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{-1}{(1 - \cos\theta)^2}$$

Para $\theta = \pi$, $dy/dx = 0$, $d^2y/dx^2 = -1/4$, y $K = -1/4$.

8. Hallar la curvatura de la cisoide $y^2(2-x) = x^3$ en el punto $(1, 1)$.

Derivando la ecuación dada, implícitamente, con respecto a x, tendremos

$$(a)\quad -y^2 + (2-x)2yy' = 3x^2 \quad \text{y}$$
$$(b)\quad -2yy' + (2-x)2yy'' + (2-x)2(y')^2 - 2yy' = 6x$$

De (a), para $x = y = 1$, $-1 + 2y' = 3$ e $y' = 2$.

De (b), para $x = y = 1$ e $y' = 2$, $-4 + 2y'' + 8 - 4 = 6$ e $y'' = 3$

Por tanto $K = 3/(1+4)^{3/2} = 3\sqrt{5}/25$.

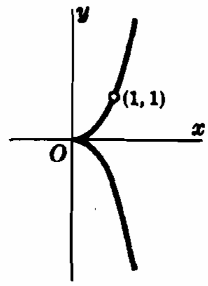


Fig. 17-6

9. Hallar el punto de máxima curvatura de la curva $y = \ln x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2},\quad \text{y}\quad K = \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}$$

$\dfrac{dK}{dx} = \dfrac{2x^2-1}{(1+x^2)^{5/2}}$ y el valor crítico es $x = 1/\sqrt{2}$. El punto pedido es $(1/\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\ln 2)$.

10. Determinar el centro de curvatura C de la curva $y = f(x)$ en uno de sus puntos $P(x, y)$ en el cual $y' \neq 0$. (Ver Fig. 17-3.)

El centro de curvatura $C(\alpha, \beta)$ está situado: (*1*) en la normal en P y (*2*) a una distancia R de P sobre la región cóncava de la curva. En consecuencia,

$$(1)\quad \beta - y = -\frac{1}{y'}(\alpha - x) \qquad \text{y} \qquad (2)\quad (\alpha-x)^2 + (\beta-y)^2 = R^2 = \frac{[1+(y')^2]^3}{(y'')^2}$$

De (*1*), $\alpha - x = -y'(\beta - y)$; sustituyendo en (*2*),

$$(\beta-y)^2[1+(y')^2] = \frac{[1+(y')^2]^3}{(y'')^2} \qquad y \qquad \beta - y = \pm\frac{1+(y')^2}{y''}$$

Para determinar el signo, observemos que cuando la curva es cóncava, $y'' > 0$ y, como C debe estar por encima de P, $\beta - y > 0$. Por tanto, el signo es positivo en este caso. (Se deja para el alumno la demostración de que el signo es + cuando $y'' < 0$.) Así pues:

$$\beta = y + \frac{1+(y')^2}{y''} \quad \text{y de } (1),\quad \alpha = x - \frac{y'[1+(y')^2]}{y''}$$

11. Hallar la ecuación del círculo de curvatura de $2xy + x + y = 4$ en el punto $(1, 1)$.

$2y + 2xy' + 1 + y' = 0$; en $(1, 1)$, $y' = -1$. De donde $1 + (y')^2 = 2$.

$4y' + 2xy'' + y'' = 0$; en $(1, 1)$, $y'' = 4/3$.

$$K = \frac{4/3}{2\sqrt{2}} \text{ y } R = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \qquad \alpha = 1 - \frac{-1(2)}{4/3} = \frac{5}{2},\quad \beta = 1 + \frac{2}{4/3} = \frac{5}{2}.$$

La ecuación pedida es $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$ o $(x-5/2)^2 + (y-5/2)^2 = 9/2$.

12. Hallar la ecuación de la evoluta de la parábola $y^2 = 12x$.

En $P(x,y)$: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6}{y} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$, $1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \dfrac{36}{y^2} = 1 + \dfrac{3}{x}$, y $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{36}{y^3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2x^{3/2}}$.

$$\alpha = x - \frac{\sqrt{3/x}\,(1+3/x)}{-\sqrt{3}/2x^{3/2}} = x + \frac{2\sqrt{3}\,(x+3)}{\sqrt{3}} = 3x + 6$$

$$\beta = y + \frac{1+36/y^2}{-36/y^3} = y - \frac{y^3+36y}{36} = -\frac{y^3}{36}$$

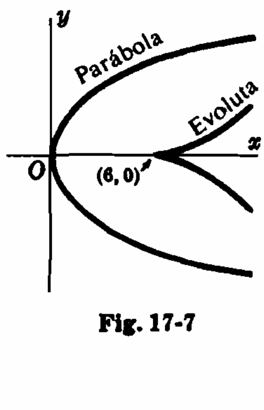


Fig. 17-7

Las ecuaciones $\alpha = 3x + 6$, $\beta = -y^3/36$ se pueden considerar como las ecuaciones paramétricas de la evoluta, estando ligados los parámetros x e y por medio de la ecuación de la parábola. En este caso, la eliminación de los parámetros es sencilla. Despejando, $x = (\alpha - 6)/3$, $y = -\sqrt[3]{36\beta}$ y sustituyendo en la ecuación de la parábola, tendremos:

$$(36\beta)^{2/3} = 4(\alpha - 6) \quad \text{ó} \quad 81\beta^2 = 4(\alpha-6)^3$$

13. Hallar la ecuación de la evoluta de la curva $x = \cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta$, $y = \operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta$.

En $P(x, y)$: $\dfrac{dx}{d\theta} = \theta\cos\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta} = \theta\operatorname{sen}\theta$, $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tag}\theta$,

$$\text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sec^2\theta}{\theta\cos\theta} = \frac{\sec^3\theta}{\theta}$$

$$\alpha = x - \frac{\operatorname{tag}\theta\sec^2\theta}{(\sec^3\theta)/\theta} = x - \theta\operatorname{sen}\theta = \cos\theta$$

$$\beta = y + \frac{\sec^2\theta}{(\sec^3\theta)/\theta} = y + \theta\cos\theta = \operatorname{sen}\theta$$

$\alpha = \cos\theta$, $\beta = \operatorname{sen}\theta$ son las ecuaciones paramétricas de la evoluta

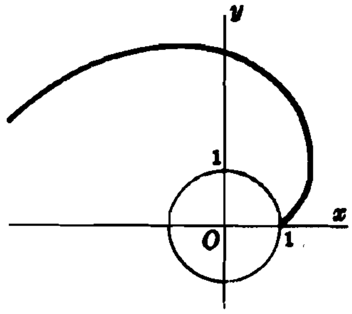


Fig. 17-8

Problemas propuestos

Hallar la derivada de la longitud de arco en los Problemas 14-19.

14. $x^2 + y^2 = 25$ *Sol.* $ds/dx = 5/\sqrt{25 - x^2}$, $ds/dy = 5/\sqrt{25 - y^2}$

15. $y^2 = x^3$ *Sol.* $ds/dx = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 9x}$, $ds/dy = \sqrt{4 + 9y^{2/3}}/3y^{1/3}$

16. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ *Sol.* $ds/dx = (a/x)^{1/3}$, $ds/dy = (a/y)^{1/3}$

17. $6xy = x^4 + 3$ *Sol.* $ds/dx = (x^4 + 1)/2x^2$

18. $27ay^2 = 4(x - a)^3$ *Sol.* $ds/dx = \sqrt{(x + 2a)/3a}$

19. $y = a\cosh x/a$ *Sol.* $ds/dx = \cosh x/a$

20. Dada la curva $x = f(u)$, $y = g(u)$, deducir $(ds/du)^2 = (dx/du)^2 + (dy/du)^2$.

Hallar ds/dt en los Problemas 21-24.

21. $x = t^2$, $y = t^3$ *Sol.* $t\sqrt{4 + 9t^2}$

22. $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$ *Sol.* 1

23. $x = 2\cos t$, $y = 3\operatorname{sen} t$ *Sol.* $\sqrt{4 + 5\cos^2 t}$

24. $x = \cos^3 t$, $y = \operatorname{sen}^3 t$ *Sol.* $\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2t$

25. Siendo $dy/dx = \operatorname{tag}\tau$, demostrar que $dx/ds = \cos\tau$, $dy/ds = \operatorname{sen}\tau$.

26. Siendo $\tau = \operatorname{arc\,tag}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ demostrar que $K = \dfrac{d\tau}{ds} = \dfrac{d\tau}{dx}\cdot\dfrac{dx}{ds} = \dfrac{y''}{\{1 + (y')^2\}^{3/2}}$.

27. Hallar la curvatura de las curvas dadas en los puntos indicados.

(*a*) $y = x^3/3$ en $x = 0$, $x = 1$, $x = -2$ *Sol.* 0, $\sqrt{2}/2$, $-4\sqrt{17}/289$

(*b*) $x^2 = 4ay$ en $x = 0$, $x = 2a$ *Sol.* $\dfrac{1}{2a}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{8a}$

(*c*) $y = \operatorname{sen} x$ en $x = 0$, $x = \frac{1}{2}\pi$ *Sol.* 0, -1

(*d*) $y = e^{-x^2}$ en $x = 0$ *Sol.* -2

28. Demostrar que (*a*) la curvatura de una recta es cero y (*b*) la curvatura de un círculo es el recíproco de su radio.

29. Hallar los puntos de máxima curvatura de las funciones (*a*) $y = e^x$, (*b*) $y = x^3/3$. *Sol.* (*a*) $x = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$, (*b*) $x = 1/\sqrt[4]{5}$.

30. En un cierto sistema de coordenadas, un tramo de vía férrea consta de una parte sobre el eje x negativo hasta el origen O, después pasa por el punto $A(1, \frac{1}{4})$ a través de la curva de transición $y = \frac{1}{4}x^4$ y, finalmente, sigue a lo largo de un arco del círculo $144x^2 + 144y^2 - 96x - 264y + 9 = 0$. Demostrar que (*a*) la curva de transición es tangente al tramo recto y al circular en los puntos de unión y (*b*) la curvatura de la curva de transición es cero en O e igual al recíproco del radio del tramo circular en el punto A.

31. Hallar el radio de curvatura de (*a*) $x^3 + xy^2 - 6y^2 = 0$ en $(3, 3)$, (*b*) $x = a\operatorname{sech}^{-1}y/a - \sqrt{a^2 - y^2}$ en (x, y), (*c*) $x = 2a\operatorname{tag}\theta$, $y = a\operatorname{tag}^2\theta$, (*d*) $x = a\cos^4\theta$, $y = a\operatorname{sen}^4\theta$.
Sol. (*a*) $5\sqrt{5}$, (*b*) $a\sqrt{a^2 - y^2}/|y|$, (*c*) $2a\,|\sec^3\theta|$, (*d*) $2a(\operatorname{sen}^4\theta + \cos^4\theta)^{3/2}$

32. Hallar el centro de curvatura (*a*) en el Problema 31 (*a*), (*b*) de la función $y = \operatorname{sen} x$ en un máximo.
Sol. (*a*) $C(-7, 8)$, (*b*) $C(\frac{1}{2}\pi, 0)$.

33. Hallar la ecuación del círculo osculador de la parábola $y^2 = 12x$ en los puntos $(0, 0)$ y $(3, 6)$.
Sol. $(x - 6)^2 + y^2 = 36$, $(x - 15)^2 + (y + 6)^2 = 288$

34. Hallar la ecuación de la evoluta de
(*a*) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, (*b*) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, (*c*) $x = 2\cos t + \cos 2t$, $y = 2\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t$.
Sol. (*a*) $(a\alpha)^{2/3} + (b\beta)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$ (*b*) $(\alpha + \beta)^{2/3} + (\alpha - \beta)^{2/3} = 2a^{2/3}$
(*c*) $\alpha = \frac{1}{3}(2\cos t - \cos 2t)$, $\beta = \frac{1}{3}(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$

Capítulo 18

Vectores en el plano

ESCALARES Y VECTORES. Las magnitudes, tales como el tiempo, la temperatura, etc., que se determinan únicamente mediante un número, reciben el nombre de *escalares*. En consecuencia, las magnitudes escalares obedecen a las leyes del álgebra ordinaria; por ejemplo, 5 seg. + 3 seg. = 8 seg.

Sin embargo, existen otras magnitudes, como la fuerza, la velocidad, la aceleración, el ímpetu, etcétera, que, para su determinación, exigen el conocimiento de un módulo, una dirección y un sentido; se denominan magnitudes *vectoriales*. Cualquier magnitud vectorial es susceptible de representarse geométricamente mediante un vector o segmento dirigido quedando definida su dirección por el ángulo que dicho segmento forma con una recta del plano y, dentro de ella, su sentido, por el lugar que señala la flecha, y su módulo por la longitud del segmento respecto de la unidad de medida elegida. Las magnitudes escalares se representan por letras, $a, b, c, \ldots$, en forma ordinaria, mientras que las vectoriales se indican con letras en negrilla, **a**, **b**, **c**, . . ., o bien, en la forma **OP** [ver Fig. 18-1(*a*)]. El módulo de un vector, **a** o **OP**, se representa por |**a**| o por |**OP**|, respectivamente.

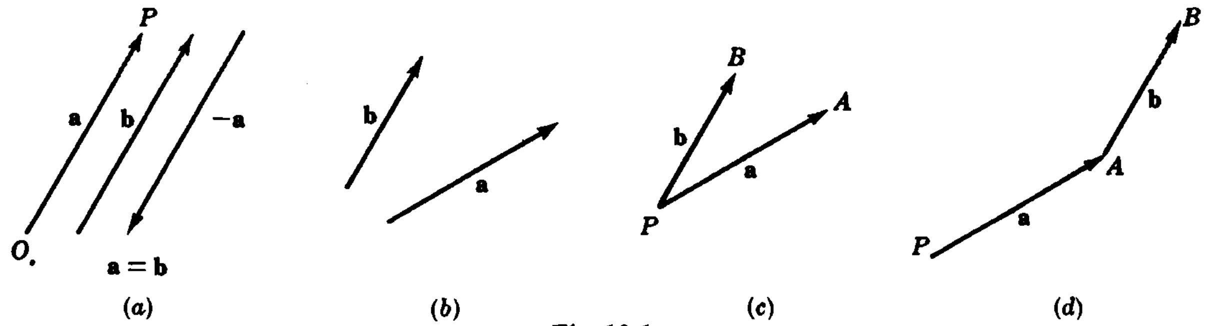


Fig. 18-1

Dos vectores, **a** y **b**, son equipolentes, **a** = **b**, cuando tienen el mismo módulo, dirección y sentido. Dos vectores de igual módulo y dirección, pero de sentido contrario, **a** y —**a**, reciben el nombre de opuestos. Más general, si **a** es un vector y k un escalar positivo, k**a** es un vector de igual dirección y sentido que **a** pero cuyo módulo es k veces el de **a**; si k es negativo, se trata de un vector de igual dirección que **a**, de módulo igual a k veces el de **a** y de sentido opuesto al de **a**.

Un vector, mientras no se advierta lo contrario, carece de una posición fija en el plano, de manera que se puede trasladar o desplazar paralelamente a sí mismo. En particular, si **a** y **b** son dos vectores [Fig. 18-1(*b*)], podremos trasladarlos paralelamente a sí mismos hasta conseguir que tengan un mismo punto inicial P u origen común [ver Fig. 18-1(*c*)] o bien que el extremo de **a** coincida con el origen de **b** [Fig. 18-1(*d*)].

SUMA Y DIFERENCIA DE DOS VECTORES. Sean **a** y **b** los vectores de la Fig. 18-1(*b*); *su suma* o *resultante*, **a** + **b** se halla de una de las maneras siguientes:

(i) Trazando los vectores como se indica en la Fig. 18-1(*c*) y completando el paralelogramo $PAQB$ de la Fig. 18-2(*e*). El vector suma es **PQ**.

(ii) Trazando los vectores como se indica en la Fig. 18-1(*d*) y completando el triángulo PAB de la Fig. 18-2(*f*). En este caso, el vector suma es **PB**.

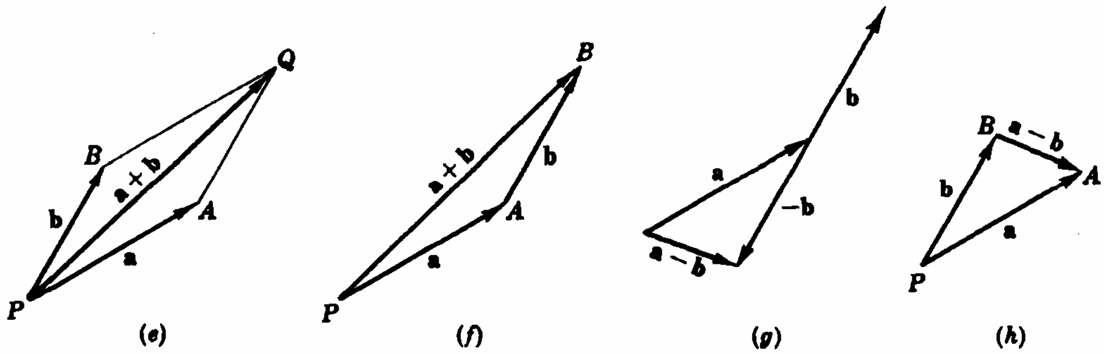


Fig. 18-2

Se deduce, pues, Fig. 18-2(f), que con la suma de tres vectores se puede formar un triángulo siempre que uno de ellos sea igual u opuesto a la suma de los otros dos.

Sean **a** y **b** los vectores de la Fig. 18-1(b); para hallar su diferencia, se procede de una de las formas siguientes:

(iii) Sumando al minuendo el opuesto al sustraendo: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$, ver Fig. 18-2($g$).

(iv) Trazando los vectores como en la Fig. 18-1(c) y completando el triángulo. En la Fig. 18-2(h), el vector $\mathbf{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Sean **a**, **b**, **c** tres vectores y k un escalar; se verifica:

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (Propiedad conmutativa)
2. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ (Propiedad asociativa)
3. $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$ (Propiedad distributiva)

(Ver Problemas 1-4.)

COMPONENTES DE UN VECTOR. Sea $\mathbf{a} = \mathbf{PQ}$, Fig. 18-3(i), un vector y PM y PN dos rectas cualesquiera que pasan por P. Trazando el paralelogramo $PAQB$, tendremos,

$$\mathbf{a} = \mathbf{PA} + \mathbf{PB}$$

De esta manera, el vector **a** se ha *descompuesto* según las direcciones PM y PN, siendo **PA** y **PB** las *componentes de* **a** según dichas direcciones PM y PN.

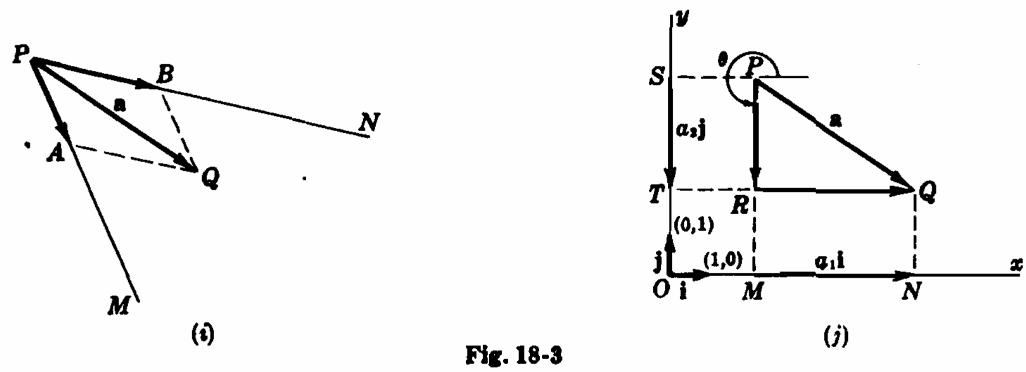


Fig. 18-3

Consideremos ahora un vector **a** en un sistema cartesiano de coordenadas [Fig. 18-3(j)], siendo iguales la unidad de medida sobre los ejes x e y. Los vectores **i** definido por los puntos (0,0) —origen— y (1, 0) —extremo— y **j** por los puntos (0, 0) y (0, 1), cuyos sentidos son los positivos de los ejes, reciben el nombre de *vectores unitarios*, del sistema, y sus módulos son la unidad.

Trazando desde el origen P y desde el extremo Q de **a** las perpendiculares a los ejes x e y y llamando M, N, S y T los respectivos puntos de intersección, tendremos $\mathbf{MN} = a_1\mathbf{i}$, siendo a_1 positivo y $\mathbf{ST} = a_2\mathbf{j}$, siendo a_2 negativo. Así, pues,

$\mathbf{MN} = \mathbf{RQ} = a_1\mathbf{i}$, $\mathbf{ST} = \mathbf{PR}\ a_2\mathbf{j}$, y

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} \qquad (1)$$

Los vectores $a_1\mathbf{i}$ y $a_2\mathbf{j}$ reciben el nombre de *componentes vectoriales* de $\mathbf{a}$ en las direcciones indicadas y a_1 y a_2 el de *componentes escalares*, *componente x* y *componente y*, o, simplemente, *componentes* de $\mathbf{a}$.

Si la dirección de $\mathbf{a}$ se define por medio del ángulo θ, siendo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, medido en el sentido contrario al de las agujas del reloj desde el eje x positivo hasta el vector,

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \qquad (2)$$

y

$$\operatorname{tag}\theta = a_2/a_1 \qquad (3)$$

el cuadrante de θ viene determinado por

$$a_1 = |\mathbf{a}|\cos\theta, \qquad a_2 = |\mathbf{a}|\operatorname{sen}\theta$$

Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$, tendremos

4. $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si y solo si $a_1 = b_1$ y $a_2 = b_2$
5. $k\mathbf{a} = ka_1\mathbf{i} + ka_2\mathbf{j}$
6. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}$
7. $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j}$

(Ver Problema 5.)

PRODUCTO ESCALAR. El producto escalar de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se define por

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|\ \cos\theta \qquad (4)$$

siendo θ el menor de los ángulos formado por dichos vectores con el mismo origen (ver Fig. 18-4).

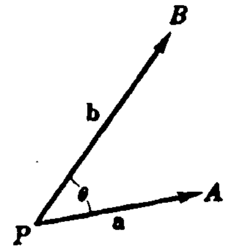


Fig. 18-4

De (4) se deduce

8. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ (Propiedad conmutativa)
9. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\ |\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2$ o $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$
10. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ si (i) $\mathbf{a} = 0$, o (ii) $\mathbf{b} = 0$, o (iii) $\mathbf{a}$ es perpendicular a $\mathbf{b}$
11. $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1$; $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = 0$
12. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j})\cdot(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = a_1b_1 + a_2b_2$
13. $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ (Propiedad distributiva)
14. $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{d}$

PROYECCIONES ESCALAR Y VECTORIAL. En la ecuación (1), el escalar a_1 se denomina *proyección escalar* de $\mathbf{a}$ sobre un vector de dirección la del eje x, mientras que $a_1\mathbf{i}$ es la *proyección vectorial* sobre la misma dirección.

En el Problema 7 se calcula la proyección escalar $\mathbf{a}\cdot\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ y la proyección vertical $\left(\mathbf{a}\cdot\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right)\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ de un vector $\mathbf{a}$ sobre otro $\mathbf{b}$. (Obsérvese que si la dirección de $\mathbf{b}$ es la del eje x, $\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \mathbf{i}$.)

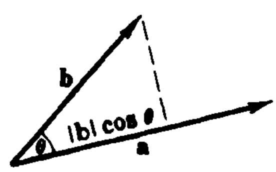


Fig. 18-5

En estas condiciones,

15. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ = producto del módulo de $\mathbf{a}$ por la proyección escalar de $\mathbf{b}$ sobre $\mathbf{a}$
= producto del módulo de $\mathbf{b}$ por la proyección escalar de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{b}$. (Ver Fig. 18-5.)

(Ver Problemas 8-9.)

DERIVADA DE UN VECTOR. Sea la curva representada en la Fig. 18-6 dada por sus ecuaciones paramétricas

$$x = f(u),\ y = g(u)$$

El vector

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \mathbf{i}f(u) + \mathbf{j}g(u)$$

que una el origen con el punto $P(x, y)$ de la curva, recibe el nombre de *vector de posición* o radio vector de P. En lo sucesivo, los vectores de posición los representamos por la letra $\mathbf{r}$, es decir, $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, representa un vector «libre», mientras que $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ es el *vector* que une el origen con el punto $P(3, 4)$.

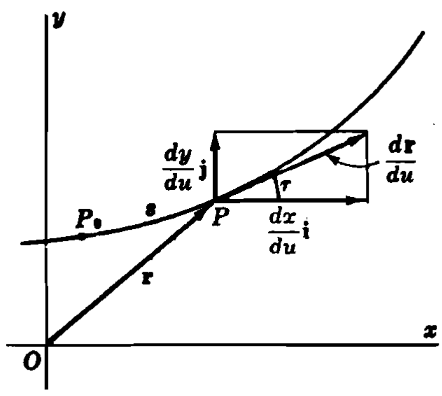


Fig. 18-6

La derivada de $\mathbf{r}$ con respecto a u es

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} \tag{5}$$

Llamando s a la longitud de arco medido desde un punto fijo P_0 de la curva de manera que s aumenta con u y τ es el ángulo que $d\mathbf{r}/du$ forma con el eje x positivo,

$$\operatorname{tag} \tau = \frac{dy/du}{dx/du} = \frac{dy}{dx} = \text{pendiente de la tangente a la curva en } P$$

El módulo del vector $d\mathbf{r}/du$ es

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{du}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} = \frac{ds}{du}$$

y su dirección y sentido, los de la tangente en P. Este vector se suele representar con su origen en el punto P.

Si ahora suponemos que la variable escalar u es la longitud de arco s (5), tendremos:

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} \tag{6}$$

estando determinada la dirección y el sentido de $\mathbf{t}$ por τ, mientras que su módulo viene dado por $\sqrt{(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2} = 1$. Es decir, $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$ es el *vector tangente unitario a la curva* en P.

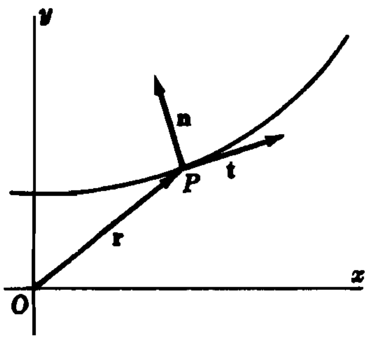


Fig. 18-7

Como $\mathbf{t}$ es un vector unitario, $\mathbf{t}$ y $d\mathbf{t}/ds$ son perpendiculares (ver Problema 11). Representando por $\mathbf{n}$ un vector unitario aplicado en P, cuya dirección y sentido sean las de $d\mathbf{t}/ds$, cuando P se mueve a lo largo de la curva (Fig. 18-7) el módulo de $\mathbf{t}$ permanece constante; por tanto, $d\mathbf{t}/ds$ indica la variación de la inclinación de $\mathbf{t}$. Así, pues, el módulo de $d\mathbf{t}/ds$ en P es igual al valor numérico de la curvatura en P, es decir, $|d\mathbf{t}/ds| = |K|$ y

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = |K|\,\mathbf{n} \tag{7}$$

(Ver Problemas 10-13.)

Problemas resueltos

1. Demostrar: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

   De la Fig. 18-8, $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{PQ} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

2. Demostrar: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

   De la Fig. 18-9, $\mathbf{PC} = \mathbf{PB} + \mathbf{BC} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$. También, $\mathbf{PC} = \mathbf{PA} + \mathbf{AC} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

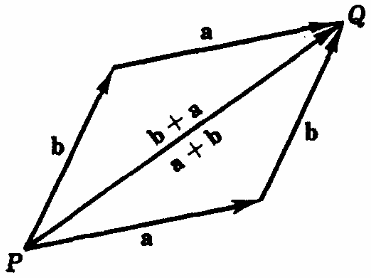


Fig. 18-8

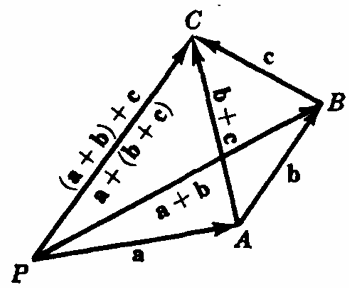


Fig. 18-9

3. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tres vectores con su origen en P y sus extremos, A, B, C, alineados, como indica la Fig. 18-10. Si C divide a BA en la relación $x : y$, siendo $x + y = 1$,

$$\mathbf{c} = \mathbf{PB} + \mathbf{BC} = \mathbf{b} + x(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = x\mathbf{a} + (1 - x)\mathbf{b} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$$

   Por ejemplo, si C es el punto medio de BA, $\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ y $\mathbf{BC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

4. Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

   Llamando Q al punto de intersección de las diagonales (Fig. 18-11),

$$\mathbf{PB} = \mathbf{PQ} + \mathbf{QB} = \mathbf{PQ} - \mathbf{BQ} \quad \text{o} \quad \mathbf{b} = x(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - y(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (x - y)\mathbf{a} + (x + y)\mathbf{b}$$

   $x + y = 1$ y $x - y = 0$. De donde $x = y = \frac{1}{2}$ y Q es el punto medio de ambas diagonales.

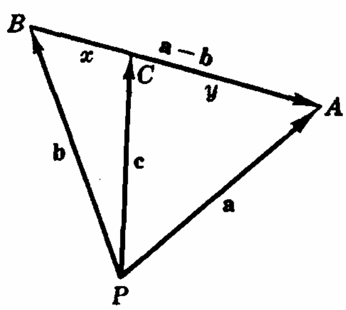


Fig. 18-10

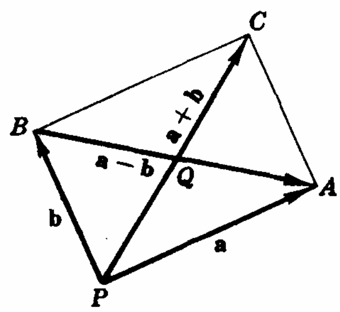


Fig. 18-11

5. Dados los vectores $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, determinar el módulo, dirección y sentido de (*a*) $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, (*b*) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, (*c*) $\mathbf{b} - \mathbf{a}$.

   (*a*) Para $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $\operatorname{tag}\theta = a_2/a_1 = 4/3$, $a_1 = |\mathbf{a}|\cos\theta$, y $\cos\theta = 3/5$. Por tanto θ, situado en el primer cuadrante, es 53°8′.

   Para $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$: $|\mathbf{b}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$; $\operatorname{tag}\theta = -1/2$, $\cos\theta = 2/\sqrt{5}$; $\theta = 360° - 26°34' = 333°26'$.

   (*b*) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.
   $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$; $\operatorname{tag}\theta = 3/5$, $\cos\theta = 5/\sqrt{34}$; $\theta = 30°58'$.

   (*c*) $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (2\mathbf{i} - \mathbf{j}) - (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = -\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$.
   $|\mathbf{b} - \mathbf{a}| = \sqrt{26}$; $\operatorname{tag}\theta = 5$, $\cos\theta = -1/\sqrt{26}$; $\theta = 258°41'$.

6. Demostrar que la mediana correspondiente a la base de un triángulo isósceles es perpendicular a dicha base. (En la Fig. 18-12, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$.)

Del Problema 3, como $\mathbf{m}$ es el punto medio de la base,

$$\mathbf{m} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

De donde
$$\mathbf{m}\cdot(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$
$$= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) = 0$$

como queríamos demostrar.

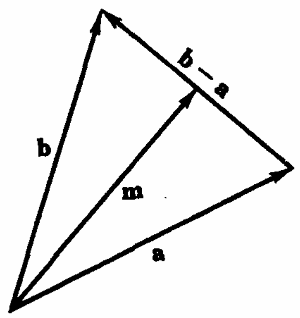


Fig. 18-12

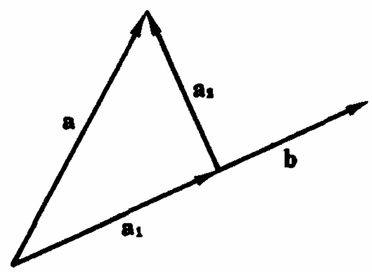


Fig. 18-13

7. Descomponer un vector $\mathbf{a}$ en sus componentes $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ paralela y perpendicular, respectivamente, a otro vector $\mathbf{b}$.

En la Fig. 18-13: $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_1 = c\mathbf{b}$, y $\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b} = 0$. De donde

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{a}_1 = \mathbf{a} - c\mathbf{b}, \qquad \mathbf{a}_2\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{a} - c\mathbf{b})\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - c|\mathbf{b}|^2 = 0$$

y $c = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}$. Por tanto, $\mathbf{a}_1 = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - c\mathbf{b} = \mathbf{a} - \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$.

La proyección escalar de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{b}$ es igual a $\mathbf{a}\cdot\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$, y la proyección vectorial de $\mathbf{a}$ sobre $\mathbf{b}$ es $\left(\mathbf{a}\cdot\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right)\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$.

8. Descomponer $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ en sus componentes $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ paralela y perpendicular, respectivamente, a $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Del Problema 7, $c = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2} = \dfrac{12+3}{10} = \dfrac{3}{2}$. Por tanto $\mathbf{a}_1 = c\mathbf{b} = {}^9/_2\mathbf{i} + {}^3/_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{a}_1 = -\tfrac{1}{2}\mathbf{i} + {}^3/_2\mathbf{j}$.

9. Calcular el trabajo realizado al aplicar una fuerza $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ sobre un objeto que lo desplaza según la dirección del vector $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

Trabajo realizado = (proyección escalar de $\mathbf{b}$ en la dirección de $\mathbf{a}$) (distancia recorrida)

$$= (|\mathbf{b}|\cos\theta)\,|\mathbf{a}| = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = (2\mathbf{i} + \mathbf{j})\cdot(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) = 10$$

10. Si $\mathbf{a} = \mathbf{i}f_1(u) + \mathbf{j}f_2(u)$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i}g_1(u) + \mathbf{j}g_2(u)$, demostrar que $\dfrac{d}{du}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \dfrac{d\mathbf{a}}{du}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\dfrac{d\mathbf{b}}{du}$.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (\mathbf{i}f_1 + \mathbf{j}f_2)\cdot(\mathbf{i}g_1 + \mathbf{j}g_2) = f_1g_1 + f_2g_2,$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = f_1'g_1 + f_1g_1' + f_2'g_2 + f_2g_2' \qquad \left(f_1' = \frac{df_1(u)}{du}\right)$$
$$= (f_1'g_1 + f_2'g_2) + (f_1g_1' + f_2g_2')$$
$$= (\mathbf{i}f_1' + \mathbf{j}f_2')\cdot(\mathbf{i}g_1 + \mathbf{j}g_2) + (\mathbf{i}f_1 + \mathbf{j}f_2)\cdot(\mathbf{i}g_1' + \mathbf{j}g_2') = \frac{d\mathbf{a}}{du}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{du}$$

11. Si $\mathbf{a} = \mathbf{i}f_1(u) + \mathbf{j}f_2(u)$ es de módulo constante, demostrar que $\mathbf{a}$ y $d\mathbf{a}/du$ son perpendiculares.

De $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ = constante $\neq 0$, obtenemos, Problema 10, $\dfrac{d}{du}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}) = \dfrac{d\mathbf{a}}{du}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\dfrac{d\mathbf{a}}{du} = 2\mathbf{a}\cdot\dfrac{d\mathbf{a}}{du} = 0$.

De donde $\mathbf{a}\cdot\dfrac{d\mathbf{a}}{du} = 0$ con lo cual $\mathbf{a}$ y $\dfrac{d\mathbf{a}}{du}$ son perpendiculares.

Así, pues, la tangente a una circunferencia en uno de sus puntos P es perpendicular al radio correspondiente a P.

12. Siendo $\mathbf{r} = \mathbf{i}\cos^2\theta + \mathbf{j}\,\text{sen}^2\theta$, calcular $\mathbf{t}$.

$$d\mathbf{r}/d\theta = -\mathbf{i}\,\text{sen}\,2\theta + \mathbf{j}\,\text{sen}\,2\theta$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\right| = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}} = \sqrt{2}\,\text{sen}\,2\theta \quad \text{y} \quad \mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

13. Siendo $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\text{sen}^3\theta$, calcular $\mathbf{t}$ y $\mathbf{n}$ para $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

$$\mathbf{r} = a\mathbf{i}\cos^3\theta + a\mathbf{j}\,\text{sen}^3\theta$$

$$d\mathbf{r}/d\theta = -3a\mathbf{i}\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta + 3a\mathbf{j}\,\text{sen}^2\theta\cos\theta$$

$$ds/d\theta = |d\mathbf{r}/d\theta| = 3a\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\,\frac{d\theta}{ds} = -\mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\,\text{sen}\,\theta$$

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = (\mathbf{i}\,\text{sen}\,\theta + \mathbf{j}\cos\theta)\,\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{3a\cos\theta}\mathbf{i} + \frac{1}{3a\,\text{sen}\,\theta}\mathbf{j}$$

Para $\theta = \frac{1}{4}\pi$: $\mathbf{t} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$, $\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{\sqrt{2}}{3a}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{3a}\mathbf{j}$, $|K| = \left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right| = \frac{2}{3a}$, $\mathbf{n} = \frac{1}{|K|}\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$

14. Demostrar que el vector $\mathbf{a} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es perpendicular a la recta $ax + by + c = 0$.

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos de la recta. Tendremos $ax_1 + by_1 + c = 0$, $ax_2 + by_2 + c = 0$, y restando la primera de la segunda,

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = 0$$

Ahora bien

$$\begin{aligned} a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) &= (a\mathbf{i} + b\mathbf{j})\cdot[(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}] \\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{P_1P_2} = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathbf{a}$ es perpendicular (normal) a la recta.

15. Deducir, con ayuda del cálculo vectorial:

(*a*) la ecuación de la recta que pasa por el punto $P_1(2, 3)$ y es perpendicular a la recta $x + 2y + 5 = 0$;

(*b*) la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(2, 3)$ y $P_2(5, -1)$.

Tómese el punto genérico $P(x, y)$ de la recta pedida.

(*a*) El vector $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, Problema 14, es normal a la recta $x + 2y + 5 = 0$. Por tanto, $\mathbf{P_1P} = (x - 2)\mathbf{i} + (y - 3)\mathbf{j}$ es paralelo a $\mathbf{a}$, esto es:

$$(x - 2)\mathbf{i} + (y - 3)\mathbf{j} = k(\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \qquad (\text{siendo } k \text{ un escalar variable})$$

Igualando componentes, tendremos $x - 2 = k$, $y - 3 = 2k$. Eliminando k, la ecuación pedida es $y - 3 = 2(x - 2)$ ó $2x - y - 1 = 0$.

(*b*) Tendremos $\mathbf{P_1P} = (x - 2)\,\mathbf{i} + (y - 3)\mathbf{j}$ y $\mathbf{P_1P_2} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

Ahora bien $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ es perpendicular a $\mathbf{P_1P_2}$ y , por tanto, a $\mathbf{P_1P}$. La ecuación buscada es

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{P_1P} = (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j})\cdot[(x - 2)\,\mathbf{i} + (y - 3)\mathbf{j}] = 0 \quad \text{ó} \quad 4x + 3y - 17 = 0$$

16. Deducir con ayuda del cálculo vectorial, la distancia del punto $P_1(2, 3)$ a la recta $3x + 4y - 12 = 0$.

Tracemos desde un punto de la recta, por ejemplo $A(4, 0)$ el vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ perpendicular a la misma. La distancia pedida es

$$d = |\mathbf{AP_1}|\cos\theta$$

Como $\mathbf{a}\cdot\mathbf{AP_1} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{AP_1}|\cos\theta = |\mathbf{a}|\,d$; tendremos

$$d = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{AP_1}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})\cdot(-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})}{5} = \frac{-6 + 12}{5} = \frac{6}{5}$$

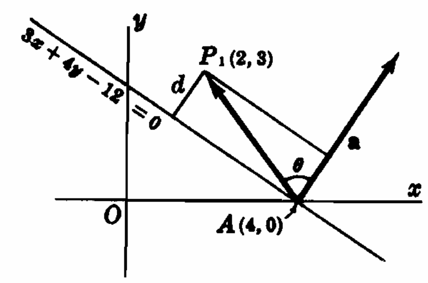


Fig. 18-14

Problemas propuestos

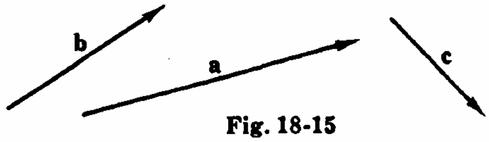


Fig. 18-15

17. Dados los vectores **a**, **b**, **c** (ver Fig. 18-15), construir
    (*a*) $2\mathbf{a}$ (*d*) $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$
    (*b*) $-3\mathbf{b}$ (*e*) $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$
    (*c*) $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$

18. Demostrar que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad. (Ver Fig. 18-16.)

19. Siendo **a**, **b**, **c**, **d** los lados consecutivos de un cuadrilátero, demostrar que $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = 0$. (Ver Fig. 18-17.) *Ind.*: sean P y Q dos vértices opuestos. Expresar **PQ** siguiendo dos caminos diferentes.

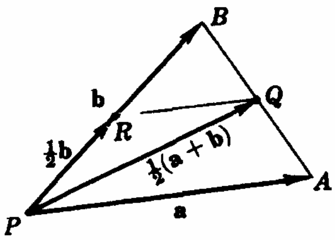


Fig. 18-16

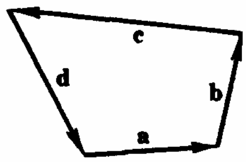


Fig. 18-17

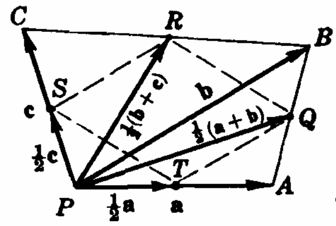


Fig. 18-18

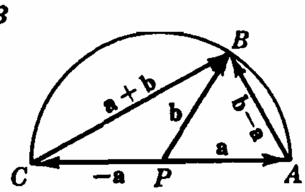


Fig. 18-19

20. Demostrar que al unir consecutivamente los puntos medios de los lados de un cuadrilátero se obtiene un paralelogramo. (Ver Fig. 18-18.)

21. Siendo $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ e igual al radio de la circunferencia de la Fig. 18-19, demostrar que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

22. Hallar el módulo y el ángulo que forman con el eje x positivo los vectores siguientes:
    (*a*) $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, (*b*) $-\mathbf{i} + \mathbf{j}$, (*c*) $\mathbf{i} + \sqrt{3}\,\mathbf{j}$, (*d*) $\mathbf{i} - \sqrt{3}\,\mathbf{j}$.
    Sol. (*a*) $\sqrt{2}$; $\theta = \frac{1}{4}\pi$, (*b*) $\sqrt{2}$; $\theta = 3\pi/4$, (*c*) 2; $\theta = \pi/3$ (*d*) 2; $\theta = 5\pi/3$

23. Demostrar que si **u** se obtiene al girar un ángulo θ el vector unitario **i** alrededor del origen y en el sentido contrario al de las agujas del reloj se verifica: $\mathbf{u} = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\theta$.

24. Demostrar, aplicando el teorema del coseno, que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = \frac{1}{2}\{\,|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{c}|^2\}$.

25. Expresar en la forma $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$:
    (*a*) el vector que une el origen con el punto $P(2, -3)$;
    (*b*) el vector que une los puntos $P_1(2, 3)$ y $P_2(4, 2)$;
    (*c*) el vector que une los puntos $P_2(4, 2)$ y $P_1(2, 3,)$; el vector unitario en la dirección y sentido de $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$;
    (*e*) el vector de módulo 6 que forme un ángulo de 120° con el eje x positivo.
    Sol. (*a*) $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, (*b*) $2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, (*c*) $-2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, (*d*) ${}^3/_5\mathbf{i} + {}^4/_5\mathbf{j}$, (*e*) $-3\mathbf{i} + 3\sqrt{3}\,\mathbf{j}$

26. Aplicando el cálculo vectorial deducir la fórmula de la distancia entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

27. Tres vértices de un cuadrilátero, $OAPB$ son los puntos $O(0, 0)$, $A(3, 1)$ y $B(1, 5)$. Hallar las coordenadas de P.

28. (*a*) Hallar k de forma que $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + k\mathbf{j}$ sean perpendiculares.
    (*b*) Hallar un vector perpendicular a $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$.

29. Demostrar las propiedades 8-15 del producto escalar.

30. Hallar las proyecciones vectorial y escalar de **b** sobre **a**, siendo (*a*) $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}, \mathbf{b} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$; (*b*) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{b} = 10\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
    Sol. (*a*) $-\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, -\sqrt{5}$, (*b*) $4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}, 2\sqrt{13}$.

31. Demostrar que por traslación de tres vectores **a**, **b**, **c** se puede obtener un triángulo siempre que (*a*) uno de ellos sea igual a la suma de los otros dos o (*b*) $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$.

32. Demostrar que $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = -7\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ son los lados de un triángulo rectángulo. Comprobar que el punto medio de la hipotenusa equidista de los vértices.

33. Hallar el vector tangente unitario $\mathbf{t} = d\mathbf{r}/ds$, siendo:
    (*a*) $\mathbf{r} = 4\mathbf{i}\cos\theta + 4\mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\theta$; (*b*) $\mathbf{r} = e^{\theta}\mathbf{i} + e^{-\theta}\mathbf{j}$; (*c*) $\mathbf{r} = \theta\mathbf{i} + \theta^2\mathbf{j}$.
    Sol. (*a*) $-\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\theta + \mathbf{j}\cos\theta$, (*b*) $\dfrac{e^{\theta}\mathbf{i} - e^{-\theta}\mathbf{j}}{\sqrt{e^{2\theta} + e^{-2\theta}}}$. (*c*) $\dfrac{\mathbf{i} - 2\theta\mathbf{j}}{\sqrt{1 + 4\theta^2}}$

34. (*a*) Calcular en la curva del Problema 33(*a*). (*b*) Calcular **n** en la curva del Problema 33(*c*).
    (*c*) Calcular **t** y **n**, siendo $x = \cos\theta + \theta\,\mathrm{sen}\,\theta$, $y = \mathrm{sen}\,\theta - \theta\cos\theta$.
    Sol. (*a*) $-\mathbf{i}\cos\theta - \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\theta$, (*b*) $\dfrac{-2\theta}{\sqrt{1 + 4\theta^2}}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{1 + 4\theta^2}}\mathbf{j}$, (*c*) $\mathbf{t} = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\theta$, $\mathbf{n} = -\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\theta + \mathbf{j}\cos\theta$.

Capítulo 19

Movimiento curvilíneo

VELOCIDAD EN EL MOVIMIENTO CURVILINEO. Sea $P(x, y)$ un punto móvil a lo largo de la curva de ecuación

$$x = f(t),\ y = g(t)$$

siendo t el tiempo. Derivando el vector de posición

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y \qquad (1)$$

con respecto a t, obtenemos el *vector velocidad*

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i}\frac{dx}{dt} + \mathbf{j}\frac{dy}{dt} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y \qquad (2)$$

siendo $v_x = dx/dt$ y $v_y = dy/dt$.

El módulo de $\mathbf{v}$ viene dado por

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{ds}{dt}$$

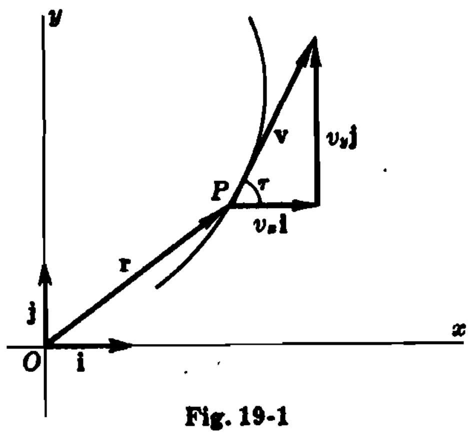


Fig. 19-1

La dirección de $\mathbf{v}$ en P es la tangente a la trayectoria en P, como indica la Fig. 19-1. Llamando τ al ángulo que forma la tangente con el eje x positivo, tag $\tau = v_y/v_x$, con las componentes determinadas por $v_x = |\mathbf{v}| \cos\tau$ y $v_y = |\mathbf{v}| \operatorname{sen}\tau$.

ACELERACION EN EL MOVIMIENTO CURVILINEO. Derivando (2) con respecto a t obtendremos el *vector aceleración*

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \mathbf{j}\frac{d^2y}{dt^2} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y \qquad (3)$$

siendo $a_x = d^2x/dt^2$ y $a_y = d^2y/dt^2$.

El módulo de $\mathbf{a}$ viene dado por

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

La dirección ϕ de $\mathbf{a}$ es tag $\phi = a_y/a_x$ estando determinado el cuadrante por $a_x = |\mathbf{a}| \cos\phi$ y $a_y = |\mathbf{a}| \operatorname{sen}\phi$. (Ver Fig. 19-2.)

En los Problemas 1-3 se estudia el movimiento de dos formas distintas. En la primera de ellas se emplea el concepto de vector de posición (1), del vector velocidad (2) y del vector aceleración, para lo cual se precisa conocer las ecuaciones paramétricas de la trayectoria. En la segunda, la más corriente, se utilizan las componentes x e y de estos vectores y no se precisa conocer la ecuación de la trayectoria en forma paramétrica. Los dos procedimientos, por supuesto, conducen al mismo resultado pues ambas soluciones son, en esencia, iguales.

(Ver Problemas 1-3.)

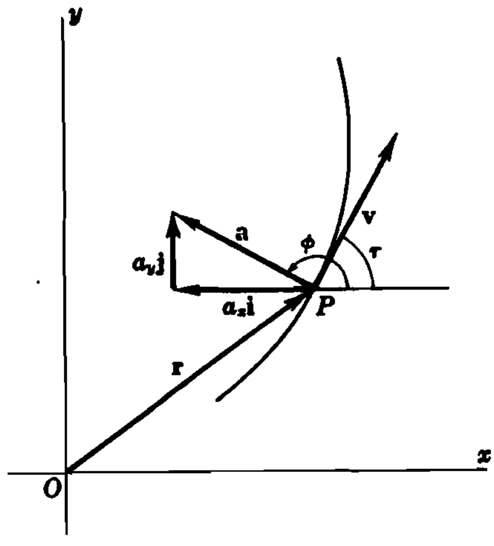


Fig. 19-2

COMPONENTES TANGENCIAL Y NORMAL DE LA ACELERACION. De (*6*), Capítulo 18, obtenemos

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \mathbf{t}\frac{ds}{dt} \tag{4}$$

de donde

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{t}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\mathbf{t}}{dt}\frac{ds}{dt} \tag{5}$$

$$= \mathbf{t}\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{d\mathbf{t}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \mathbf{t}\frac{d^2s}{dt^2} + |K|\mathbf{n}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

por (*7*), Capítulo 18.

La fórmula (*5*) expresa analíticamente la descomposición del vector aceleración en P según la tangente y normal en él. Llamando a_t y a_n, respectivamente, dichas componentes, sus módulos son

$$|a_t| = \left|\frac{d^2s}{dt^2}\right| \quad \text{y} \quad |a_n| = \frac{(ds/dt)^2}{R} = \frac{|\mathbf{v}|^2}{R}$$

en donde R es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto P. (Ver Fig. 19-3.)

Como $|\mathbf{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 = a_t^2 + a_n^2$, tendremos

$$a_n^2 = |\mathbf{a}|^2 - a_t^2$$

que es otra forma de determinar $|a_n|$.

(Ver Problemas 4-8.)

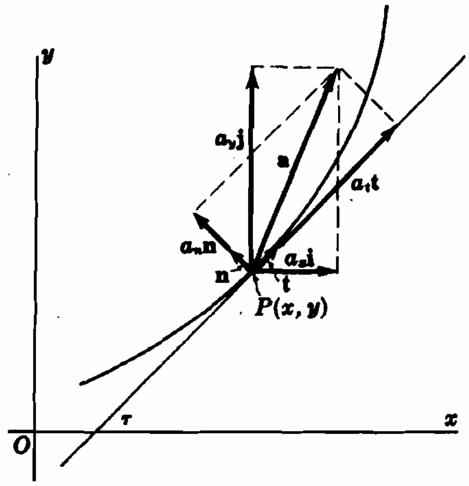


Fig. 19-3

Problemas resueltos

1. Estudiar el movimiento definido por las ecuaciones $x = \cos 2\pi t$, $y = 3 \operatorname{sen} 2\pi t$. Determinar el módulo y dirección de los vectores velocidad y aceleración en los instantes (*a*) $t = 1/6$ y (*b*) $t = 2/3$.

La trayectoria del movimiento es la elipse $9x^2 + y^2 = 9$, comenzando, en el instante inicial $t = 0$, en el punto (1, 0), siendo el sentido de circulación el contrario al de las agujas del reloj.

Primera solución.

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{i}x + \mathbf{j}y = \mathbf{i}\cos 2\pi t + 3\mathbf{j}\operatorname{sen} 2\pi t \\ \mathbf{v} &= d\mathbf{r}/dt = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y = -2\pi\mathbf{i}\operatorname{sen} 2\pi t + 6\pi\mathbf{j}\cos 2\pi t \\ \mathbf{a} &= d\mathbf{v}/dt = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y = -4\pi^2\mathbf{i}\cos 2\pi t - 12\pi^2\mathbf{j}\operatorname{sen} 2\pi t \end{aligned}$$

(*a*) Para $t = 1/6$:

$$\mathbf{v} = -\sqrt{3}\pi\mathbf{i} + 3\pi\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a} = -2\pi^2\mathbf{i} - 6\sqrt{3}\,\pi^2\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{(-\sqrt{3}\pi)^2 + (3\pi)^2} = 2\sqrt{3}\pi$$

$$\operatorname{tag}\tau = v_y/v_x = -\sqrt{3}, \quad \cos\tau = v_x/|\mathbf{v}| = -1/2, \quad \text{y} \quad \tau = 120^\circ$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{(-2\pi^2)^2 + (-6\sqrt{3}\,\pi^2)^2} = 4\sqrt{7}\,\pi^2$$

$$\operatorname{tag}\phi = a_y/a_x = 3\sqrt{3}, \quad \cos\phi = a_x/|\mathbf{a}| = -1/2\sqrt{7}, \quad \text{y} \quad \phi = 259^\circ 6'$$

(*b*) Para $t = 2/3$:

$$\mathbf{v} = \sqrt{3}\,\pi\mathbf{i} - 3\pi\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a} = 2\pi^2\mathbf{i} + 6\sqrt{3}\,\pi^2\mathbf{j}$$

$$|\mathbf{v}| = 2\sqrt{3}\,\pi; \quad \operatorname{tag}\tau = -\sqrt{3}, \quad \cos\tau = 1/2, \quad \text{y} \quad \tau = 5\pi/3$$

$$|\mathbf{a}| = 4\sqrt{7}\,\pi^2; \quad \operatorname{tag}\phi = 3\sqrt{3}, \quad \cos\phi = 1/2\sqrt{7}, \quad \text{y} \quad \phi = 79^\circ 6'$$

Segunda solución:

$$x = \cos 2\pi t, \quad v_x = dx/dt = -2\pi \operatorname{sen} 2\pi t, \quad a_x = d^2x/dt^2 = -4\pi^2 \cos 2\pi t$$
$$y = 3 \operatorname{sen} 2\pi t, \quad v_y = dy/dt = 6\pi \cos 2\pi t, \quad a_y = d^2y/dt^2 = -12\pi^2 \operatorname{sen} 2\pi t$$

(*a*) Para $t = 1/6$:

$$v_x = -\sqrt{3}\,\pi, \quad v_y = 3\pi, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 2\sqrt{3}\,\pi$$
$$\operatorname{tag} \tau = v_y/v_x = -\sqrt{3}, \quad \cos\tau = v_x/|\mathbf{v}| = -1/2, \quad \text{y} \quad \tau = 120°$$
$$a_x = -2\pi^2, \quad a_y = -6\sqrt{3}\,\pi^2, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 4\sqrt{7}\,\pi^2$$
$$\operatorname{tag} \phi = a_y/a_x = 3\sqrt{3}, \quad \cos\phi = a_x/|\mathbf{a}| = -1/2\sqrt{7}, \quad \text{y} \quad \phi = 259°6'$$

(*b*) Para $t = 2/3$:

$$v_x = \sqrt{3}\,\pi, \quad v_y = -3\pi, \quad |\mathbf{v}| = 2\sqrt{3}\,\pi$$
$$\operatorname{tag} \tau = -\sqrt{3}, \quad \cos\tau = \tfrac{1}{2}, \quad \text{y} \quad \tau = 5\pi/3$$
$$a_x = 2\pi^2, \quad a_y = 6\sqrt{3}\,\pi^2, \quad |\mathbf{a}| = 4\sqrt{7}\,\pi^2$$
$$\operatorname{tag} \phi = 3\sqrt{3}, \quad \cos\phi = 1/2\sqrt{7}, \quad \text{y} \quad \phi = 79°6'$$

2. Un punto móvil recorre la circunferencia $x^2 + y^2 = 625$ a una velocidad de módulo $|\mathbf{v}| = 15$ en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Hallar τ, $|\mathbf{a}|$ y ϕ en el punto (*a*) (20, 15) y (*b*) $(5, -10\sqrt{6})$. (Ver Fig. 19-4.)

Primera solución. Tendremos

(i) $$|\mathbf{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 = 225$$

y, derivando con respecto a t,

(ii) $$v_x a_x + v_y a_y = 0.$$

Derivando $x^2 + y^2 = 625$, obtenemos

(iii) $$x v_x + y v_y = 0$$

y $$x a_x + v_x^2 + y a_y + v_y^2 = 0$$

o

(iv) $$x a_x + y a_y = -225$$

Resolviendo (i) y (iii) simultáneamente, resulta

(v) $$v_x = \pm\, {}^3/_5\, y$$

Resolviendo (ii) y (iv) simultáneamente, resulta

(vi) $$a_x = \frac{225 v_y}{y v_x - x v_y}$$

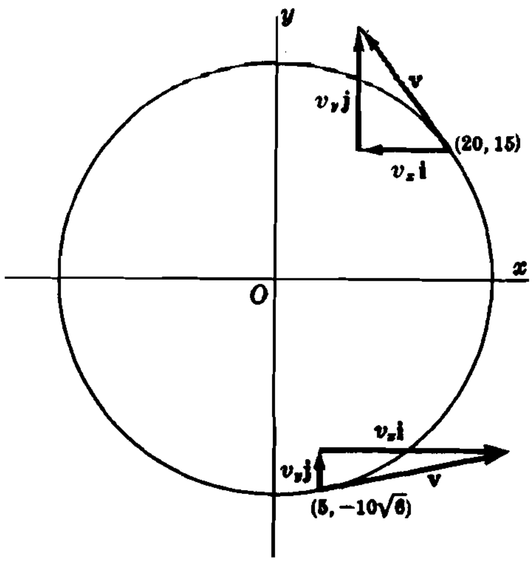


Fig. 19-4

(*a*) De la Fig. 19-4, $v_x < 0$ en (20, 15). De (v), $v_x = -9$; de (iii), $v_y = 12$. Por tanto, $\operatorname{tag} \tau = -4/3$, $\cos\tau = -3/5$, y $\tau = 126°\,52'$. De (vi), $a_x = -36/5$; de (iv), $a_y = -27/5$; y $|\mathbf{a}| = 9$. De donde $\operatorname{tag} \phi = 3/4$, $\cos\phi = -4/5$, y $\phi = 216°\,52'$.

(*b*) De la figura, $v_x > 0$ en $(5, -10\sqrt{6})$. De (v), $v_x = 6\sqrt{6}$; de (iii), $v_y = 3$. Por tanto, $\operatorname{tag} \tau = \sqrt{6}/12$, $\operatorname{sen} \tau = 1/5$, y $\tau = 11°\,32'$. De (vi), $a_x = -9/5$; de (iv), $a_y = 18\sqrt{6}/5$; y $|\mathbf{a}| = 9$. De donde $\operatorname{tag} \phi = -2\sqrt{6}$, $\cos\phi\ -1/5$, y $\phi = 101°\,32'$.

Segunda solución.

De las ecuaciones paramétricas $x = 25\cos\theta$, $y = 25 \operatorname{sen}\theta$, obtenemos, en $P(x, y)$,

$$\mathbf{r} = 25\mathbf{i}\cos\theta + 25\mathbf{j}\operatorname{sen}\phi$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-25\mathbf{i}\operatorname{sen}\theta + 25\mathbf{j}\cos\theta)\frac{d\theta}{dt} = -15\mathbf{i}\operatorname{sen}\theta + 15\mathbf{j}\cos\theta$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (-15\mathbf{i}\cos\theta - 15\mathbf{j}\operatorname{sen}\theta)\frac{d\theta}{dt} = -9\mathbf{i}\cos\theta - 9\mathbf{j}\operatorname{sen}\theta$$

como $|\mathbf{v}| = 15$ es equivalente a una velocidad angular constante $d\theta/dt = 3/5$.

(*a*) En el punto (20, 15), $\operatorname{sen}\theta = 3/5$ y $\cos\theta = 4/5$.

$$\mathbf{v} = -9\mathbf{i} + 12\mathbf{j};\ \operatorname{tag}\tau = -4/3,\ \cos\tau = -3/5,\ \text{y}\ \tau = 126^\circ\,52'$$
$$\mathbf{a} = -{}^{36}/_5\mathbf{i} - {}^{27}/_5\mathbf{j};\ |\mathbf{a}| = 9;\ \operatorname{tag}\phi = {}^3/_4,\ \cos\phi = -{}^4/_5,\ \text{y}\ \phi = 216^\circ\,52'.$$

(*b*) En el punto $(5, -10\sqrt{6})$, $\operatorname{sen}\theta = -{}^2/_5\sqrt{6}$ y $\cos\theta = 1/5$.

$$\mathbf{v} = 6\sqrt{6}\mathbf{i} + 3\mathbf{j};\ \operatorname{tag}\tau = \sqrt{6}/12,\ \cos\tau = {}^2/_5\sqrt{6},\ \text{y}\ \tau = 11^\circ\,32'$$
$$\mathbf{a} = -{}^9/_5\mathbf{i} + {}^{18}/_5\sqrt{6}\mathbf{j};\ |\mathbf{a}| = 9;\ \operatorname{tag}\phi = -2\sqrt{6},\ \cos\phi = -1/5,\ \text{y}\ \phi = 101^\circ\,32'$$

3. Una partícula recorre el arco del primer cuadrante de la parábola $x^2 = 8y$ y siendo $v_y = 2$. Hallar $|\mathbf{v}|$, τ, $|\mathbf{a}|$ y ϕ en el punto (4, 2).

Primera solución.

Derivando $x^2 = 8y$ dos veces con respecto a t, y teniendo en cuenta que $v_y = 2$, obtenemos

$$2xv_x = 8v_y = 16 \quad \text{o} \quad xv_x = 8,\ \text{y}\ xa_x + v_x^2 = 0$$

En (4, 2): $v_x = 8/x = 2$; $|\mathbf{v}| = 2\sqrt{2}$; $\operatorname{tag}\tau = 1$, $\cos\tau = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, y $\tau = \frac{1}{4}\pi$.
$a_x = -1$; $a_y = 0$; $|\mathbf{a}| = 1$; $\operatorname{tag}\phi = 0$, $\cos\phi = -1$, y $\phi = \pi$.

Segunda solución.

Utilizando las ecuaciones paramétricas $x = 4\theta$, $y = 2\theta^2$, tendremos

$$\mathbf{r} = 4\mathbf{i}\theta + 2\mathbf{j}\theta^2$$

$$\mathbf{v} = 4\mathbf{i}\,\frac{d\theta}{dt} + 4\mathbf{j}\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{\theta}\,\mathbf{i} + 2\mathbf{j},\ \text{como}\ v_y = 4\theta\,\frac{d\theta}{dt} = 2\ \text{y}\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2\theta}.\ \mathbf{a} = -\frac{1}{\theta^2}\,\mathbf{i}.$$

En el punto (4, 2), $\theta = 1$. De donde

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j};\ |\mathbf{v}| = 2\sqrt{2};\ \operatorname{tag}\tau = 1,\ \cos\tau = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\ \text{y}\ \tau = \tfrac{1}{4}\pi.$$
$$\mathbf{a} = -\mathbf{i};\ |\mathbf{a}| = 1;\ \operatorname{tag}\phi = 0,\ \cos\phi = -1,\ \text{y}\ \phi = \pi.$$

4. Hallar el módulo de las componentes tangencial y normal de la aceleración en el movimiento $x = e^t\cos t$, $y = e^t\operatorname{sen} t$ en función del tiempo t.

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y = \mathbf{i}e^t\cos t + \mathbf{j}e^t\operatorname{sen} t$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{i}e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) + \mathbf{j}e^t(\operatorname{sen} t + \cos t)$$
$$\mathbf{a} = -2\mathbf{i}e^t\operatorname{sen} t + 2\mathbf{j}e^t\cos t$$

De donde $|\mathbf{a}| = 2e^t$; $ds/dt = |\mathbf{v}| = \sqrt{2}\,e^t$ y $|a_t| = |d^2s/dt^2| = \sqrt{2}\,e^t$; $|a_n| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_t^2} = \sqrt{2}\,e^t$.

5. Una partícula se mueve de izquierda a derecha sobre la parábola $y = x^2$ a velocidad constante igual a 5. Hallar el módulo de las componentes tangencial y normal de la aceleración en el punto (1, 1).

Como la velocidad es constante, $|a_t| = |d^2s/dt^2| = 0$. En (1, 1), $y' = 2x = 2$ y $y'' = 2$.

El radio de curvatura en (1, 1) es $R = \dfrac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}$ y $|a_n| = \dfrac{|\mathbf{v}|^2}{R} = 2\sqrt{5}$

6. La fuerza centrífuga F ejercida sobre una partícula de peso W en un punto de su trayectoria viene dada por $F = \dfrac{W}{g}\,|a_n|$.

Hallar la fuerza centrífuga ejercida por una partícula de 5 kp de peso en los extremos de los ejes de la elipse cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 20\cos t$, $y = 15\operatorname{sen} t$, siendo las unidades de longitud y tiempo el metro y segundo, respectivamente. Tómese $g = 10\ \text{m/s}^2$.

$$\mathbf{r} = 20\mathbf{i}\cos t + 15\mathbf{j}\operatorname{sen} t$$
$$\mathbf{v} = -20\mathbf{i}\operatorname{sen} t + 15\mathbf{j}\cos t$$
$$\mathbf{a} = -20\mathbf{i}\cos t - 15\mathbf{j}\operatorname{sen} t$$

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| = \sqrt{400\operatorname{sen}^2 t + 225\cos^2 t}, \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{175\operatorname{sen} t\cos t}{\sqrt{400\operatorname{sen}^2 t + 225\cos^2 t}}$$

En los extremos del eje mayor ($t = 0$ o $t = \pi$):

$$|\mathbf{a}| = 20,\ |a_t| = |d^2s/dt^2| = 0,\ |a_n| = 20, \text{ y } F = (5/10)(20) = 10 \text{ kp}$$

En los extremos del eje menor ($t = \pi/2$ o $t = 3\pi/2$):

$$|\mathbf{a}| = 15,\ |a_t| = 0,\ |a_n| = 15, \text{ y } F = (5/10)(15) = 7{,}5 \text{ kp}$$

7. Dadas las ecuaciones del movimiento de un proyectil $x = v_0t \cos \psi$, $y = v_0t \operatorname{sen} \psi - \frac{1}{2}gt^2$, siendo v_0 la velocidad inicial, ψ el ángulo de proyección, $g = 10$ m/s^2 y en donde x e y se miden en metros y t en segundos, hallar:

(*a*) la ecuación del movimiento en coordenadas rectangulares,

(*b*) el alcance, (*c*) el ángulo de proyección para el alcance máximo,

(*d*) la velocidad e inclinación del proyectil al cabo de 5 segundos de vuelo, si $v_0 = 150$ metros por segundo y $\psi = 45°$.

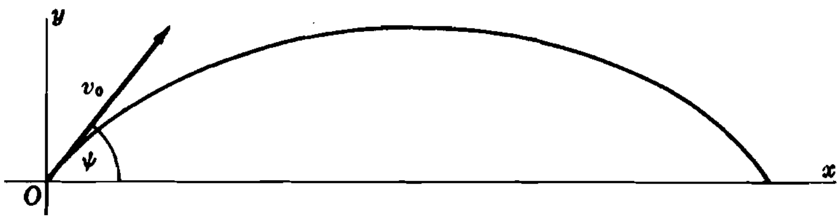


Fig. 19-5

(*a*) Despejando t en la primera ecuación $t = \dfrac{x}{v_0 \cos \psi}$ y sustituyendo en la segunda:

$$y = v_0\left(\frac{x}{v_0 \cos \psi}\right) \operatorname{sen} \psi - \tfrac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos \psi}\right)^2 = x \operatorname{tag} \psi - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \psi}$$

(*b*) Cuando $y = v_0t \operatorname{sen} \psi - \frac{1}{2}gt^2 = 0$, $t = 0$ y $t = (2v_0 \operatorname{sen} \psi)/g$.

Para $t = \dfrac{2v_0 \operatorname{sen} \psi}{g}$, el alcance $= x = v_0 \cos \psi \left(\dfrac{2v_0 \operatorname{sen} \psi}{g}\right) = \dfrac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\psi}{g}$.

(*c*) Para que x sea máximo $\dfrac{dx}{d\psi} = \dfrac{2v_0^2 \cos 2\psi}{g} = 0$, $\cos 2\psi = 0$, y $\psi = \frac{1}{4}\pi$.

(*d*) Cuando $v_0 = 150$ y $\psi = \frac{1}{4}\pi$, $x = 75\sqrt{2}\,t$ e $y = 75\sqrt{2}\,t - 5t^2$. Por tanto,

$$v_x = 75\sqrt{2} \text{ y } v_y = 75\sqrt{2} - 10t$$

Para $t = 5$: $v_x = 75\sqrt{2}$ y $v_y = 75\sqrt{2} - 50$. Por tanto,

$$\operatorname{tag} \tau = v_y/v_x = 0{,}5284,\ \tau = 27°\,48' \text{ y } |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 120 \text{ m/seg.}$$

8. Un punto P se mueve sobre la circunferencia $x = r \cos \beta$, $y = r \operatorname{sen} \beta$ a velocidad lineal de módulo constante v. Demostrar que, si el radio vector de P se mueve con una velocidad angular ω y una aceleración angular α, (*a*) $v = r\omega$ y (*b*) $a = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$.

(*a*) $v_x = -r \operatorname{sen} \beta \cdot \dfrac{d\beta}{dt} = -r \operatorname{sen} \beta \cdot \omega$ y $v_y = r \cos \beta \cdot \dfrac{d\beta}{dt} = r \cos \beta \cdot \omega$.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(r^2 \operatorname{sen}^2 \beta + r^2 \cos^2 \beta)\omega^2} = r\omega$$

(*b*) $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -r\omega \cos \beta \cdot \dfrac{d\beta}{dt} - r \operatorname{sen} \beta \cdot \dfrac{d\omega}{dt} = -r\omega^2 \cos \beta - r\alpha \operatorname{sen} \beta$.

$a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -r\omega \operatorname{sen} \beta \cdot \dfrac{d\beta}{dt} + r \cos \beta \cdot \dfrac{d\omega}{dt} = -r\omega^2 \operatorname{sen} \beta + r\alpha \cos \beta$.

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = r^2(\omega^4 + \alpha^2) \text{ y } a = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$$

Problemas propuestos

9. Hallar el módulo y dirección de la velocidad y aceleración en:

(a) $x = e^t, y = e^{2t} - 4e^t + 3$ para $t = 0$

(b) $x = 2 - t, y = 2t^3 - t$ para $t = 1$

(c) $x = \cos 3t, y = \operatorname{sen} t$ para $t = \frac{1}{4}\pi$

(d) $x = e^t \cos t, y = e^t \operatorname{sen} t$ para $t = 0$

Sol. (a) $|\mathbf{v}| = \sqrt{5}, \tau = 296° 34'; |\mathbf{a}| = 1, \phi = 0$

(b) $|\mathbf{v}| = \sqrt{26}, \tau = 101° 19'; |\mathbf{a}| = 12, \phi = \frac{1}{2}\pi$

(c) $|\mathbf{v}| = \sqrt{5}, \tau = 161° 34'; |\mathbf{a}| = \sqrt{41}, \phi = 353° 40'$

(d) $|\mathbf{v}| = \sqrt{2}, \tau = \frac{1}{4}\pi; |\mathbf{a}| = 2, \phi = \frac{1}{2}\pi$

10. Una partícula se mueve sobre el primer cuadrante del arco de parábola $y^2 = 12x$ con $v_x = 15$. Hallar v_y, $|\mathbf{v}|, \tau; a_x\, a_y, |\mathbf{a}|$, y ϕ en el punto (3, 6).

Sol. $v_y = 15, |\mathbf{v}| = 15\sqrt{2}, \tau = \frac{1}{4}\pi; a_x = 0, a_y = -75/2, |\mathbf{a}| = 75/2, \phi = 3\pi/2.$

11. Una partícula se mueve a lo largo de la parábola cúbica $y = x^3/3$ con una componente de velocidad $v_x = 2$ constante. Hallar el módulo y dirección de la velocidad y de la aceleración cuando $x = 3$.

Sol. $|\mathbf{v}| = 2\sqrt{82}, \tau = 83° 40'; |\mathbf{a}| = 24, \phi = \frac{1}{2}\pi$

12. Una partícula se mueve a lo largo de una circunferencia de 6 metros de radio con una velocidad constante de 4 metros por segundo. Hallar el módulo de su aceleración en un punto cualquiera. *Sol.* $|a_t| = 0, |a| = |a_n| = 8/3$ m/s^2.

13. Hallar el módulo y dirección de la velocidad y de la aceleración así como los módulos de las componentes tangencial y normal de la aceleración del movimiento definido por

(a) $x = 3t, y = 9t - 3t^2$, para $t = 2$

(b) $x = \cos t + \operatorname{sen} t, y = \operatorname{sen} t - t \cos t$ cuando $t = 1$.

Sol. (a) $|\mathbf{v}| = 3\sqrt{2}, \tau = 7\pi/4; |\mathbf{a}| = 6, \phi = 3\pi/2; |a_t| = |a_n| = 3\sqrt{2}$

(b) $|\mathbf{v}| = 1, \tau = 1; |\mathbf{a}| = \sqrt{2}, \phi = 102° 18'; |a_t| = |a_n| = 1$

14. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$ de tal forma que $x = \frac{1}{2}t^2, t > 0$. Hallar $v_x, v_y, |\mathbf{v}|, \tau$; $a_x, a_y, |\mathbf{a}|, \phi; |a_t|$ y $|a_n|$ cuando $t = 1$.

Sol. $v_x = 1, v_y = 0, |\mathbf{v}| = 1, \tau = 0; a_x = 1, a_y = 2, |\mathbf{a}| = \sqrt{5}, \phi = 63° 26'; |a_t| = 1, |a_n| = 2.$

15. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $y = 2x - x^2$ con una componente de velocidad $v_x = 4$ constante. Hallar los módulos de las componentes tangencial y normal de la aceleración en la posición (a) (1, 1) y (b) (2, 0).

Sol. (a) $|a_t| = 0, |a_n| = 32$; (b) $|a_t| = 64/\sqrt{5}, |a_n| = 32/\sqrt{5}$

Capítulo 20

Coordenadas polares

LA POSICION DE UN PUNTO P en un plano con respecto a un punto fijo O del mismo, se puede definir por medio de las proyecciones del vector **OP** sobre dos rectas mutuamente perpendiculares del plano que pasen por O. Este es el sistema cartesiano de coordenadas rectangulares. Otra forma de determinar el punto en cuestión es por medio de la distancia $\varrho = OP$ y el ángulo θ que OP forma con una semirrecta fija OX de origen O (polo). Este es el *sistema de coordenadas polares.*

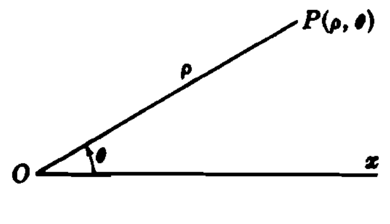


Fig. 20-1

A cada par de números (ϱ, θ) le corresponde un único punto, pero esta correspondencia no es biunívoca ya que, por ejemplo, al punto P de la figura le corresponden las coordenadas $(\varrho, \theta \pm 2n\pi)$ y $[-\varrho, \theta \pm (2n + 1)\pi]$, siendo n un número positivo cualquiera, incluido el cero. En particular, las coordenadas polares del polo son $(0, \theta)$, en donde θ puede ser cualquier ángulo.

La curva cuya ecuación en coordenadas polares es $\varrho = f(\theta)$ o $F(\varrho, \theta) = 0$ está formada por todos los puntos de coordenadas (ϱ, θ) que satisfacen la función o ecuación anterior.

EL ANGULO ψ que el radio vector OP forma con la tangente PT a la curva en un punto $P(\varrho, \theta)$ de ella, viene dado por

$$\operatorname{tag} \psi = \varrho \frac{d\phi}{d\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho'}, \text{ siendo } \varrho' = \frac{d\varrho}{d\phi}$$

El valor de tag ψ juega el mismo papel en el sistema de coordenadas polares, que el de la pendiente de la tangente en el sistema de coordenadas rectangulares.

(Ver Problemas 1-3.)

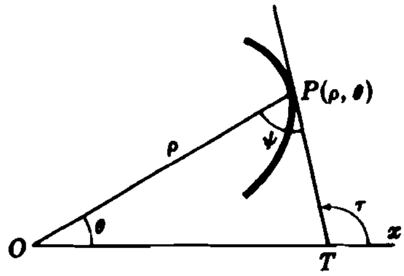


Fig. 20-2

EL ANGULO DE INCLINACION de la tangente a la curva en un punto $P(\varrho, \theta)$ de ella viene dado por

$$\operatorname{tag} \tau = \frac{\varrho \cos \theta + \varrho' \operatorname{sen} \theta}{- \varrho \operatorname{sen} \theta + \varrho' \cos \theta}$$

(Ver Problemas 4-10.)

LOS PUNTOS DE INTERSECCION de dos curvas de ecuaciones

$$\varrho = f_1(\theta) \quad \text{y} \quad \varrho = f_2(\theta)$$

se hallan resolviendo el sistema

$$f_1(\theta) = f_2(\theta) \tag{1}$$

Ejemplo 1:

Hallar los puntos de intersección de $\varrho = 1 + \operatorname{sen} \theta$ y $\varrho = 5 - 3 \operatorname{sen} \theta$.

Igualando $1 + \operatorname{sen} \theta = 5 - 3 \operatorname{sen} \theta$, obtenemos $\operatorname{sen} \theta = 1$.

Por tanto, $\theta = \frac{1}{2}\pi$ y $(2, \frac{1}{2}\pi)$ es el único punto de intersección.

Cuando el polo es un punto de intersección puede ocurrir que no aparezca entre las soluciones de (*1*). El polo es un punto de intersección siempre que haya valores de θ, θ_1 y θ_2, para los cuales $f_1(\theta_1) = 0$ y $f_2(\theta_2) = 0$.

Ejemplo 2:

Hallar los puntos de intersección de $\varrho = \operatorname{sen}\theta$ y $\varrho = \cos\theta$.

De
$$\operatorname{sen}\theta = \cos\theta \qquad (1)$$

se obtiene el punto de intersección $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$. Ahora bien, en este caso, las curvas dadas son circunferencias que pasan por el polo y, sin embargo, este punto no es solución de (*1*) porque sus coordenadas, en la ecuación $\varrho = \operatorname{sen}\theta$, son $(0, 0)$, mientras que en la ecuación $\varrho = \cos\theta$ son $(0, \frac{1}{2}\pi)$.

Ejemplo 3:

Hallar los puntos de intersección de $\varrho = \cos 2\theta$ y $\varrho = \cos\theta$.

Igualando $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \cos\theta$, obtenemos $(\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 1) = 0$.

De donde $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$; y los puntos de intersección son $(1, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 2\pi/3)$, $(-\frac{1}{2}, 4\pi/3)$. El polo es también un punto de intersección.

EL ANGULO DE INTERSECCION ϕ de dos curvas en un punto de intersección $P(\varrho, \theta)$, que no sea el polo, viene dado por

$$\operatorname{tag}\phi = \frac{\operatorname{tag}\psi_1 - \operatorname{tag}\psi_2}{1 + \operatorname{tag}\psi_1 \operatorname{tag}\psi_2}$$

siendo ψ_1 y ψ_2 los ángulos que forma el radio vector OP con las respectivas tangentes a las curvas en P.

Como vemos, el procedimiento de calcular este ángulo es análogo al utilizado en coordenadas rectangulares sin más que sustituir las pendientes de las tangentes por las tangentes de los ángulos que el radio vector forma con las tangentes a las curvas en el punto de intersección.

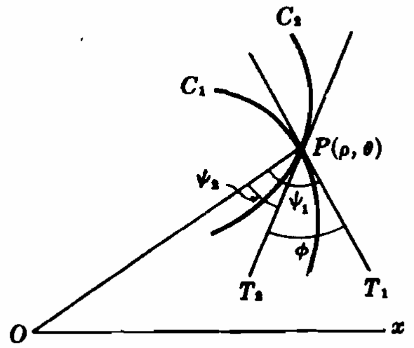


Fig. 20-3

Ejemplo 4:

Hallar los ángulos agudos de intersección de las curvas $\varrho = \cos\theta$ y $\varrho = \cos 2\theta$.
Los puntos de intersección ya se calcularon en el ejemplo 3.
En el polo: este punto viene dado por $\theta = \frac{1}{2}\pi$ de la curva $\varrho = \cos\theta$ y por $\theta = \pi/4$ y $3\pi/4$ de la $\varrho = \cos 2\theta$, Por tanto, en el polo habrá dos intersecciones, siendo el ángulo agudo de cada una de las curvas dadas a $\frac{1}{4}\pi$.

Para $\varrho = \cos\theta$ $\qquad$ Para $\varrho = \cos 2\theta$

$\operatorname{tag}\psi_1 = -\cot\theta$ $\qquad$ $\operatorname{tag}\psi_2 = -\frac{1}{2}\cot 2\theta$

En el punto $(1, 0)$: $\operatorname{tag}\psi_1 = -\cot 0 = \infty$ y $\operatorname{tag}\psi_2 = \infty$. Por tanto, $\psi_1 = \psi_2 = \frac{1}{2}\pi$ y $\phi = 0$.

En el punto $(-\frac{1}{2}, 2\pi/3)$: $\operatorname{tag}\psi_1 = \sqrt{3}/3$ y $\operatorname{tag}\psi_2 = -\sqrt{3}/6$. $\operatorname{tag}\phi = \dfrac{\sqrt{3}/3 + \sqrt{3}/6}{1 - 1/6} = 3\sqrt{3}/5$ y el ángulo agudo de intersección es $\phi = 46° 6'$.
Por simetría, este es también el ángulo agudo de intersección en el punto $(-\frac{1}{2}, 4\pi/3)$.

(Ver Problemas 11-13.)

LA DERIVADA DE LA LONGITUD DE ARCO viene dada por $\dfrac{ds}{d\theta} = \sqrt{\varrho^2 + (\varrho')^2}$ siendo $\varrho' = \dfrac{d\varrho}{d\theta}$ haciendo el convenio de que al aumentar θ también lo hace s.

(Ver Problemas 14-16.)

LA CURVATURA de una curva se expresa por $K = \dfrac{\varrho^2 + 2(\varrho')^2 - \varrho\varrho''}{\{\varrho^2 + (\varrho')^2\}^{3/2}}$.

(Ver Problemas 17-19.)

MOVIMIENTO CURVILINEO. Supongamos que una partícula P se mueve a lo largo de una curva cuya ecuación, en coordenadas polares, es $\varrho = f(\theta)$. Expresando la ecuación de la curva en forma paramétrica:

$$x = \varrho \cos\theta = g(\theta), \quad y = \varrho \operatorname{sen}\theta = h(\theta)$$

El vector de posición de P es

$$\mathbf{r} = \mathbf{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \varrho\mathbf{i}\cos\theta + \varrho\mathbf{j}\operatorname{sen}\theta = \varrho(\mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\operatorname{sen}\theta)$$

y el movimiento de P se puede estudiar como se hizo en el Capítulo 19.

Otro procedimiento es expresar $\mathbf{r}$ y, por tanto, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$, en función de los vectores unitarios según el radio vector de P y su perpendicular. Veamos cuál es la expresión del vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$.

$$\mathbf{u}_\varrho = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\operatorname{sen}\theta$$

cuyo sentido es el de crecimiento de ϱ; el vector unitario según la perpendicular a $\mathbf{r}$ con el sentido del crecimiento de θ, viene dado por

$$\mathbf{u}_\theta = -\mathbf{i}\operatorname{sen}\theta + \mathbf{j}\cos\theta$$

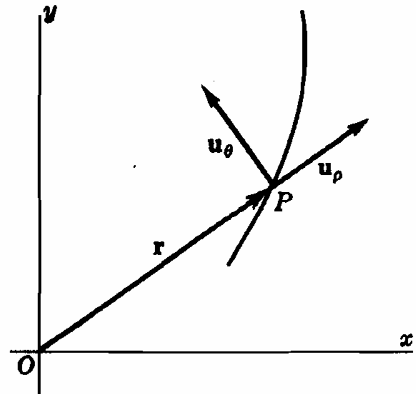


Fig. 20-4

A partir de estas expresiones es fácil llegar a las siguientes:

$$\frac{d\mathbf{u}_\varrho}{dt} = \frac{d\mathbf{u}_\varrho}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \mathbf{u}_\theta\frac{d\theta}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\mathbf{u}_\varrho\frac{d\theta}{dt}$$

De

$$\mathbf{r} = \varrho\,\mathbf{u}_\varrho$$

Como se demuestra en el Problema 20,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}_\varrho\frac{d_\varrho}{dt} + \varrho\mathbf{u}_\theta\frac{d\theta}{dt} = v_\varrho\mathbf{u}_\varrho + v_\theta\mathbf{u}_\theta$$

y

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}_\varrho\left[\frac{d^2\varrho}{dt^2} - \varrho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \mathbf{u}_\theta\left[\varrho\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\varrho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]$$
$$= a_\varrho\mathbf{u}_\varrho + a_\theta\mathbf{u}_\theta$$

Aquí, $v_\varrho = \dfrac{d\varrho}{dt}$ y $v_\theta = \varrho\dfrac{d\theta}{dt}$ son, respectivamente, las componentes de $\mathbf{v}$ en la dirección del radio vector y en su perpendicular, siendo $a_\varrho = \dfrac{d^2\varrho}{dt^2} - \left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2$ y $a_\theta = \varrho\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + 2\dfrac{d\varrho}{dt}\cdot\dfrac{d\theta}{dt}$, las correspondientes componentes de $\mathbf{a}$.

(Ver Problema 21.)

Problemas resueltos

1. Demostrar que tag $\psi = \varrho\dfrac{d\theta}{d\varrho}$, siendo ψ el ángulo formado, en el punto $P(\varrho, \theta)$ de la curva $\varrho = f(\theta)$, por el radio vector OP y la tangente PT.

En la Fig. 20-5, $Q(\varrho + \Delta\varrho, \theta + \Delta\theta)$ es un punto de la curva muy próximo a P. Del triángulo rectángulo PSQ,

$$\operatorname{tag}\lambda = \frac{SP}{SQ} = \frac{SP}{OQ - OS} = \frac{\varrho \operatorname{sen}\Delta\theta}{\varrho + \Delta\varrho - \varrho\cos\Delta\theta}$$

$$= \frac{\varrho \operatorname{sen}\Delta\theta}{\varrho(1 - \cos\Delta\theta) + \Delta\varrho} = \frac{\varrho\dfrac{\operatorname{sen}\Delta\theta}{\Delta\theta}}{\varrho\dfrac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta} + \dfrac{\Delta\varrho}{\Delta\theta}}$$

Ahora bien, cuando $Q \to P$ a lo largo de la curva, $\Delta\theta \to 0$, $OQ \to OP$, $PQ \to PT$ y $\angle\lambda \to \angle\psi$.

Cuando $\Delta\theta \to 0$, $\dfrac{\operatorname{sen}\Delta\theta}{\Delta\theta} \to 1$ y $\dfrac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta} \to 0$ (ver Capítulo 12).

De donde, $\operatorname{tag}\psi = \lim\limits_{\Delta\theta\to 0} \operatorname{tag}\lambda = \dfrac{\varrho}{d\varrho/d\theta} = \varrho\dfrac{d\theta}{d\varrho}$.

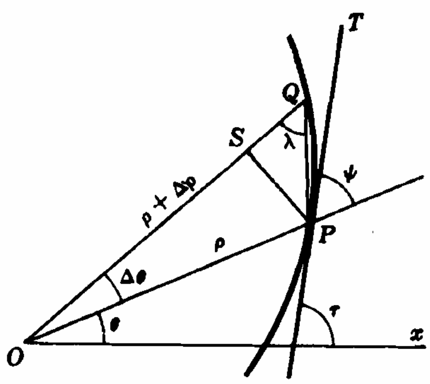


Fig. 20-5

Calcular tag ψ en los puntos dados en las funciones de los problemas 2-3.

2. $\varrho = 2 + \cos\theta$; $\theta = \pi/3$. (Ver Fig. 20-6.)

Para $\theta = \pi/3$: $\varrho = 2 + \frac{1}{2} = 5/2$, $\varrho' = -\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{3}/2$, y $\operatorname{tag}\psi = \varrho/\varrho' = -5/\sqrt{3}$.

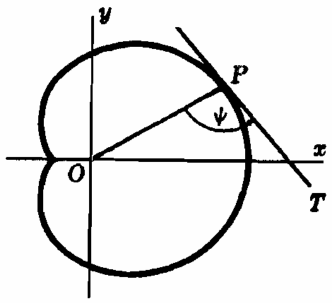


Fig. 20-6

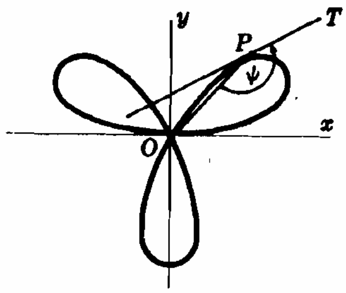


Fig. 20-7

3. $\varrho = 2\operatorname{sen}3\theta$; $\theta = \pi/4$. (Ver Fig. 20-7.)

Para $\theta = \pi/4$: $\varrho = 2(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, $\varrho' = 6\cos 3\theta = 6(-1/\sqrt{2}) = -3\sqrt{2}$, y $\operatorname{tag}\psi = \varrho/\varrho' = -1/3$.

4. Demostrar que $\operatorname{tag}\tau = \dfrac{\varrho\cos\theta + \varrho'\operatorname{sen}\theta}{-\varrho\operatorname{sen}\theta + \varrho'\cos\theta}$.

De la figura del Problema 1, $\tau = \psi + \theta$ y

$$\operatorname{tag}\tau = \operatorname{tag}(\psi + \theta) = \frac{\operatorname{tag}\psi + \operatorname{tag}\theta}{1 - \operatorname{tag}\psi\operatorname{tag}\theta} = \frac{\varrho\dfrac{d\theta}{d\varrho} + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{1 - \varrho\dfrac{d\theta}{d\varrho}\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\varrho\cos\theta + \dfrac{d\varrho}{d\theta}\operatorname{sen}\theta}{\dfrac{d\varrho}{d\theta}\cos\theta - \varrho\operatorname{sen}\theta} = \frac{\varrho\cos\theta + \varrho'\operatorname{sen}\theta}{-\varrho\operatorname{sen}\theta + \varrho'\cos\theta}$$

5. Demostrar que si $\varrho = f(\theta)$ pasa por el polo y θ_1 satisface a la ecuación $f(\theta_1) = 0$ la dirección de la tangente a la curva en el polo $(0, \theta_1)$ viene dada por θ_1.

En $(0, \theta_1)$: $\varrho = 0$ y $\varrho' = f'(\theta_1)$.

Si $\varrho' \neq 0$: $\operatorname{tag}\tau = \dfrac{\varrho\cos\theta + \varrho'\operatorname{sen}\theta}{-\varrho\operatorname{sen}\theta + \varrho'\cos\theta}$

$$= \frac{0 + \operatorname{sen}\theta_1 \cdot f'(\theta_1)}{0 + \cos\theta_1 \cdot f'(\theta_1)} = \operatorname{tag}\theta_1$$

Si $\varrho' = 0$: $\operatorname{tag}\tau = \lim\limits_{\theta\to\theta_1} \dfrac{\operatorname{sen}\theta \cdot f'(\theta)}{\cos\theta \cdot f'(\theta)} = \operatorname{tag}\theta_1$

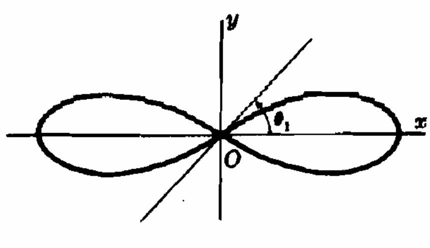


Fig. 20-8

En los Problemas 6-8 hallar la tangente de la curva dada en el punto considerado.

6. $\varrho = 1 - \cos\theta$; $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Ver Fig. 20-9.

Para $\theta = \frac{1}{2}\pi$: $\operatorname{sen}\theta = 1$, $\cos\theta = 0$, $\varrho = 1$, $\varrho' = \operatorname{sen}\theta = 1$, y

$$\operatorname{tag}\tau = \frac{\varrho\cos\theta + \varrho'\operatorname{sen}\theta}{-\varrho\operatorname{sen}\theta + \varrho'\cos\theta} = \frac{1\cdot 0 + 1\cdot 1}{-1\cdot 1 + 1\cdot 0} = -1$$

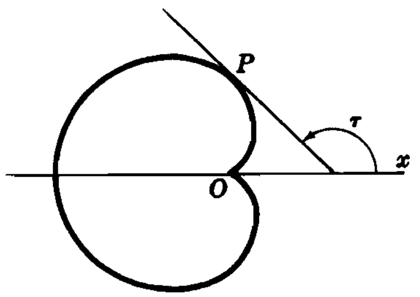


Fig. 20-9

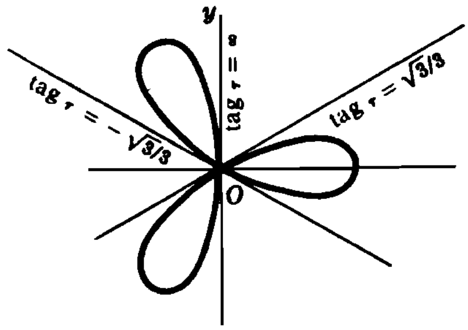


Fig. 20-10

7. $\varrho = \cos 3\theta$; polo. Ver Fig. 20-10.

Cuando $\varrho = 0$, $\cos 3\theta = 0$. Por tanto $3\theta = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$, y $\theta = \pi/6, \pi/2, 5\pi/6$.

Del Problema 5, $\operatorname{tag}\tau = 1/\sqrt{3}, \infty$, y $-1/\sqrt{3}$.

8. $\varrho\theta = a$; $\theta = \pi/3$.

Para $\theta = \pi/3$: $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\varrho = 3a/\pi$, y $\varrho' = -a/\theta^2 = -9a/\pi^2$.

$$\operatorname{tag}\tau = \frac{\varrho\cos\theta + \varrho'\operatorname{sen}\theta}{-\varrho\operatorname{sen}\theta + \varrho'\cos\theta} = -\frac{\pi - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\pi + 3}$$

9. Hallar los puntos en los que la tangente a la curva $\varrho = 1 + \operatorname{sen}\theta$ es horizontal o vertical

En $P(\varrho, \theta)$:
$$\operatorname{tag}\tau = \frac{(1 + \operatorname{sen}\theta)\cos\theta + \cos\theta\operatorname{sen}\theta}{-(1 + \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta + \cos^2\theta} = -\frac{\cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta)}{(\operatorname{sen}\theta + 1)(2\operatorname{sen}\theta - 1)}$$

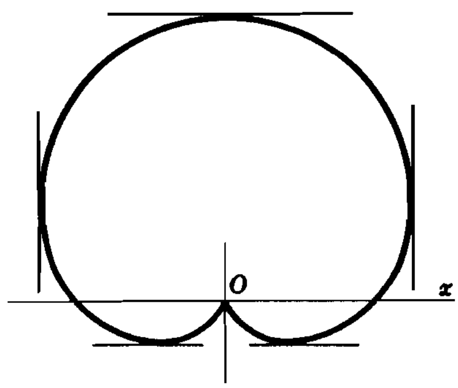


Fig. 20-11

(*a*) Haciendo $\cos\theta\,(1 + 2\operatorname{sen}\theta) = 0$ obtenemos:
$\theta = \pi/2, 3\pi/2, 7\pi/6$, y $11\pi/6$.

Siendo $(\operatorname{sen}\theta + 1)(2\operatorname{sen}\theta - 1) = 0$ obtenemos:
$\theta = 3\pi/2, \pi/6$, y $5\pi/6$.

(*b*) Para $\theta = \pi/2$: Hay una tangente horizontal en $(2, \pi/2)$.

Para $\theta = 7\pi/6$ y $11\pi/6$: Hay tangentes horizontales en los puntos $(\frac{1}{2}, 7\pi/6)$ y $(\frac{1}{2}, 11\pi/6)$.

Para $\theta = \pi/6$ y $5\pi/6$: Hay tangentes verticales en $(3/2, \pi/6)$ y $(3/2, 5\pi/6)$.

Para $\theta = 3\pi/2$: Ver Problema 5, hay una tangente vertical en el polo.

10. Demostrar que el ángulo que forma el radio vector de un punto cualquiera de la cardioide $\varrho = a(1 - \cos\theta)$ con la curva, es la mitad del que forma el radio vector con el eje polar.

Dado un punto cualquiera $P(\varrho, \theta)$ de la cardiode, tendremos:

$$\varrho' = a\operatorname{sen}\theta, \text{ y } \operatorname{tag}\psi = \varrho/\varrho' = (1 - \cos\theta)/\operatorname{sen}\theta = \operatorname{tag}\tfrac{1}{2}\theta \quad \text{o} \quad \psi = \tfrac{1}{2}\theta$$

En los Problemas 11-13 hallar los ángulos de intersección de los pares de curvas dadas.

11. $\varrho = 3\cos\theta$, $\varrho = 1 + \cos\theta$.

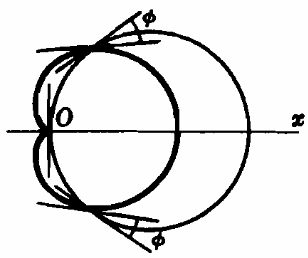


Fig. 20-12

(*a*) Resolviendo $\varrho = 3\cos\theta = 1 + \cos\theta$ obtenemos los puntos de intersección $(3/2, \pi/3)$ y $(3/2, 5\pi/3)$. Las curvas se cortan también en el polo.

(*b*) Para $\varrho = 3\cos\theta$: $\quad \varrho' = -3\,\text{sen}\,\theta$ y $\text{tag}\,\psi_1 = -\cot\theta$.

Para $\varrho = 1 + \cos\theta$: $\varrho' = -\text{sen}\,\theta$ y $\text{tag}\,\psi_2 = -\dfrac{1+\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}$

(*c*) Para $\theta = \pi/3$: $\text{tag}\,\psi_1 = -1/\sqrt{3}$, $\text{tag}\,\psi_2 = -\sqrt{3}$, y $\text{tag}\,\phi = 1/\sqrt{3}$.

El ángulo agudo de intersección en el punto $(3/2, \pi/3)$ y por simetría en el $(3/2, 5\pi/3)$, es $\pi/6$.

En el polo: Gráficamente o teniendo en cuenta el resultado del Problema 5, se puede ver que las curvas dadas son ortogonales.

12. $\varrho = \sec^2\frac{1}{2}\theta$, $\varrho = 3\csc^2\frac{1}{2}\theta$.

(*a*) Resolviendo $\varrho = \sec^2\frac{1}{2}\theta = 3\csc^2\frac{1}{2}\theta$ obtenemos los puntos de intersección $(4, 2\pi/3)$ y $(4, 4\pi/3)$.

(*b*) Para $\varrho = \sec^2\frac{1}{2}\theta$: $\quad \varrho' = \sec^2\frac{1}{2}\theta\;\text{tag}\frac{1}{2}\theta$ y $\text{tag}\,\psi_1 = \cot\frac{1}{2}\theta$.

Para $\varrho = 3\csc^2\frac{1}{2}\theta$: $\varrho' = -3\csc^2\frac{1}{2}\theta\cot\frac{1}{2}\theta$ y $\text{tag}\,\psi_2 = -\text{tag}\,\frac{1}{2}\theta$.

(*c*) Para $\theta = 2\pi/3$: $\text{tag}\,\psi_1 = 1/\sqrt{3}$, $\text{tag}\,\psi_2 = -\sqrt{3}$, y $\phi = \frac{1}{2}\pi$. Las curvas son ortogonales.

13. $\varrho = \text{sen}\,2\theta$, $\varrho = \cos\theta$.

(*a*) Las curvas se cortan en los puntos $(\sqrt{3}/2, \pi/6)$, $(-\sqrt{3}/2, 5\pi/6)$, y en el polo.

(*b*) Para $\varrho = \text{sen}\,2\theta$: $\varrho' = 2\cos 2\theta$ y $\text{tag}\,\psi_1 = \frac{1}{2}\,\text{tag}\,2\theta$.

Para $\varrho = \cos\theta$: $\varrho' = -\text{sen}\,\theta$ y $\text{tag}\,\psi_2 = -\cot\theta$.

(*c*) Para $\theta = \pi/6$: $\text{tag}\,\psi_1 = \sqrt{3}/2$, $\text{tag}\,\psi_2 = -\sqrt{3}$, y $\text{tag}\,\phi = -3\sqrt{3}$. El ángulo agudo de intersección en los puntos $(\sqrt{3}/2, \pi/6)$ y $(-\sqrt{3}/2, 5\pi/6)$ es $\phi = \text{arc tag}\,3\sqrt{3} = 79°6'$.

En el polo, los ángulos agudos de intersección son 0° y $\frac{1}{2}\pi$.

Hallar $ds/d\theta$ en el punto $P(\varrho, \theta)$ en los Problemas 14-16.

14. $\varrho = \cos 2\theta$.

$\varrho' = -2\,\text{sen}\,2\theta$ y $ds/d\theta = \sqrt{\varrho^2 + (\varrho')^2} = \sqrt{\cos^2 2\theta + 4\,\text{sen}^2 2\theta} = \sqrt{1 + 3\,\text{sen}^2 2\theta}$.

15. $\varrho(1 + \cos\theta) = 4$.

$-\varrho\,\text{sen}\,\theta + \varrho'(1+\cos\theta) = 0$. De donde $\varrho' = \dfrac{\varrho\,\text{sen}\,\theta}{1+\cos\theta} = \dfrac{4\,\text{sen}\,\theta}{(1+\cos\theta)^2}$ y

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\varrho^2 + (\varrho')^2} = \frac{4\sqrt{2}}{(1+\cos\theta)^{3/2}}$$

16. $\varrho = \text{sen}^3\frac{1}{3}\theta$. Hallar $ds/d\theta$ para $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

$$\varrho' = \text{sen}^2\tfrac{1}{3}\theta\cos\tfrac{1}{3}\theta \quad \text{y} \quad ds/d\theta = \sqrt{\text{sen}^6\tfrac{1}{3}\theta + \text{sen}^4\tfrac{1}{3}\theta\cos^2\tfrac{1}{3}\theta} = \text{sen}^2\tfrac{1}{3}\theta.$$

Para $\theta = \frac{1}{2}\pi$, $ds/d\theta = \text{sen}^2\frac{1}{6}\pi = 1/4$.

17. Demostrar que $K = \dfrac{\varrho^2 + 2(\varrho')^2 - \varrho\varrho''}{\{\varrho^2 + (\varrho')^2\}^{3/2}}$.

Por definición, $K = d\tau/ds$. Como $\tau = \theta + \psi$ y

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\psi}{ds} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\psi}{d\theta}\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{ds}\left(1 + \frac{d\psi}{d\theta}\right), \quad \text{siendo } \psi = \text{arc tag}\,\frac{\varrho}{\varrho'}$$

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{[(\rho')^2 - \rho\rho'']/(\rho')^2}{1 + (\rho/\rho')^2} = \frac{(\rho')^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + (\rho')^2} \quad \text{y} \quad 1 + \frac{d\psi}{d\theta} = 1 + \frac{(\rho')^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + (\rho')^2} = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + (\rho')^2}$$

Por tanto, $K = \frac{d\theta}{ds}\left(1 + \frac{d\psi}{d\theta}\right) = \frac{1 + d\psi/d\theta}{ds/d\theta} = \frac{1 + d\psi/d\theta}{\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}} = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{\{\rho^2 + (\rho')^2\}^{3/2}}$.

18. $\varrho = 2 + \operatorname{sen}\theta$. Hallar la curvatura en el punto $P(\varrho, \theta)$.

$$K = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{\{\rho^2 + (\rho')^2\}^{3/2}} = \frac{(2 + \operatorname{sen}\theta)^2 + 2\cos^2\theta + (\operatorname{sen}\theta)(2 + \operatorname{sen}\theta)}{\{(2 + \operatorname{sen}\theta)^2 + \cos^2\theta\}^{3/2}} = \frac{6(1 + \operatorname{sen}\theta)}{(5 + 4\operatorname{sen}\theta)^{3/2}}.$$

19. $\varrho(1 - \cos\theta) = 1$. Hallar la curvatura en $\theta = \pi/2$ y en $\theta = 4\pi/3$.

$$\rho' = \frac{-\operatorname{sen}\theta}{(1 - \cos\theta)^2}, \quad \rho'' = \frac{-\cos\theta}{(1 - \cos\theta)^2} + \frac{2\operatorname{sen}^2\theta}{(1 - \cos\theta)^3}, \quad \text{y} \quad K = \operatorname{sen}^3 \tfrac{1}{2}\theta.$$

Para $\theta = \pi/2$, $K = (1/\sqrt{2})^3 = \sqrt{2}/4$; para $\theta = 4\pi/3$, $K = (\sqrt{3}/2)^3 = 3\sqrt{3}/8$.

20. A partir de la relación $\mathbf{r} = \varrho\mathbf{u}_\varrho$, deducir las fórmulas de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ en función de $\mathbf{u}_\varrho$ y $\mathbf{u}_\theta$.

$$\mathbf{r} = \rho\mathbf{u}_\rho$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}_\rho\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{d\mathbf{u}_\rho}{dt} = \mathbf{u}_\rho\frac{d\rho}{dt} + \rho\mathbf{u}_\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{u}_\rho\frac{d^2\rho}{dt^2} + \mathbf{u}_\theta\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \rho\mathbf{u}_\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} + \mathbf{u}_\theta\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} - \rho\mathbf{u}_\rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$= \mathbf{u}_\rho\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \mathbf{u}_\theta\left[\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]$$

21. Una partícula se mueve en el sentido contrario al de las agujas del reloj a lo largo de la curva $\varrho = 4\operatorname{sen}2\theta$, siendo $d\theta/dt = \frac{1}{2}$ radianes por segundo. (*a*) Expresar $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ en función de $\mathbf{u}_\varrho$ y $\mathbf{u}_\theta$. (*b*) Calcular $|\mathbf{v}|$ y $|\mathbf{a}|$ para $\theta = \pi/6$.

$$\mathbf{r} = 4\operatorname{sen}2\theta\,\mathbf{u}_\rho, \quad d\rho/dt = 8\cos 2\theta\, d\theta/dt = 4\cos 2\theta, \quad d^2\rho/dt^2 = -4\operatorname{sen}2\theta$$

(*a*) $$\mathbf{v} = \mathbf{u}_\rho\frac{d\rho}{dt} + \rho\mathbf{u}_\theta\frac{d\theta}{dt} = 4\mathbf{u}_\rho\cos 2\theta + 2\mathbf{u}_\theta\operatorname{sen}2\theta$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}_\rho\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \mathbf{u}_\theta\left[\rho\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$= -5\mathbf{u}_\rho\operatorname{sen}2\theta + 4\mathbf{u}_\theta\cos 2\theta$$

(*b*) Para $\theta = \pi/6$: $\mathbf{u}_\rho = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$, $\mathbf{u}_\theta = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$. $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{5}{2}\mathbf{j}$; $\mathbf{a} = -\frac{19}{4}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{4}\mathbf{j}$.
$|\mathbf{v}| = \sqrt{7}$, $|\mathbf{a}| = \frac{1}{2}\sqrt{91}$.

Problemas propuestos

Calcular tag ψ en los puntos dados, en los Problemas 22-25.

22. $\varrho = 3 - \operatorname{sen}\theta$ para $\theta = 0$, $\theta = 3\pi/4$ *Sol.* -3, $3\sqrt{2} - 1$

23. $\varrho = a(1 - \cos\theta)$ para $\theta = \pi/4$, $\theta = 3\pi/2$ *Sol.* $\sqrt{2} - 1$, -1

24. $\varrho(1 - \cos\theta) = a$ para $\theta = \pi/3$, $\theta = 5\pi/4$ *Sol.* $-\sqrt{3}/3$, $1 + \sqrt{2}$

25. $\varrho^2 = 4\operatorname{sen}2\theta$ para $\theta = 5\pi/12$, $\theta = 2\pi/3$ *Sol.* $-1/\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$

Calcular tag τ en los Problemas 26-29.

26. $\varrho = 2 + \text{sen}\,\theta$ para $\theta = \pi/6$ *Sol.* $-3\sqrt{3}$

27. $\varrho^2 = 9\cos 2\theta$ para $\theta = \pi/6$ *Sol.* 0

28. $\varrho = \text{sen}^3\,\theta/3$ para $\theta = \pi/2$ *Sol.* $-\sqrt{3}$

29. $2\varrho(1 - \text{sen}\,\theta) = 3$ para $\theta = \pi/4$ *Sol.* $1 + \sqrt{2}$

30. Hallar los puntos de la curva $\varrho = \text{sen}\,2\theta$ en los que la tangente es horizontal o vertical.
Sol. T. H. en $\theta = 0,\ \pi,\ 54°44',\ 125°16',\ 234°44',\ 305°16'$
T. V. en $\theta = \pi/2,\ 3\pi/2,\ 35°16',\ 144°44',\ 215°16',\ 324°44'$

Hallar los ángulos agudos de intersección de las curvas dadas en los Problemas 31-33.

31. $\varrho = \text{sen}\,\theta,\ \varrho = \text{sen}\,2\theta$ *Sol.* $\phi = 79°6'$ para $\theta = \pi/3$ y $5\pi/3$; $\phi = 0$ en el polo.

32. $\varrho = \sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta,\ \varrho^2 = \cos 2\theta$ *Sol.* $\phi = \pi/3$ para $\theta = \pi/6,\ 5\pi/6$, $\phi = \pi/4$ en el polo.

33. $\varrho^2 = 16\,\text{sen}\,2\theta,\ \varrho^2 = 4\csc 2\theta$ *Sol.* $\phi = \pi/3$ en cada intersección.

34. Demostrar que cada uno de los pares de curvas siguientes se cortan en ángulo recto en todos los puntos de intersección.
(*a*) $\varrho = 4\cos\theta,\ \varrho = 4\,\text{sen}\,\theta$
(*b*) $\varrho = e^{\theta},\ \varrho = e^{-\theta}$
(*c*) $\varrho^2\cos 2\theta = 4,\ \varrho^2\,\text{sen}\,2\theta = 9$
(*d*) $\varrho = 1 + \cos\theta,\ \varrho = 1 - \cos\theta$

35. Hallar el ángulo de intersección de las tangentes a $\varrho = 2 - 4\,\text{sen}\,\theta$ en el polo. *Sol.* $2\pi/3$

36. Hallar la curvatura de cada curva en el punto $P(\varrho, \theta)$:
(*a*) $\varrho = e^{\theta}$, (*b*) $\varrho = \text{sen}\,\theta$, (*c*) $\varrho^2 = 4\cos 2\theta$, (*d*) $\varrho = 3\,\text{sen}\,\theta + 4\cos\theta$.
Sol. (*a*) $1/(\sqrt{2}\,e^{\theta})$, (*b*) 2, (*c*) $\frac{3}{2}\sqrt{\cos 2\theta}$, (*d*) 2/5

37. Sea $\varrho = f(\theta)$ la ecuación en coordenadas polares de una curva y s la longitud de arco a lo largo de ella. Partiendo de $x = \varrho\cos\theta$, $y = \varrho\,\text{sen}\,\theta$ y teniendo en cuenta que $\left(\dfrac{ds}{d\theta}\right)^2 = \left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2$, demostrar que $\left(\dfrac{ds}{d\theta}\right)^2 = \varrho^2 + (\varrho')^2$.

38. Suponiendo que s aumenta en la dirección creciente de θ, hallar $ds/d\theta$ en las curvas siguientes:
(*a*) $\varrho = a\cos\theta$, (*b*) $\varrho = a(1 + \cos\theta)$, (*c*) $\varrho = \cos 2\theta$.
Sol. (*a*) a, (*b*) $a\sqrt{2 + 2\cos\theta}$, (*c*) $\sqrt{1 + 3\,\text{sen}^2\,2\theta}$.

39. La posición de una partícula que se mueve a lo largo de la curva $\varrho = f(\theta)$ viene dada, en función del tiempo t, por $\varrho = g(t),\ \theta = h(t)$.
(*a*) Multiplicar la relación obtenida en el Prob. 37 por $\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2$ para obtener $v^2 = \left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2 = \varrho^2\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{d\varrho}{dt}\right)^2$.
(*b*) A partir de tag $\psi = \varrho\dfrac{d\theta}{d\varrho} = \varrho\dfrac{d\theta/dt}{d\varrho/dt}$, obtener sen $\psi = \dfrac{\varrho}{v}\dfrac{d\theta}{dt}$ y $\cos\psi = \dfrac{1}{v}\dfrac{d\varrho}{dt}$.

40. Demostrar que $\dfrac{d\mathbf{u}_\varrho}{dt} = \mathbf{u}_\theta\dfrac{d\theta}{dt}$ y $\dfrac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\mathbf{u}_\varrho\dfrac{d\theta}{dt}$.

41. Una partícula se mueve sobre la cardioide $\varrho = 4(1 + \cos\theta)$ con $d\theta/dt = \pi/6$ radianes por segundo. Expresar **v** y **a** en función de $\mathbf{u}_\varrho$ y $\mathbf{u}_\theta$.
Sol. $\mathbf{v} = -\dfrac{2\pi}{3}\mathbf{u}_\varrho\,\text{sen}\,\theta + \dfrac{2\pi}{3}\mathbf{u}_\theta(1 + \cos\theta)$, $\mathbf{a} = -\dfrac{\pi^2}{9}\mathbf{u}_\varrho(1 + 2\cos\theta) - \dfrac{2\pi^2}{9}\mathbf{u}_\theta\,\text{sen}\,\theta$

42. Una partícula se mueve en el sentido contrario al de las agujas del reloj sobre la curva $\varrho = 8\cos\theta$ con una velocidad constante de 4 unidades de longitud por segundo. Expresar **v** y **a** en función de $\mathbf{u}_\varrho$ y $\mathbf{u}_\theta$.
Sol. $\mathbf{v} = -4\mathbf{u}_\varrho\,\text{sen}\,\theta + 4\mathbf{u}_\theta\cos\theta$, $\mathbf{a} = -4\mathbf{u}_\varrho\cos\theta - 4\mathbf{u}_\theta\,\text{sen}\,\theta$

43. Si una partícula de masa m se mueve a lo largo de una trayectoria por la acción de una fuerza **F** constantemente dirigida hacia el origen, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, o sea, $\mathbf{a} = \dfrac{1}{m}\mathbf{F}$ de manera que $a_\theta = 0$. Demostrar que cuando $a_\theta = 0$, $\varrho^2\dfrac{d\theta}{dt} = k$ (constante) y la velocidad con que el radio vector barre el área comprendida por la curva es constante.

44. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $\varrho = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$ con $a_\theta = 0$. Demostrar que $a_\varrho = -\dfrac{k^2}{2}\dfrac{1}{\varrho^2}$, siendo k la constante definida en el Problema 43 anterior.

Capítulo 21

Teoremas de valor medio

TEOREMA DE ROLLE. Si una función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, derivable en el intervalo abierto $a < x < b$ y además $f(a) = f(b) = 0$ existe al menos un valor de x, $x = x_0$, comprendido entre a y b en el que se verifica $f'(x) = 0$.

La interpretación geométrica de este teorema es: si una curva continua corta al eje x en dos puntos $x = a$ y $x = b$ existe al menos un punto $x = x_0$ comprendido entre a y b en el cual la tangente a la curva es paralela al eje x. (Ver Fig. 21-1.)

(La demostración se encuentra en el Problema 11.)

Corolario. Si $f(x)$ es una función que cumple las condiciones dichas anteriormente en el teorema de Rolle, salvo que $f(a) = f(b) \neq 0$, existe al menos un valor de x, $x = x_0$ comprendido entre a y b en el que se verifica $f'(x) = 0$. (Ver Fig. 21-2.)

(La demostración se encuentra en los Problemas 1-2.)

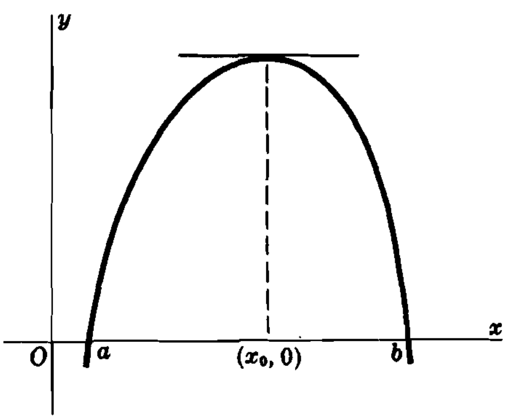


Fig. 21-1

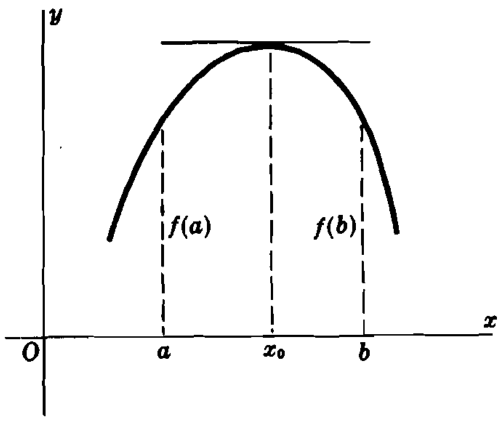


Fig. 21-2

TEOREMA DEL VALOR MEDIO. Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y derivable en el intervalo abierto $a < x < b$, existe al menos un valor de x, $x = x_0$, comprendido entre a y b en el que se verifica

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

Geométricamente, significa que si P_1 y P_2 son dos puntos de una curva continua, existe al menos un punto de la misma comprendido entre P_1 y P_2 en el cual la tangente es paralela a la recta P_1P_2. (Ver Fig. 21-3.)

(La demostración se encuentra en el Problema 12.)

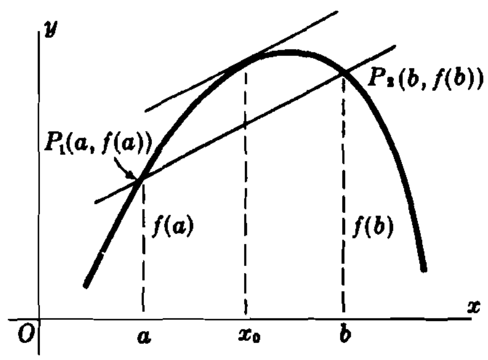


Fig. 21-3

El teorema del valor medio admite varias expresiones de gran utilidad:

(I) $$f(b) = f(a) + (b - a) \cdot f'(x_0), \quad x_0 \text{ entre } a \text{ y } b.$$

Por un simple cambio de notación se llega a

(II) $$f(x) = f(a) + (x - a) \cdot f'(x_0), \quad x_0 \text{ entre } a \text{ y } x.$$

De la Fig. 21-4 se deduce que $x_0 = a + \theta(b - a)$, siendo $0 < \theta < 1$. Efectuando esta sustitución, (I) adquiere la forma

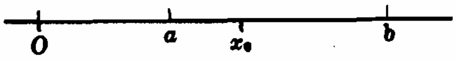


Fig. 21-4

(III) $$f(b) = f(a) + (b - a) \cdot f'[a + \theta(b - a)], \quad 0 < \theta < 1$$

Poniendo $(b - a) = h$, (III) obtenemos

(IV) $$f(a + h) = f(a) + h \cdot f'(a + \theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

Finalmente, poniendo $a = x$ y $h = \Delta x$, (IV) llegamos a

(V) $$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \cdot f'(x + \theta \cdot \Delta x), \quad 0 < \theta < 1$$

(Ver Problemas 3-9.)

TEOREMA DE CAUCHY. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y derivables en el intervalo abierto $a < x < b$, siendo $g'(x) \neq 0$, existe al menos un valor de x, $x = x_0$, comprendido entre a y b en el que se verifica

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

En el caso particular de que $g(x) = x$, este teorema coincide con el del valor medio

(La demostración se encuentra en el Problema 13.)

GENERALIZACION DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO. Si $f(x)$ y sus $(n - 1)$ primeras derivadas son continuas en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y existe la derivada n-sima $f^{(n)}(x)$ en todos los puntos del intervalo abierto $a < x < b$, hay al menos un valor de x, $x = x_0$, comprendido entre a y b en el que

(VI) $$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b - a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(b - a)^n$$

Ver la demostración en el Problema 15.

Al sustituir b por la variable x, (VI) obtenemos

(VII) $$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - a)^n, \quad x_0 \text{ entre } a \text{ y } x.$$

Cuando a se sustituye por 0, (VII) se transforma en

(VIII) $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n$$

x_0 entre 0 y x.

Problemas resueltos

1. Hallar el valor de x_0 que cumple las condiciones del Teorema de Rolle, siendo $f(x) = x^3 - 12x$ en el intervalo $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$.

   $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$ para $x = \pm 2$; por tanto, $x_0 = 2$ es el valor buscado.

2. ¿Se puede aplicar el Teorema de Rolle a las funciones (*a*) $f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x-2}$ y (*b*) $f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x+2}$?

   (*a*) $f(x) = 0$ para $x = 0, 4$. Como $f(x)$ es discontinua en $x = 2$, que es un punto del intervalo $0 \leq x \leq 4$, no se puede aplicar el teorema.

   (*b*) $f(x) = 0$ para $x = 0, 4$. En este caso, $f(x)$ es discontinua en $x = -2$ que no pertenece al intervalo $0 \leq x \leq 4$.

   $f'(x) = (x^2 + 4x - 8)/(x + 2)^2$ está definida en todos los puntos del intervalo excepto en $x = -2$. Por tanto, se puede aplicar el teorema y el valor pedido es $x_0 = 2(\sqrt{3} - 1)$, que es la raíz positiva de la ecuación $x^2 + 4x - 8 = 0$.

3. Hallar el valor de x_0 que cumple las condiciones del teorema del valor medio, siendo $f(x) = 3x^2 + 4x - 3$, $a = 1$, $b = 3$.

   Aplicando (I) con $f(a) = f(1) = 4$, $f(b) = f(3) = 36$, $f'(x_0) = 6x_0 + 4$ y $b - a = 2$, resulta $36 = 4 + 2(6x_0 + 4) = 12x_0 + 12$, de donde $x_0 = 2$.

4. Aplicar el teorema del valor medio para calcular, aproximadamente, $\sqrt[6]{65}$. Haciendo $f(x) = \sqrt[6]{x}$, $a = 64$, $b = 65$ y aplicando (I), se obtiene: $f(65) = f(64) + (65 - 64)/6x_0^{5/6}$, $64 < x_0 < 65$. Como x_0 no se conoce, tomamos $x_0 = 64$; por consiguiente, resulta de forma aproximada, $\sqrt[6]{65} = \sqrt[6]{64} + 1/(6\sqrt[6]{64^5}) = 2 + 1/192 = 2{,}00521$.

5. Se mecaniza un taladro circular de 4 centímetros de diámetro y 12 centímetros de altura en un bloque metálico, de manera que se aumenta su diámetro hasta 4,12 centímetros. Hallar el volumen de metal eliminado.

   El volumen (centímetros cúbicos) de un cilindro circular de radio x centímetros y altura 12 centímetros es $V = f(x) = 12\pi x^2$. El volumen que queremos calcular es $f(2{,}06) - f(2)$. Según el teorema del valor medio.

   $$f(2{,}06) - f(2) = 0{,}06 f'(x_0) = 0{,}06(24\pi x_0), \qquad 2 < x_0 < 2{,}06$$

   Tomando $x_0 = 2$; tendremos, aproximadamente, $f(2{,}06) - f(2) = 0{,}06(24\pi \cdot 2) = 2{,}88\pi \text{ cm}^3$.

6. Suponiendo que la función $y = f(x)$ cumple las condiciones del teorema del valor medio, siendo $a = x$, $b = x + \Delta x$, demostrar que $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$, aproximadamente.

   Tendremos $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [x + \Delta x - x] \cdot f'(x_0)$, $x < x_0 < x + \Delta x$.

   Tomando $x_0 = x$; tendremos, aproximadamente $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x$.

7. Aplicando el teorema del valor medio, demostrar que $\operatorname{sen} x < x$ para $x > 0$.

   Como $\operatorname{sen} x \leq 1$, $\operatorname{sen} x < x$ cuando $x > 1$. Tomando $f(x) = \operatorname{sen} x$ con $0 \leq x \leq 1$ y aplicando (II); tendremos

   $$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 + x \cos x_0 = x \cos x_0, \; 0 < x_0 < x$$

   Ahora bien, en este intervalo, $\cos x_0 < 1$ y $x \cos x_0 < x$; por tanto, $\operatorname{sen} x < x$.

8. Aplicando el teorema del valor medio, demostrar que $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1 + x) < x$ para $-1 < x < 0$ y para $x > 0$.

   Aplicando (IV) con $f(x) = \ln x$, $a = 1$ y $h = x$; tendremos

   $$\ln(1 + x) = \ln 1 + x\frac{1}{1+\theta x} = \frac{x}{1+\theta x}, \quad 0 < \theta < 1$$

   Cuando $x > 0$, $1 < 1 + \theta x < 1 + x$; por tanto, $1 > \dfrac{1}{1+\theta x} > \dfrac{1}{1+x}$ y $x > \dfrac{x}{1+\theta x} > \dfrac{x}{1+x}$.

   Cuando $-1 < x < 0$, $1 > 1 + \theta x > 1 + x$; por tanto, $1 < \dfrac{1}{1+\theta x} < \dfrac{1}{1+x}$ y $x > \dfrac{x}{1+\theta x} > \dfrac{x}{1+x}$.

   En ambos casos, $\dfrac{x}{1+\theta x} < x$ y $\ln(1 + x) = \dfrac{x}{1+\theta x} < x$; también, $\dfrac{x}{1+\theta x} > \dfrac{x}{1+x}$ y $\ln(1 + x) = \dfrac{x}{1+\theta x} > \dfrac{x}{1+x}$. Por tanto, $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1 + x) < x$ cuando $-1 < x < 0$ y cuando $x > 0$.

9. Aplicando el teorema del valor medio, demostrar que $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$ para $-1 < x < 0$ y para $x > 0$.

Tomando $f(x) = \sqrt{x}$ y aplicando (IV) con $a = 1$, $h = x$, tendremos

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2\sqrt{1+\theta x}}, \qquad 0 < \theta < 1$$

Cuando $x > 0$, $\sqrt{1+\theta x} < \sqrt{1+x}$ y $\dfrac{x}{2\sqrt{1+\theta x}} > \dfrac{x}{2\sqrt{1+x}}$; cuando $-1 < x < 0$, $\sqrt{1+\theta x} > \sqrt{1+x}$ y $\dfrac{x}{2\sqrt{1+\theta x}} > \dfrac{x}{2\sqrt{1+x}}$.

En ambos casos, $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2\sqrt{1+\theta x}} > 1 + \dfrac{x}{2\sqrt{1+x}}$. Multiplicando la desigualdad por $\sqrt{1+x} > 0$, tendremos $1 + x > \sqrt{1+x} + \frac{1}{2}x$ y $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$.

10. Hallar el valor de x_0 que satisface las condiciones del teorema de Cauchy, siendo $f(x) = 3x + 2$, $g(x) = x^2 + 1$, $1 \leq x \leq 4$.

El valor de x_0 debe ser tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \frac{14 - 5}{17 - 2} = \frac{3}{5} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{3}{2x_0}$$

De donde $2x_0 = 5$ y $x_0 = 5/2$.

11. Demostrar el Teorema de Rolle: Si una función $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, derivable en el intervalo abierto $a < x < b$, y además $f(a) = f(b) = 0$, existe, al menos, un valor $x = x_0$ comprendido entre a y b, en el que se verifica $f'(x) = 0$.

Si $f(x) = 0$ en el intervalo, también lo será $f'(x) = 0$ y, por tanto, el teorema estará demostrado. En los demás casos, $f(x)$ será positivo (negativo) en algún punto del intervalo y, por consiguiente (ver Propiedad II, Capítulo 3), habrá un valor $x = x_0$, $a < x_0 < b$, para el que corresponde un máximo (mínimo) relativo y $f'(x_0) = 0$.

12. Demostrar el teorema del valor medio: Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y derivable en el intervalo abierto $a < x < b$, existe, al menos, un valor de x, $x = x_0$ comprendido entre a y b, en el que se verifica

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

En la Fig. 21-3, la ecuación de la secante P_1P_2 es $y = f(b) + K(x - b)$, siendo $K = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. En un punto cualquiera x del intervalo $a < x < b$, la distancia vertical de la secante a la curva es $F(x) = f(x) - f(b) - K(x - b)$. Ahora bien, $F(x)$ satisface las condiciones del teorema de Rolle (como fácilmente se puede comprobar), con lo que $F'(x) = f'(x) - K = 0$ en algún $x = x_0$ comprendido entre a y b. Por tanto,

$$K = f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

como queríamos demostrar.

13. Demostrar el teorema de Cauchy: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y derivables en el intervalo abierto $a < x < b$, siendo $g'(x) \neq 0$, existe, al menos, un valor de x, $x = x_0$, comprendido entre a y b, en el que se verifica

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Supongamos que $g(b) = g(a)$; según el corolario del teorema de Rolle, $g'(x) = 0$ en algún x comprendido entre a y b, lo cual es contrario a la hipótesis; por tanto, $g(b) \neq g(a)$. Hagamos $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = K$ (constante), y formemos la función

$$F(x) = f(x) - f(b) - K[g(x) - g(b)]$$

Ahora bien, esta función cumple las condiciones del teorema de Rolle (como fácilmente se puede comprobar) y, por tanto, $F'(x) = f'(x) - Kg'(x) = 0$ al menos para algún valor de x, $x = x_0$ comprendido entre a y b. Así pues,

$$K = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \qquad \text{como queríamos demostrar.}$$

14. Un arco PQ de la curva $y = f(x)$ es cóncavo en la región situada por encima de la cuerda PQ y convexo por debajo de ella. Demostrar que si $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y $f'(x)$ tiene el mismo signo en el intervalo $a < x < b$, se verifica:

(i) $f(x)$ es cóncava en el intervalo $a < x < b$ cuando $f''(x) > 0$,

(ii) $f(x)$ es convexa en el intervalo $a < x < b$ cuando $f''(x) < 0$.

La ecuación de la cuerda PQ que une los puntos $P[a, f(a)]$ y $Q[b, f(b)]$ es: $y = f(a) + (x - a)\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Sean A y B los puntos sobre el arco y sobre la cuerda, respectivamente, cuya abscisa es $x = c$, $a < c < b$; las ordenadas correspondientes serán $f(c)$ y

$$f(a) + (c - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(b - c)\cdot f(a) + (c - a)\cdot f(b)}{b - a}$$

(i) Tendremos que demostrar que

$$f(c) < \frac{(b - c)\cdot f(a) + (c - a)\cdot f(b)}{b - a}$$

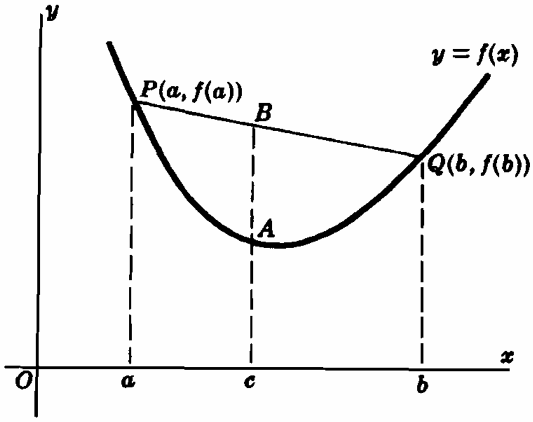


Fig. 21-5

cuando $f''(x) > 0$. Según el teorema del valor medio, $\dfrac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(\xi)$, siendo ξ un punto comprendido entre c y a y $\dfrac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(\eta)$, en donde η es un punto comprendido entre c y b. Como $f''(x) > 0$ en el intervalo $a < x < b$, $f'(x)$ será una función creciente en el intervalo y $f'(\xi) < f'(\eta)$. Por tanto, $\dfrac{f(c) - f(a)}{c - a} < \dfrac{f(b) - f(c)}{b - c}$, de donde se deduce

$$f(c) < \frac{(b - c)\cdot f(a) + (c - a)\cdot f(b)}{b - a}$$

como se quería demostrar.

La demostración de (ii) se deja como ejercicio para el alumno.

15. Demostrar que si $f(x)$ y sus $(n - 1)$ primeras derivadas son funciones continuas en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y $f^{(n)}(x)$ está definida en el intervalo abierto $a < x < b$, existe un valor de x, $x = x_0$, comprendido entre a y b, en el que se verifica:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b - a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(b - a)^n$$

En el caso particular de que $n = 1$, se obtiene el teorema del valor medio. La demostración que se hace seguidamente es análoga a la del Problema 12. Sea K un número tal que se verifique:

$$\text{(i)} \qquad f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b - a)^{n-1} + K(b - a)^n$$

y consideremos

$$F(x) = f(x) - f(b) + \frac{f'(x)}{1!}(b - x) + \frac{f''(x)}{2!}(b - x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b - x)^{n-1} + K(b - x)^n$$

Ahora bien $F(a) = 0$ por (i) y $F(b) = 0$. Por el teorema de Rolle, existe un $x = x_0$, siendo $a < x_0 < b$, tal que

$$\begin{aligned} F'(x_0) &= f'(x_0) + \{f''(x_0)\cdot(b - x_0) - f'(x_0)\} + \left\{\frac{f'''(x_0)}{2!}(b - x_0)^2 - f''(x_0)\cdot(b - x_0)\right\} \\ &\quad + \cdots + \left\{\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(b - x_0)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-2)!}(b - x_0)^{n-2}\right\} - Kn(b - x_0)^{n-1} \\ &= \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(b - x_0)^{n-1} - Kn(b - x_0)^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

Entonces $K = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ e (i) se convierte en

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b - a) + \frac{f''(a)}{2!}(b - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b - a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(b - a)^n$$

Problemas propuestos

16. Hallar un valor x_0 que cumpla las condiciones del teorema de Rolle para las funciones

(*a*) $f(x) = x^2 - 4x + 3,\ 1 \leqslant x \leqslant 3$ *Sol.* $x_0 = 2$

(*b*) $f(x) = \text{sen}\, x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$ *Sol.* $x_0 = \frac{1}{2}\pi$

(*c*) $f(x) = \cos x,\ \pi/2 < x < 3\pi/2$ *Sol.* $x_0 = \pi$

17. Hallar un valor x_0 que cumpla las condiciones del teorema del valor medio para las funciones

(*a*) $y = x^3,\ 0 \leqslant x \leqslant 6$ *Sol.* $x_0 = 2\sqrt{3}$

(*b*) $y = ax^2 + bx + c,\ x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ *Sol.* $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$

(*c*) $y = \ln x,\ 1 \leqslant x \leqslant 2e$ *Sol.* $x_0 = \dfrac{2e - 1}{1 + \ln 2}$

18. Obtener un valor aproximado de (*a*) $\sqrt{15}$, (*b*) $(3{,}001)^3$, (*c*) $1/999$, aplicando el teorema del valor medio.
Sol. (*a*) 3,875, (*b*) 27,027, (*c*) 0,001001

19. Aplicar el teorema del valor medio para demostrar que:

(*a*) $\text{tag}\, x > x,\ 0 < x < \frac{1}{2}\pi$; (*b*) $\dfrac{x}{1 + x^2} < \text{Arc tag}\, x < x,\ x > 0$; (*c*) $x < \text{Arc sen}\, x < \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}},\ 0 < x < 1$.

20. Demostrar que $|f(x) - f(x_1)| \leq |x - x_1|$, siendo x_1 un número cualquiera, cuando (*a*) $f(x) = \text{sen}\, x$, (*b*) $f(x) = \cos x$.

21. Aplicando el teorema del valor medio, demostrar que:

(*a*) Si $f'(x) = 0$ en todos los puntos del intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, se verifica $f(x) = f(a) = c$ (constante) en todos los puntos del mismo.

(*b*) $f(x)$ es creciente al aumentar x en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, si $f'(x) > 0$ en todos los puntos del mismo.
Ind. Sean $x_1 < x_2$ dos puntos del intervalo; $f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) f'(x_0),\ x_1 < x_0 < x_2$.

22. Aplicando el teorema del Problema 21(*a*), demostrar que si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones distintas pero $f'(x) = g'(x)$ en todos los puntos de un intervalo, $f(x) - g(x) = c \neq 0$ (constante) en el citado intervalo.

23. Una función $f(x)$ tiene un punto crítico en $x = x_0$, si $f'(x)$ cambia de signo cuando x pasa por $x = x_0$. Sean $x_1 < x_2 \cdots < x_{m-1} < x_m$ distintos puntos críticos de la función $f(x)$. Demostrar que $f(x) = 0$ tiene como máximo una raíz real en cada uno de los intervalos $x < x_1,\ x_1 < x < x_2,\ \cdots,\ x_{m-1} < x < x_m,\ x > x_m$.

24. Demostrar que si $f(x) = 0$ es una función de grado n con n raíces simples, la función $f'(x) = 0$ tiene exactamente $n - 1$ raíces simples.

25. Demostrar que $x^3 + px + q = 0$ tiene (*a*) una raíz real si $p > 0$, (*b*) tres raíces reales si $4p^3 + 27q^2 < 0$.

26. Hallar un valor x_0 que cumpla las condiciones del teorema de Cauchy para las funciones

(*a*) $f(x) = x^2 + 2x - 3,\ g(x) = x^2 - 4x + 6;\ a = 0,\ b = 1$. *Sol.* $\frac{1}{2}$

(*b*) $f(x) = \text{sen}\, x,\ g(x) = \cos x;\ a = \pi/6,\ b = \pi/3$. *Sol.* $\frac{1}{4}\pi$.

27. Aplicando el teorema del valor medio generalizado (VIII), demostrar que:

(*a*) se puede sustituir x por $\text{sen}\, x$ para $x < 0{,}31$ con un error menor que 0,005.

Ind: Para $n = 3$, $\text{sen}\, x = x - \frac{1}{6}x^3 \cos x_0$. Por otra parte, $\frac{1}{6}|x^3 \cos x_0| \leq \frac{1}{6}|x^3| < 0{,}005$.

(*b*) Se puede sustituir x por $x - x^3/6$ para $x < 0{,}359$ con un error menor que 0,00005.

Capítulo 22

Formas indeterminadas

EL CALCULO DE LA DERIVADA de una función $f(x)$ por la regla de los cuatro pasos, dada en el Capítulo 4, considera la expresión

$$(a) \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(\Delta x)}{G(\Delta x)}$$

Cuando los límites del numerador y del denominador de la fracción son ambos iguales a cero la expresión (a) presenta la forma indeterminada 0/0. En el Problema 5 del Capítulo 2 vimos algunos ejemplos de este tipo.

Análogamente, la expresión $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x - 2}{9x + 7}$ (ver Problema 6, Capítulo 2) presenta la forma indeterminada ∞/∞. Estos símbolos, así como otros que veremos posteriormente ($0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0 y 1^∞) carecen de significado aritmético y no tienen otro alcance que el de recordar los límites de las funciones con que se opera.

FORMA 0/0.

Regla de L'Hôpital. Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, derivables en el intervalo $0 < |x - a| < \delta$ siendo a un número, y $g(x) \neq 0$ para todos los valores de x del intervalo, de manera que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, si existe o es infinito el $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, se verifica:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^4 - 81}{x - 3}$ es de la forma indeterminada 0/0. Por tanto

$$\lim_{x \to 3} \frac{\dfrac{d}{dx}(x^4 - 81)}{\dfrac{d}{dx}(x - 3)} = \lim_{x \to 3} 4x^3 = 108, \quad \text{o sea} \quad \lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} = 108$$

(Ver Problemas 1-7.)

Nota. La regla de L'Hôpital implica que $\lim\limits_{x \to a+} f(x)/g(x) = \lim\limits_{x \to a-} f(x)/g(x)$. En algunos problemas (concretamente en el Problema 8) se demuestra la existencia de uno de estos límites.

FORMA ∞/∞.

La regla de L'Hôpital sigue siendo válida si efectuamos una o ambas sustituciones en las hipótesis:

(i) «$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$» se sustituyen por «$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$»,

(ii) «siendo a un número» se sustituye por «$a = +\infty, -\infty$, o ∞» y «$0 < |x - a| < \delta$» se sustituye por «$|x| > M$».

Ejemplo 2: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$ es de la forma indeterminada ∞/∞. Por tanto,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

(Ver Problemas 9-11.)

FORMAS $0 \cdot \infty$ e $\infty - \infty$.

Estas formas se pueden tratar como las anteriores reduciéndolas, previamente, a una de las formas $0/0$ o ∞/∞. Por ejemplo:

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} \text{ es del tipo } 0 \cdot \infty \text{ y } \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^2} \text{ es del tipo } \infty/\infty;$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\csc x - \frac{1}{x}\right) \text{ es del tipo } \infty - \infty \text{ y } \lim_{x \to 0} \left(\frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}\right) \text{ es del tipo } 0/0.$$

(Ver Problemas 13-16.)

FORMAS 0^0, ∞^0 y 1^∞.

Si $\lim y$ conduce a uno de estos tipos, $\lim (\ln y)$ es de la forma $0 \cdot \infty$.

Ejemplo 3: Hallar $\lim_{x \to 0} (\sec^3 2x)^{\cot^2 3x}$.

Este es del tipo 1^∞. Sea $y = (\sec^3 2x)^{\cot^2 3x}$; tendremos $\ln y = \cot^2 3x \ln \sec^3 2x = \dfrac{3 \ln \sec 2x}{\operatorname{tag}^2 3x}$ y $\lim_{x \to 0} \ln y$ es del tipo $0/0$

Ahora bien, $\lim_{x \to 0} \dfrac{3 \ln \sec 2x}{\operatorname{tag}^2 3x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{6 \operatorname{tag} 2x}{6 \operatorname{tag} 3x \sec^2 3x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tag} 2x}{\operatorname{tag} 3x}$, ya que $\lim_{x \to 0} \sec^2 3x = 1$, es del tipo $0/0$.

Así pues, $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tag} 2x}{\operatorname{tag} 3x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{2 \sec^2 2x}{3 \sec^2 3x} = \dfrac{2}{3}$.

Como $\lim_{x \to 0} \ln y = 2/3$, $\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} (\sec^3 2x)^{\cot^2 3x} = e^{2/3}$.

(Ver Problemas 17-19.)

Problemas resueltos

1. Demostrar la Regla de L'Hôpital: Dadas las funciones $f(x)$ y $g(x)$, derivable en el intervalo $0 < |x - a| < \delta$, siendo a un número, y $g(x) \neq 0$ para todos los valores de x del intervalo, de manera que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, si existe o es infinito el $\lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, se verifica: $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

   Sustituyendo b por x en el teorema de Cauchy (Capítulo 21), teniendo en cuenta que $f(a) = g(a) = 0$, tendremos,

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

   en donde x_0 está comprendido entre a y x. Ahora bien, cuando $x_0 \to a$, $x \to a$ y, por tanto,

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_0 \to a} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Hallar $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$. Cuando $x \to 2$, el numerador y el denominador tienden a cero.

   Aplicando la regla de L'Hôpital $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \dfrac{2x + 1}{2x} = \dfrac{5}{4}$.

3. Hallar $\lim_{x \to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen} 2x}{x - \operatorname{sen} 2x}$. Cuando $x \to 0$, el numerador y el denominador tienden a cero.

   Aplicando la regla de L'Hôpital $\lim_{x \to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen} 2x}{x - \operatorname{sen} 2x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{1 + 2 \cos 2x}{1 - 2 \cos 2x} = \dfrac{1 + 2}{1 - 2} = -3$.

4. Hallar $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^2}$. $\quad \lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \dfrac{e^x}{2x} = \infty$.

5. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\operatorname{sen}^2 x - x^2}$.

Cuando $x \to 0$, el numerador y el denominador tienden a 0. Aplicando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\operatorname{sen}^2 x - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\operatorname{sen} 2x - 2x}$$

Como la función que resulta es de la forma indeterminada 0/0, aplicamos la regla de nuevo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\operatorname{sen}^2 x - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\operatorname{sen} 2x - 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2\cos 2x - 2}$$

La función que resulta ahora es también de la forma indeterminada 0/0. Por consiguiente, sin detallar los pasos intermedios, resulta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\operatorname{sen}^2 x - x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\operatorname{sen} 2x - 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2\cos 2x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{-4\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{-8\cos 2x} = -\frac{1}{4}$$

6. Criticar la solución: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 6x + 3} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{6x - 2}{6x - 6} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{6}{6} = 1.$

La función dada es de la forma indeterminada 0/0 y, por tanto, se puede aplicar la regla de L'Hôpital, pero la función resultante no es indeterminada (su límite es 7/3), con lo cual, las sucesivas aplicaciones de la regla carecen de justificación. Este tipo de errores es muy frecuente.

7. Criticar la solución: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 4x + 1} = \dfrac{6x - 2}{6x - 4} = 2.$

La solución correcta es: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 4x + 1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{6x - 2}{6x - 4} = 2.$

El resultado era el verdadero, pero no estaba correctamente expresado.

8. Hallar $\lim\limits_{x\to \pi^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x - \pi}}$.

$$\lim_{x\to \pi^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x - \pi}} = \lim_{x\to \pi^+} \frac{\cos x}{\frac{1}{2}(x - \pi)^{-1/2}} = \lim_{x\to \pi^+} 2(x - \pi)^{1/2} \cos x = 0$$

En este caso, se pide el límite cuando x tiende π disminuyendo hacia él, porque en otro caso $(x - \pi)^{1/2}$ es imaginario

9. Hallar $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

Cuando $x \to +\infty$, el numerador y el denominador tienden a $+\infty$. Por tanto, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0.$

10. Hallar $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln \operatorname{tag} x}$. $\qquad \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln \operatorname{tag} x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x/\operatorname{sen} x}{\sec^2 x/\operatorname{tag} x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \cos^2 x = 1.$

11. Hallar $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cot x}{\cot 2x}$. $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cot x}{\cot 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\csc^2 x}{2\csc^2 2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\csc^2 x \cot x}{4\csc^2 2x \cot 2x}$

Como vemos, después de cada aplicación de la regla de L'Hôpital se obtiene una forma indeterminada del tipo ∞/∞. Por ello, se debe intentar resolverlo efectuando, previamente, una sustitución trigonométrica:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cot x}{\cot 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tag} 2x}{\operatorname{tag} x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 2x}{\sec^2 x} = 2$$

12. Siendo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Demostrar que si $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, se verifica $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Tomando $x = 1/y$. Cuando $x\to+\infty$, $y\to 0^+$ y $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0^+} \dfrac{f(1/y)}{g(1/y)}$. De donde

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{-f'(1/y)\cdot y^{-2}}{-g'(1/y)\cdot y^{-2}}$$

$$= \lim_{y\to 0^+} \frac{\dfrac{d}{dy} f(1/y)}{\dfrac{d}{dy} g(1/y)} = \lim_{y\to 0^+} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

13. Hallar $\lim_{x\to 0^+} (x^2 \ln x)$.

Cuando $x\to 0^+$, $x^2\to 0$ y $\ln x\to -\infty$. Por tanto, $\dfrac{\ln x}{1/x^2}$ es una forma indeterminada del tipo ∞/∞.

$$\lim_{x\to 0^+} (x^2 \ln x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x\to 0^+} (-\tfrac{1}{2}x^2) = 0$$

14. $\lim_{x\to\pi/4} (1 - \operatorname{tag} x) \sec 2x = \lim_{x\to\pi/4} \dfrac{1 - \operatorname{tag} x}{\cos 2x} = \lim_{x\to\pi/4} \dfrac{-\sec^2 x}{-2 \operatorname{sen} 2x} = 1.$

15. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{xe^x + e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^x}{xe^x + 2e^x} = \dfrac{1}{2}.$

16. $\lim_{x\to 0} (\csc x - \cot x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0.$

17. Hallar $\lim_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$. (Es del tipo 1^∞.)

Sea $y = x^{1/(x-1)}$. Tendremos $\ln y = \dfrac{\ln x}{x - 1}$ es una forma indeterminada del tipo $\dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 1} \ln y = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{1} = 1$$

Como $\ln y\to 1$ cuando $x\to 1$, $y\to e$. Así pues, el límite es igual a e.

18. Hallar $\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi^-} (\operatorname{tag} x)^{\cos x}$. (Es del tipo ∞^0.)

Sea $y = (\operatorname{tag} x)^{\cos x}$. Tendremos $\ln y = \cos x \ln \operatorname{tag} x = \dfrac{\ln \operatorname{tag} x}{\sec x}$ es del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi^-} \ln y = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi^-} \frac{\ln \operatorname{tag} x}{\sec x} = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi^-} \frac{\sec^2 x/\operatorname{tag} x}{\sec x \operatorname{tag} x} = \lim_{x\to\frac{1}{2}\pi^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = 0$$

Como $\ln y\to 0$ cuando $x\to \frac{1}{2}\pi^-$, $y\to 1$. Así pues, el límite es igual a 1.

19. Hallar $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$. (Es del tipo 0^0.)

Sea $y = x^{\operatorname{sen} x}$. Tendremos $\ln y = \operatorname{sen} x \ln x = \dfrac{\ln x}{\csc x}$ es una forma indeterminada del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-\csc x \cot x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{-x\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\operatorname{sen} x \cos x}{x \operatorname{sen} x - \cos x} = 0$$

Como $\ln y\to 0$ cuando $x\to 0^+$, $y\to 1$. Así pues, el límite es igual a 1.

20. Hallar $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2 + x^2}}{x}$. $\qquad \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2 + x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{2 + x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2 + x^2}}{x}$, etc.

Por ejemplo, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2 + x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2 + x^2}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2}{x^2} + 1} = 1.$

21. La intensidad de corriente por una bobina de resistencia R y coeficiente de autoinducción L, conectada a una fuerza electromotriz constante E viene dada, en función del tiempo t, por: $i = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$. Obtener una fórmula de aplicación en el caso de que la resistencia R sea muy pequeña.

$$\lim_{R\to 0} i = \lim_{R\to 0} \frac{E(1-e^{-Rt/L})}{R} = \lim_{R\to 0} E\frac{t}{L}e^{-Rt/L} = \frac{Et}{L}$$

Problemas propuestos

Hallar

22. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^4 - 256}{x-4} = 256$

23. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^4-256}{x^2-16} = 32$

24. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x^2-9} = 1/2$

25. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{x-2} = e^2$

26. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xe^x}{1-e^x} = -1$

27. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{tag} 2x} = 1/2$

28. $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\ln(2+x)}{x+1} = 1$

29. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\cos 2x - 1} = 1/4$

30. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\operatorname{sen} x} = 4$

31. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{8^x - 2^x}{4x} = \frac{1}{2}\ln 2$

32. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{arc\,tag} x - x}{2x - \operatorname{arc\,sen} x} = 1$

33. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \sec 2x}{\ln \sec x} = 4$

34. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = -1/2$

35. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -3/2$

36. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$

37. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi} \frac{\csc 6x}{\csc 2x} = 1/3$

38. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{5x + 2\ln x}{x + 3\ln x} = 5$

39. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^4 + x^2}{e^x + 1} = 0$

40. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln \cot x}{e^{\csc^2 x}} = 0$

41. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x + 3x^3}{4e^x + 2x^2} = 1/4$

42. $\lim\limits_{x\to 0} (e^x - 1)\cot x = 1$

43. $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 e^x = 0$

44. $\lim\limits_{x\to 0} x \csc x = 1$

45. $\lim\limits_{x\to 1} \csc \pi x \ln x = -1/\pi$

46. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi^-} e^{-\operatorname{tag} x} \sec^2 x = 0$

47. $\lim\limits_{x\to 0} (x - \operatorname{arc\,sen} x)\csc^3 x = -1/6$

48. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}\right) = -1/4$

49. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) = 0$

50. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi} (\sec^3 x - \operatorname{tag}^3 x) = \infty$

51. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1}\right) = -1/2$

52. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{4}{x^2} - \frac{2}{1-\cos x}\right) = -1/3$

53. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 0$

54. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 1$

55. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x} = 1$

56. $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + 3x)^{1/x} = e^4$

57. $\lim\limits_{x\to +\infty} (1 - e^{-x})^{e^x} = 1/e$

58. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}\pi} (\operatorname{sen} x - \cos x)^{\operatorname{tag} x} = 1/e$

59. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi^-} (\operatorname{tag} x)^{\cos x} = 1$

60. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\operatorname{tag} \frac{1}{2}\pi x} = e^{-2/\pi}$

61. $\lim\limits_{x\to +\infty} (1 + 1/x)^x = e$

62. Hallar: (*a*) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x(1-e^x)}{(1+x)\ln(1-x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1+x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^x}{\ln(1-x)} = 1,$

(*b*) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2^x}{3^{x^2}} = 0,$ (*c*) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{-3/x}}{x^2} = 0$

63. Hallar $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln^5 x}{x^2} = 0.$ Idem, $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln^{1000} x}{x^5}.$

Capítulo 23

Diferenciales

DIFERENCIALES. Dada la función $y = f(x)$ se define:

(*a*) dx, leído *diferencial de x*, por la relación $dx = \Delta x$.

(*b*) dy, leído *diferencial de y*, por la relación $dy = f'(x)dx$.

La diferencial de una variable independiente es, por definición, el incremento que experimenta; sin embargo, la diferencial de una variable dependiente o función *no* es igual a su incremento. (Ver Fig. 23-1.)

Ejemplo 1:
Dada la función $y = x^2$, $dy = 2x \cdot dx$, mientras que, $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 = 2x\,dx + (dx)^2$. La Fig. 23-2 muestra una interpretación geométrica en la que se puede observar que Δy y dy se diferencian en el pequeño cuadrado de área $(dx)^2$.

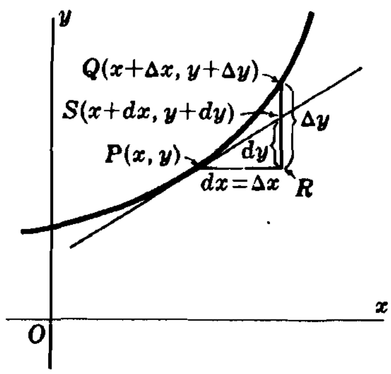


Fig. 23-1

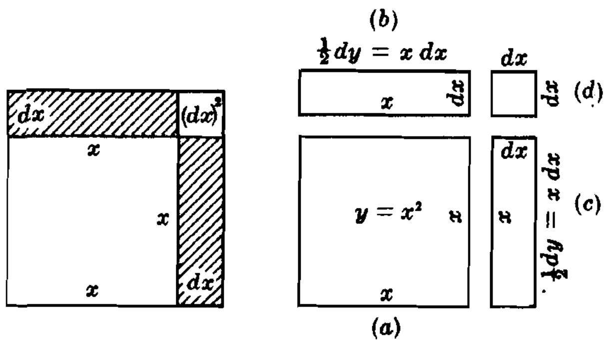


Fig. 23-2

LA DIFERENCIAL, dy, se puede hallar aplicando su fórmula de definición, o bien por medio de las reglas del cálculo de derivadas. Algunas de estas son:

$$d(c) = 0, \quad d(cu) = c\,du, \quad d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}, \quad d(\text{sen}\,u) = \cos u\,du, \quad d(\ln u) = \frac{du}{u}, \text{ etc.}$$

Ejemplo 2: Hallar dy en las funciones siguientes:

(*a*) $y = x^3 + 4x^2 - 5x + 6$

$$dy = d(x^3) + d(4x^2) - d(5x) + d(6) = (3x^2 + 8x - 5)\,dx$$

(*b*) $y = (2x^3 + 5)^{3/2}$

$$dy = \tfrac{3}{2}(2x^3 + 5)^{1/2}\,d(2x^3 + 5) = \tfrac{3}{2}(2x^3 + 5)^{1/2} \cdot 6x^2\,dx = 9x^2(2x^3 + 5)^{1/2}\,dx$$

(Ver Problemas 1-5.)

CALCULO APROXIMADO DE INCREMENTOS POR MEDIO DE LA DIFERENCIAL. Si $dx = \Delta x$ es relativamente pequeño con respecto a x, el valor de Δy se puede obtener aproximadamente hallando dy.

Ejemplo 3:
Sea $y = x^2 + x + 1$ y supongamos que x sufre un incremento desde $x = 2$ hasta $x = 2{,}01$. La variación real correspondiente a y es $\Delta y = \{(2{,}01)^2 + 2{,}01 + 1\} - \{2^2 + 2 + 1\} = 0{,}0501$. Haciendo $x = 2$ y $dx = 0{,}01$ podemos obtener, aproximadamente, el valor del incremento de y, hallando $dy = f'(x)\,dx = (2x + 1)\,dx = \{2(2) + 1\} \cdot 0{,}01 = 0{,}05$.

(Ver Problemas 6-10.)

APROXIMACION DE LAS RAICES DE UNA ECUACION. Sea $x = x_1$ un valor aproximado, convenientemente elegido, de una raiz r-sima de la ecuación $y = f(x) = 0$, y supongamos que $f(x_1) = y_1 \neq 0$, de forma que y_1 diferirá de cero en una cantidad pequeña. Si el valor de x_1 se incrementa hasta r, el incremento correspondiente de $f(x_1)$ es $\Delta y_1 = -y_1$. Así, pues, un valor aproximado del incremento de x_1 vendrá dado por $f'(x_1)dx_1 = -y_1$, o sea, $dx_1 = -\dfrac{y_1}{f'(x_1)}$. Por tanto, otro valor, más aproximado, de la raiz r-sima será:

$$x_2 = x_1 + dx_1 = x_1 - \frac{y_1}{f'(x_1)} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

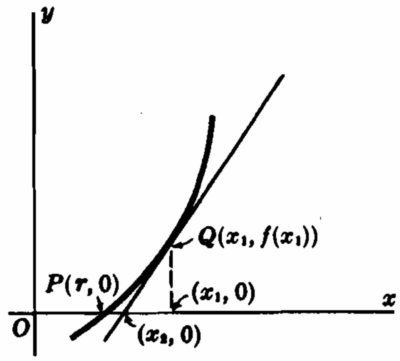


Fig. 23-3

Después de una tercera aproximación, tendremos $x_3 = x_2 + dx_2 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$, y así sucesivamente.

Si el valor elegido de x_1 no está suficientemente aproximado al de la raiz, se observará que x_2 difiere apreciablemente de x_1. Aunque esto no presenta un serio inconveniente ya que el proceso se autocorrige, sin embargo, lo más rápido es comenzar de nuevo el proceso con otro valor inicial más preciso.

(Ver Problemas 11-12.)

Problemas resueltos

1. Hallar dy en las funciones siguientes:

(a) $y = \dfrac{x^3 + 2x + 1}{x^2 + 3}$.

$$dy = \frac{(x^2+3)\cdot d(x^3+2x+1) - (x^3+2x+1)\cdot d(x^2+3)}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{(x^2+3)(3x^2+2)\,dx - (x^3+2x+1)(2x)\,dx}{(x^2+3)^2} = \frac{x^4+7x^2-2x+6}{(x^2+3)^2}\,dx$$

(b) $y = \cos^2 2x + \operatorname{sen} 3x$.

$$dy = 2\cos 2x\, d(\cos 2x) + d(\operatorname{sen} 3x) = 2\cos 2x(-2\operatorname{sen} 2x\, dx) + 3\cos 3x\, dx$$

$$= -4\operatorname{sen} 2x\cos 2x\, dx + 3\cos 3x\, dx = (-2\operatorname{sen} 4x + 3\cos 3x)\, dx$$

(c) $y = e^{3x} + \operatorname{arc\,sen} 2x$. $\qquad dy = (3e^{3x} + 2/\sqrt{1-4x^2})\,dx$

Diferenciar las funciones de los Problemas 2-5 y hallar dy/dx.

2. $xy + x - 2y = 5$.

$d(xy) + d(x) - d(2y) = d(5)$.

$x\,dy + y\,dx + dx - 2\,dy = 0$ o $(x-2)\,dy + (y+1)\,dx = 0$. De donde $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{y+1}{x-2}$.

3. $x^3y^2 - 2x^2y + 3xy^2 - 8xy = 6$.

$$2x^3y\,dy + 3x^2y^2\,dx - 2x^2\,dy - 4xy\,dx + 6xy\,dy + 3y^2\,dx - 8x\,dy - 8y\,dx = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8y - 3y^2 + 4xy - 3x^2y^2}{2x^3y - 2x^2 + 6xy - 8x}$$

4. $\dfrac{2x}{y} - \dfrac{3y}{x} = 8$. $\qquad 2\left(\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2}\right) - 3\left(\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2}\right) = 0$ y $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^2y + 3y^3}{3xy^2 + 2x^3}$

5. $x = 3\cos\theta - \cos 3\theta$, $y = 3\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,3\theta$.

$dx = (-3\,\text{sen}\,\theta + 3\,\text{sen}\,3\theta)\,d\theta$, $dy = (3\cos\theta - 3\cos 3\theta)\,d\theta$, y $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos\theta - \cos 3\theta}{-\text{sen}\,\theta + \text{sen}\,3\theta}$

6. Aplicando el cálculo diferencial, hallar aproximadamente (*a*) $\sqrt[3]{124}$, (*b*) sen 60°1′.

(*a*) Para $y = x^{1/3}$, $dy = \dfrac{1}{3x^{2/3}}dx$. Tomando $x = 125 = 5^3$ y $dx = -1$. Obtenemos $dy = \dfrac{1}{3(125)^{2/3}}(-1) = \dfrac{-1}{75}$ $= -0{,}0133$ y, aproximadamente, $\sqrt[3]{124} = y + dy = 5 - 0{,}0133 = 4{,}9867$.

(*b*) Para $x = 60°$ y $dx = 1' = 0{,}0003$ rad, $y = \text{sen}\,x = \sqrt{3}/2 = 0{,}86603$ y $dy = \cos x\,dx = \frac{1}{2}(0{,}0003) = 0{,}00015$. De donde, aproximadamente, sen $60°1' = y + dy = 0{,}86603 + 0{,}00015 = 0{,}86618$.

7. Calcular Δy, dy, e $\Delta y - dy$ siendo $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x$, $x = 2$, y $dx = 0{,}5$.

$\Delta y = \{\frac{1}{2}(2{,}5)^2 + 3(2{,}5)\} - \{\frac{1}{2}(2)^2 + 3(2)\} = 2{,}625$.

$dy = (x + 3)dx = (2 + 3)(0{,}5) = 2{,}5 \quad \Delta y - dy = 2{,}625 - 2{,}5 = 0{,}125$.

8. Hallar, aproximadamente, la variación experimentada por el volumen de un cubo de arista x cuando esta se incrementa en un 1 %.

$V = x^3$ y $dV = 3x^2\,dx$. Para $dx = 0{,}01x$, $dV = 3x^2(0{,}01x) = 0{,}03x^3$ cm³

9. Hallar el peso aproximado de un tubo de cobre de 2 metros de longitud y 2 centímetros de diámetro interior y 2 milímetros de espesor. El peso específico del cobre vale 9 000 kp/m³.

Calculemos, en primer lugar, la variación de volumen cuando el radio $r = 0{,}01$ m se sustituye por $dr = 0{,}002$ m.

$$V = 8\pi r^2 \text{ y } dV = 16\pi r\,dr = 16\pi(0{,}01)(0{,}002) = 0{,}00032\,\pi\text{m}^3$$

El peso buscado es 9 000 (0,00032π) = 9 kp.

10. Hallar los valores de x para los cuales se puede sustituir $\sqrt[5]{x}$ por $\sqrt[5]{x+1}$ con un error menor que 0,001.

Para $y = x^{1/5}$ y $dx = 1$, $dy = \frac{1}{5}x^{-4/5}\,dx = \frac{1}{5}x^{-4/5}$.

Si $\frac{1}{5}x^{-4/5} < 10^{-3}$, tendremos $x^{-4/5} < 5 \cdot 10^{-3}$ y $x^{-4} < 5^5 \cdot 10^{-15}$.

Si $x^{-4} < 10 \cdot 5^5 \cdot 10^{-16}$, tendremos $x^4 > \dfrac{10^{16}}{31\,250}$ y $x > \dfrac{10^4}{\sqrt[4]{31\,250}} = 752{,}1$.

11. Aproximar las raíces reales de $x^3 + 2x - 5 = 0$, o bien, $x^3 = 5 - 2x$.

(*a*) Sobre el mismo sistema de ejes, se construyen las curvas $y = x^3$ e $y = 5 - 2x$.

Las raíces de la ecuación dada son las abscisas de los puntos de intersección.

Del gráfico se deduce que existe una raíz cuyo valor aproximado es $x_1 = 1{,}3$.

(*b*) Una segunda aproximación de esta raíz es

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}3 - \frac{(1{,}3)^3 + 2(1{,}3) - 5}{3(1{,}3)^2 + 2} = 1{,}3 - \frac{-0{,}203}{7{,}07} = 1{,}3 + 0{,}03 = 1{,}33$$

La división se ha calculado con dos cifras decimales ya que inmediatamente después de la coma, la cifra correspondiente es cero. Ello está de acuerdo con un teorema que dice: si en una división resultan k ceros inmediatamente después de la coma, el cociente debe calcularse con $2k$ cifras decimales.

(*c*) Efectuando una tercera y una cuarta aproximación, tendremos:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1{,}33 - \frac{(1{,}33)^3 + 2(1{,}33) - 5}{3(1{,}33)^2 + 2} = 1.33 - 0{,}0017 = 1{,}3283$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1{,}3283 - 0{,}00003114 = 1{,}32826886$$

12. Aproximar las raíces de la ecuación $2\cos x - x^2 = 0$.

(a) Las curvas $y = 2\cos x$ e $y = x^2$ se cortan en dos puntos cuyas abscisas son, aproximadamente, 1 y —1. Obsérvese que si una de las raíces es r, la otra debe ser $-r$.

(b) Para $x_1 = 1: x_2 = 1 - \dfrac{2\cos 1 - 1}{-2\,\text{sen}\,1 - 2} = 1 + \dfrac{2(0{,}5403) - 1}{2(0{,}8415) + 2} = 1 + 0{,}02 = 1{,}02$.

(c) $x^3 = 1{,}02 - \dfrac{2\cos(1{,}02) - (1{,}02)^2}{-2\,\text{sen}\,(1{,}02) - 2(1{,}02)}, = 1{,}02 + \dfrac{0{,}0064}{3{,}7442} = 1{,}02 + 0{,}0017 = 1{,}0217$.

Por tanto, con cuatro cifras decimales, las raíces son 1,0217 y —1,0217.

Problemas propuestos

13. Hallar dy en las funciones siguientes:

(a) $y = (5 - x)^3$ *Sol.* $-3(5 - x)^2\,dx$

(b) $y = e^{4x^2}$ *Sol.* $8xe^{4x^2}\,dx$

(c) $y = (\text{sen}\,x)/x$ *Sol.* $\dfrac{x\cos x - \text{sen}\,x}{x^2}\,dx$

(d) $y = \cos bx^2$ *Sol.* $-2bx\,\text{sen}\,bx^2\,dx$

(e) $y = \text{arc}\cos 2x$ *Sol.* $\dfrac{-2}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

(f) $y = \ln \text{tag}\, x$ *Sol.* $\dfrac{2\,dx}{\text{sen}\,2x}$

14. Hallar dy/dx como en los Problemas 2-5.

(a) $2xy^3 + 3x^2y = 1$ *Sol.* $-\dfrac{2y(y^2 + 3x)}{3x(2y^2 + x)}$

(b) $xy = \text{sen}\,(x - y)$ *Sol.* $\dfrac{\cos(x-y) - y}{\cos(x-y) + x}$

(c) $\text{arc tag}\,\dfrac{y}{x} = \ln(x^2 + y^2)$ *Sol.* $\dfrac{2x + y}{x - 2y}$

(d) $x^2 \ln y + y^2 \ln x = 2$ *Sol.* $-\dfrac{(2x^2 \ln y + y^2)y}{(2y^2 \ln x + x^2)x}$

15. Hallar, con ayuda del cálculo diferencial, un valor aproximado de (a) $\sqrt[4]{17}$, (b) $\sqrt[5]{1020}$, (c) cos 59°, (d) tag 44° *Sol.* (a) 2,03125, (b) 3,99688, (c) 0,5151, (d) 0,9651.

16. Hallar, con ayuda del cálculo diferencial, el incremento de (a) x^3 cuando x pasa de 5 a 5,01; (b) $1/x$ cuando x disminuye de 1 a 0,98. *Sol.* (a) 0,75, (b) 0,02.

17. Un disco metálico se dilata por la acción del calor de manera que su radio aumenta desde 5 a 5,06 centímetros. Hallar el valor aproximado del incremento del área. *Sol.* $0{,}6\pi = 1{,}88\ \text{cm}^2$.

18. Una bola de hielo de 10 centímetros de radio, se derrite hasta que su radio adquiere el valor 9,8 metros. Hallar, aproximadamente, la disminución que experimenta (a) su volumen y (b) su superficie. *Sol.* (a) $80\pi\ \text{cm}^3$, (b) $16\pi\ \text{cm}^2$.

19. La velocidad (metros por segundo) de un cuerpo en función de un parámetro h viene dada por $v = \sqrt{64{,}4\,h}$. Hallar el error en v debido a un error de 0,5 metros en la medición de h si este vale 100 metros. *Sol.* 0,2 m/s.

20. Si un aviador vuela alrededor de la tierra a una altura de 3,2 kilómetros sobre el ecuador, calcular cuántos kilómetros recorrerá más que una persona que la circunda por el ecuador. *Sol.* 20,2 km.

21. La precisión con que se puede medir el radio de un círculo es de 0,001 centímetros. Sabiendo que se quiere obtener su área con una aproximación de 0,1 centímetros cuadrados, hallar el máximo radio con el que se puede conseguir dicha medición. *Sol.* Aprox. 16 cm.

22. Hallar el volumen V sabiendo que $pV = 20$ y que la medida de p es $5 \pm 0{,}02$. *Sol.* $4 \mp 0{,}016$.

23. Hallar el radio r sabiendo que $F = 1/r^2$ y que la medida de F es $4 \pm 0{,}05$. *Sol.* $0{,}5 \mp 0{,}003$.

24. Hallar la variación del área total de un cono recto circular cuando (a) permaneciendo constante el radio, aumenta su altura en una cantidad muy pequeña, (b) permaneciendo constante la altura, el radio aumenta en una cantidad muy pequeña.

Sol. (a) $\dfrac{\pi rh\,dh}{\sqrt{r^2 + h^2}}$, (b) $\pi\left\{\dfrac{h^2 + 2r^2}{\sqrt{r^2 + h^2}} + 2r\right\}dr$

25. Hallar con cuatro cifras decimales (a) la raíz real de $x^3 + 3x + 1 = 0$, (b) la menor de las raíces de $e^{-x} = \text{sen}\,x$, (c) la raíz de $x^2 + \ln x = 2$, (d) la raíz de $x - \cos x = 0$. *Sol.* (a) —0,3222, (b) 0,5885, (c) 1,3141, (d) 0,7391.

Capítulo 24

Trazado de curvas

UNA CURVA ALGEBRAICA PLANA es aquella cuya ecuación puede escribirse en la forma general

$$ay^n + (bx + c)y^{n-1} + (dx^2 + ex + f)y^{n-2} + \cdots u_n(x) = 0$$

en donde $u_n(x)$ es un polinomio de grado n. Seguidamente veremos las propiedades de este tipo de curvas.

SIMETRIA. Una curva es simétrica con respecto a

(1) el eje x, si su ecuación no varía al cambiar y por $-y$;

(2) el eje y, si su ecuación no varía al cambiar x por $-x$;

(3) el origen, si la ecuación no varía al cambiar x por $-x$ e y por $-y$ simultáneamente;

(4) la recta $y = x$ (bisectriz del primer cuadrante), si la ecuación no varía al intercambiar x con y.

INTERSECCION CON LOS EJES. Los puntos de intersección con el eje x se obtienen despejando x en la ecuación $y = 0$. Los puntos de intersección con el eje y se obtienen despejando y en la ecuación $x = 0$.

CAMPO DE VARIACION. El *campo de variación horizontal* es el de la variable x, es decir los intervalos de x en los cuales está definida la función.

El *campo de variación vertical* es el de la función y.

Un punto (x_0, y_0) recibe el nombre de *punto aislado* de la curva si sus coordenadas satisfacen la ecuación de ésta, no sucediendo lo mismo con puntos infinitamente próximos a él.

MAXIMOS, MINIMOS, INFLEXION Y CONCAVIDAD. Ya se han estudiado en el Capítulo 8.

ASINTOTAS. La asíntota de una curva es una recta cuya posición viene definida por el límite de una secante cuando los dos de puntos de intersección se aproximan indefinidamente a lo largo de ella.

Una curva tiene *asíntotas verticales* cuando el coeficiente de la mayor potencia de y, escrita la ecuación en la forma anterior, es una función de x formada por uno o más factores lineales (reales). A cada uno de estos factores corresponde una asíntota vertical.

Una curva tiene *asíntotas horizontales* cuando el coeficiente de la mayor potencia de x, escrita la ecuación en la forma $ax^n + (by + c)x^{n-1} + (dy^2 + ey + f)x^{n-2} + \cdots = 0$, es una función de y formada por uno o más factores lineales (reales). Cada uno de estos factores corresponde a una asíntota horizontal.

Para obtener las ecuaciones de las *asíntotas oblicuas*:

(1) Se sustituye y por $mx + b$ en la ecuación de la curva y se ordena ésta en la forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

(2) Resolver el sistema de ecuaciones formado por $a_0 = 0$ y $a_1 = 0$, y hallar los valores de m y b.

(3) Para cada par de valores m y b se obtiene una asíntota de ecuación $y = mx + b$.

Si $a_1 = 0$, para hallar el valor de b se resuelve el sistema formado por $a_0 = 0$ y $a_2 = 0$ para obtener (3).

PUNTOS SINGULARES. Un *punto singular* de una curva algebraica es aquel para el cual la expresión dy/dx presenta la forma indeterminada 0/0.

Para hallar los puntos singulares de una curva se obtiene $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ y, sin efectuar simplificaciones de factores comunes, se determinan las raíces comunes de $g(x) = 0$ y $h(x) = 0$.

Si (x_0, y_0) es un punto singular de la curva, se puede facilitar su estudio posterior efectuando los cambios $x = x' + x_0$, $y = y' + y_0$. En el nuevo sistema de coordenadas, el punto singular es el origen (0,0).

PUNTO SINGULAR EN EL ORIGEN. La ecuación de una curva que pasa por el origen se puede poner en la forma

$$(a_1x + b_1y) + (a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2) + (a_3x^3 + b_3x^2y + c_3xy^2 + d_3y^3) + \cdots = 0$$

Si $a_1 = b_1 = 0$ el origen es un punto singular de la curva.

Si $a_1 = b_1 = 0$ no siendo nulos a_2, b_2 y c_2 simultáneamente, el punto singular recibe el nombre de *punto doble.*

Si $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = c_2 = 0$, no siendo nulos a_3, b_3, c_3 y d_3 simultáneamente, el punto singular recibe el nombre de *punto triple* y así sucesivamente.

CLASIFICACION DE LOS PUNTOS DOBLES EN EL ORIGEN

A. $c_2 \neq 0$.

(1) Se sustituye y por mx en el término $a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2$, obteniéndose $(c_2m^2 + b_2m + a_2)x^2$.

(2) Se despeja m de la ecuación $c_2m^2 + b_2m + a_2 = 0$.

Si las raíces m_1 y m_2 son reales y distintas, la curva tiene dos tangentes, $y = m_1x$ e $y = m_2x$ en el origen y el punto doble recibe el nombre de *punto nodal.*

Si las raíces son reales e iguales, la curva tiene una tangente en el origen y el punto doble recibe el nombre de

(*a*) *retroceso,* siempre que la curva no continúe después del origen.

(*b*) *tacnodal,* siempre que la curva continúe después del origen.

En algún caso, el origen puede ser un punto aislado.

Si las raíces son imaginarias, el origen es un *punto doble aislado.*

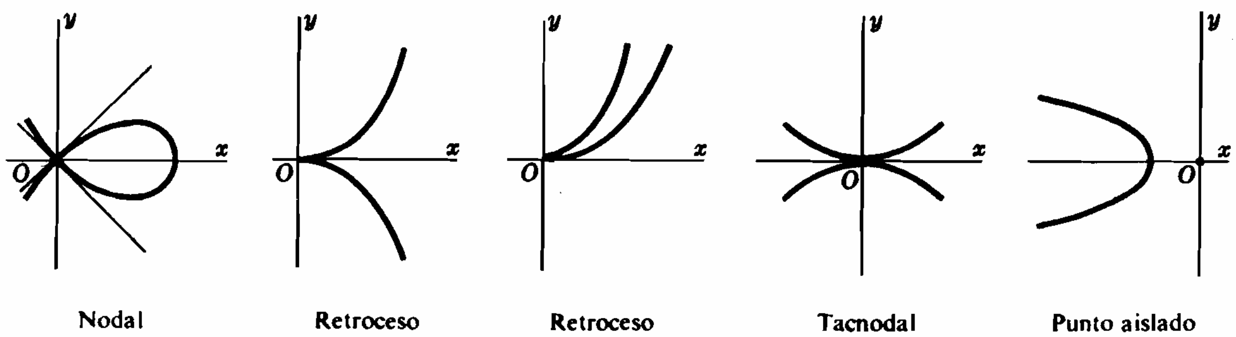


Fig. 24-1

B. $c_2 = 0$, $a_2 \neq 0$.

Se sustituye x por ny en el término $a_2x^2 + b_2xy$, y se procede como en *A*.

C. $a_2 = c_2 = 0$, $b_2 \neq 0$.

El origen es un punto nodal y las dos tangentes son los ejes coordenados.

Problemas resueltos

ASINTOTAS

1. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la curva $y^2(1 + x) = x^2(1 - x)$.

El coeficiente de la mayor potencia de y es $(1 + x)$; la recta $x + 1 = 0$ es una asíntota vertical. No tiene asíntotas horizontales porque el coeficiente de la mayor potencia de x es una constante.

Para hallar las asíntotas oblicuas, sustituimos y por $mx + b$, obteniendo,

$$(m^2 + 1)x^3 + (m^2 + 2mb - 1)x^2 + b(b + 2m)x + b^2 = 0 \qquad (1)$$

Se resuelve ahora el sistema formado por las ecuaciones que resultan de igualar a cero los coeficientes de las dos potencias más altas de x

$$m^2 + 1 = 0 \quad \text{y} \quad m^2 + 2mb - 1 = 0$$

Como las soluciones de este sistema son imaginarias, no hay asíntotas oblicuas. (Ver Fig. 24-2.)

2. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la curva $x^3 + y^3 - 6x^2 = 0$.

Carece de asíntotas horizontales y verticales, ya que los coeficientes de las potencias más altas de x e y son constantes.

Para hallar las asíntotas oblicuas, sustituimos y por $mx + b$, obteniendo,

$$(m^3 + 1)x^3 + 3(m^2b - 2)x^2 + 3mb^2x + b^3 = 0 \qquad (1)$$

Resolviendo el sistema formado por $m^3 + 1 = 0$ y $m^2b - 2 = 0$, resultan $m = -1$, $b = 2$. La ecuación de la asíntota oblicua es $y = -x + 2$.

Sustituyendo $m = -1$ y $b = 2$ en (1), la ecuación se transforma en $-12x + 8 = 0$. El punto $x = 2/3$ es la abscisa del punto de intersección de la curva con su asíntota. (Ver Fig. 24-3.)

3. Hallar las ecuaciones de las asíntotas de la curva $y^2(x - 1) - x^3 = 0$.

El coeficiente de la más alta de y es $(x - 1)$; la recta $x - 1 = 0$ es una asíntota vertical. Carece de asíntotas horizontales.

Para hallar las asíntotas oblicuas, sustituimos y por $mx + b$, obteniendo,

$$(m^2 - 1)x^3 + m(2b - m)x^2 + b(b - 2m)x - b^2 = 0 \qquad (1)$$

Resolviendo el sistema formado por $m^2 - 1 = 0$ y $m(2b - m) = 0$, resultan $m = 1$, $b = \frac{1}{2}$ y $m = -1$, $b = -\frac{1}{2}$. Las ecuaciones de las asíntotas son $y = x + \frac{1}{2}$ e $y = -x - \frac{1}{2}$.

La asíntota $y = x + \frac{1}{2}$, corta a la curva en un punto cuya abscisa se obtiene de $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 2)x - \frac{1}{4} = 0$, es decir, $x = -\frac{1}{3}$. La abscisa del punto de intersección de la curva y la asíntota $y = -x - \frac{1}{2}$ es igual a $-\frac{1}{3}$. (Ver Fig. 24-4.)

PUNTOS SINGULARES

4. Hallar los puntos singulares de la curva $y^2(1 + x) = x^2(1 - x)$.

Los términos de la potencia menor son de segundo grado; por tanto el origen es un punto doble.

Como $c_2 \neq 0$, esto es, hay término en y^2, sustituimos y por mx en $y^2 - x^2$ e igualamos a cero el coeficiente de x^2, obteniéndose $m^2 - 1 = 0$.

Así pues, $m = \pm 1$ y las rectas $y = x$ e $y = -x$ son tangentes a la curva en el origen. El origen es un modo. (Ver Fig. 24-2.)

5. Hallar los puntos singulares de la curva $x^3 + y^3 - 6x^2 = 0$.

El término de menor potencia es de segundo grado; por tanto, el origen es un punto doble.

Como $c_2 = 0$, sustituimos x por ny en el término de menor grado e igualamos a cero el coeficiente de y^2, obteniendo $n^2 = 0$. Hay una sola tangente, $x = 0$, a la curva en el origen.

El punto doble es de retroceso, ya que, cuando $y = -\xi$, la ecuación $x^3 - 6x^2 - \xi^3 = 0$ tiene, según la regla de los signos de Descartes, una raíz positiva y dos imaginarias, y en consecuencia, la curva no continúa después del origen. (Ver Fig. 24-3.)

6. Hallar los puntos singulares de la curva $y^2(x-1)-x^3=0$.

El término de menor potencia es de segundo grado; por tanto, el origen es un punto doble.

Como $c_2 \neq 0$, sustituimos y por mx en el término de menor grado e igualamos a cero el coeficiente de x^2, obteniendo $m^2=0$. El origen es un punto de retroceso, ya que aunque para $x<0$, y está definida, para $0<x<1$, y es imaginario. (Ver Fig. 24-4.)

7. Dada la función $y^2(x^2-4)=x^4$, hallar (*a*) los puntos singulares y (*b*) las asíntotas.

(*a*) El origen es un punto doble. Como $a_2=b_2=0$ y $c_2 \neq 0$, el resultado de sustituir $y=mx$ e igualar a cero es $m^2=0$. El origen es un punto doble aislado, ya que cuando x tiende a 0, y es imaginario.

(*b*) Las rectas $x=2$ y $x=-2$ son asíntotas verticales.

Para hallar las asíntotas oblicuas, sustituimos y por $mx+b$; resulta,

$$(m^2-1)x^4+2mbx^3+(b^2-4m^2)x^2-8mbx-4b^2=0$$

Resolviendo el sistema $m^2-1=0$ y $mb=0$, se obtienen $m=1$, $b=0$ y $m=-1$, $b=0$. Las ecuaciones de las asíntotas son $y=x$ e $y=-x$. Las asíntotas oblicuas cortan a la curva en el origen. (Ver Fig. 24-5).

TRAZADO DE CURVAS

8. Estudiar y representar la curva $y^2(1+x)=x^2(1-x)$.

Simetría. La curva es simétrica con respecto al eje x.

Intersección con los ejes. Corta al eje x en $x=0$ y $x=1$. Corta al eje y en $y=0$.

Campo de variación. La curva está definida en el intervalo $-1<x \leqq 1$ y para todos los valores de y.

Máximos y mínimos, etc. La curva consta de dos ramas, $y=\dfrac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$ e $y=-\dfrac{x\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$. Para la primera de ellas

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-x-x^2}{(1+x)^{3/2}(1-x)^{1/2}} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x-2}{(1+x)^{5/2}(1-x)^{3/2}}$$

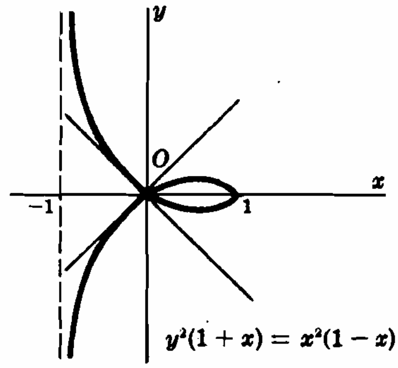


Fig. 24-2

Los valores críticos son $x=1$ y $(-1+\sqrt{5})/2$. El punto $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{(-1+\sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}\right)$ es un mínimo.

No tiene puntos de inflexión. La rama es convexa.

Por simetría, hay un mínimo en $\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, -\dfrac{(-1+\sqrt{5})\sqrt{\sqrt{5}-2}}{2}\right)$ y la segunda rama es convexa.

Asíntotas. La recta (ver Problema 1) $x=-1$ es una asíntota vertical.

Puntos singulares. El origen (ver Problema 4) es un punto nodal y las tangentes en él son las rectas $y=x$ e $y=-x$.

9. Estudiar y representar la curva $y^3-x^2(6-x)=0$. (Ver Figura 24-3.)

Simetría. Carece de simetría.

Intersección con los ejes. Los puntos de intersección $x=0$, $x=6$ e $y=0$.

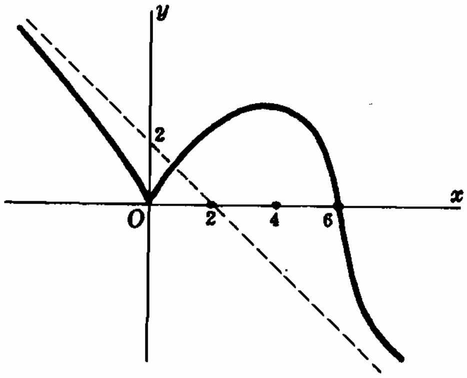
Campo de variación. Está definida para todos los valores de x e y.

Máximos y mínimos, etc. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$.

Los valores críticos son $x=0, 4, 6$; el punto $(0, 0)$ es un mínimo y $(4, 2\sqrt[3]{4})$ es un máximo. El punto $(6, 0)$ es de inflexión; la curva es convexa a la izquierda y cóncava a la derecha.

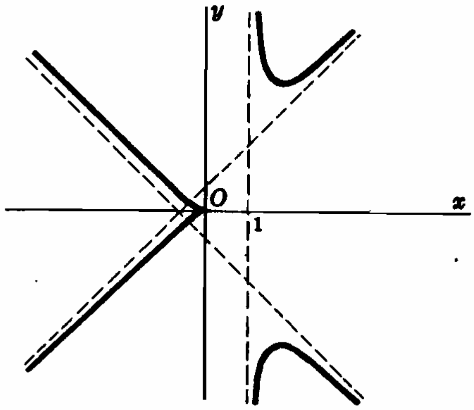
Asíntotas. La recta (ver Problema 2) $y=-x+2$ es una asíntota.

Puntos singulares. El origen (ver Problema 5) es un punto de retroceso; la tangente en él es el eje y.



$x^3 + y^3 - 6x^2 = 0$

Fig. 24-3



$y^2(x-1) - x^3 = 0$

Fig. 24-4

10. Estudiar y representar la curva $y^2(x - 1) - x^3 = 0$. (Ver Fig. 24-4.)

Simetría. La curva es simétrica con respecto al eje x.

Intersección con los ejes. Los puntos de intersección son $x = 0$ e $y = 0$.

Campo de variación. La curva está definida en los intervalos $-\infty < x \leq 0$ y $x > 1$ y para todos los valores de y.

Máximos y mínimos, etc. Para la rama $y = x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(2x-3)x^{1/2}}{2(x-1)^{3/2}} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4x^{1/2}(x-1)^{5/2}}$$

Los valores críticos son $x = 0$ y $3/2$. El punto $(3/2, 3\sqrt{3}/2)$ es un mínimo. Carece de puntos de inflexión. La rama es cóncava. Por simetría, hay un máximo en el punto $(3/2, -3\sqrt{3}/2)$ sobre la rama $y = -x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ y esta rama es convexa.

Asíntotas. Las rectas $x = 1$, $y = x + \frac{1}{2}$, $y = -x - \frac{1}{2}$ son asíntotas. (Ver Problema 3.)

Puntos singulares. El origen es un punto de retroceso (ver Problema 6). La recta $y = 0$ es tangente en él.

11. Estudiar y representar la curva $y^2(x^2 - 4) = x^4$.

Simetría. La curva es simétrica con respecto a los ejes coordenados y respecto del origen.

Intersección con los ejes. Los puntos de intersección son $x = 0$ e $y = 0$.

Campo de variación. La curva está definida en los intervalos $-\infty < x < -2$ y $2 < x < +\infty$ y en los $-\infty < y \leqq -4$ y $4 \leqq y < +\infty$. El punto $(0, 0)$ es un punto aislado.

Máximos y mínimos, etc.

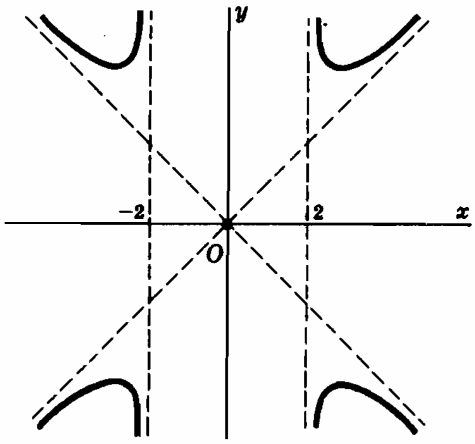
Para la rama $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$, $x > 2$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 8x}{(x^2-4)^{3/2}} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4x^2 + 32}{(x^2-4)^{5/2}}$$

El valor crítico es $x = 2\sqrt{2}$. La rama es cóncava y en el punto $(2\sqrt{2}, 4)$ tiene un mínimo.

Por simetría, hay un mínimo en el punto $(-2\sqrt{2}, 4)$ y máximos en los $(2\sqrt{2}, -4)$ y $(-2\sqrt{2}, -4)$.

Asíntotas, puntos singulares. Ver Problema 7.



$y^2(x^2 - 4) = x^4$

Fig. 24-5

12. Estudiar y representar la curva $(x + 3)(x^2 + y^2) = 4$.

Antes de comenzar a estudiar la curva, tratemos de averiguar si tiene algún punto singular. En caso afirmativo se hace una traslación de ejes de forma que el nuevo origen sea dicho punto.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x+2)(x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})}{(x+3)^2 y}. \text{ Para } x = -2, y = 0$$

y $\dfrac{dy}{dx}$ presenta la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$. El punto $(-2, 0)$ es un punto singular.

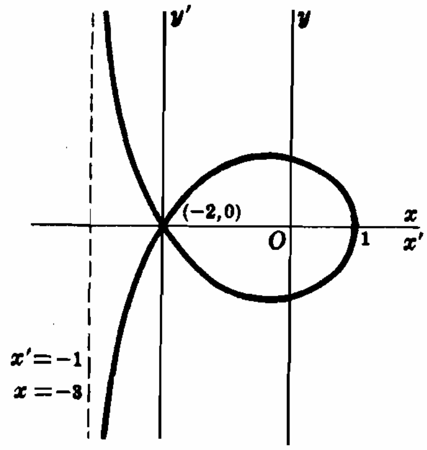
Haciendo el cambio de coordenadas $x = x' - 2$, $y = y'$, la ecuación dada se transforma en $y'^2(x' + 1) + x'^3 - 3x'^2 = 0$.

Simetría. La curva es simétrica con respecto al eje x'.

Intersección con los ejes. Los puntos de intersección son $x' = 0$, $x' = 3$, e $y' = 0$.

Campo de variación. La curva está definida en el intervalo $-1 < x' \leqq 3$ y para todos los valores de y'.

Máximos y mínimos, etc.



$(x + 3)(x^2 + y^2) = 4$

Fig. 24-6

Para la rama $y' = \dfrac{x'\sqrt{3-x'}}{\sqrt{x'+1}}$

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{3 - x'^2}{(3-x')^{1/2}(x'+1)^{3/2}} \quad \text{y} \quad \frac{d^2y'}{dx'^2} = \frac{-12}{(3-x')^{3/2}(x'+1)^{5/2}}$$

Los valores críticos son $x' = \sqrt{3}$ y 3. El punto $(\sqrt{3}, \sqrt{6\sqrt{3}-9})$ es un máximo. La rama es convexa.

Por simetría, $(\sqrt{3}, \sqrt{6\sqrt{3}-9})$ es un mínimo de la otra rama que es cóncava.

Asíntotas. La recta $x' = -1$ es una asíntota vertical. Para hallar las asíntotas oblicuas, sustituimos y' por $mx' + b$, obteniendo $(m^2 + 1)x'^3 + \cdots = 0$. Carece de asíntotas oblicuas. ¿Por qué?

Puntos singulares. El origen es un punto doble. Cuando y' se sustituye por mx' en el término de menor grado, $y'^2 - 3x'^2$ resulta $(m^2 - 3)x'^2$. De $m^2 - 3 = 0$ se deduce $m = \pm\sqrt{3}$ y las tangentes (en punto nodal) son $y' = \pm\sqrt{3}x'$.

En el sistema inicial de coordenadas, $(\sqrt{3} - 2, \sqrt{6\sqrt{3}-9})$ es un máximo y $(\sqrt{3} - 2, -\sqrt{6\sqrt{3}-9})$ es un mínimo. La recta $x = -3$ es una asíntota vertical. El punto $(-2, 0)$ es un nodo, las ecuaciones de las tangentes, nodales son $y = \pm\sqrt{3}(x + 2)$.

Problemas propuestos

Estudiar y dibujar las curvas siguientes.

13. $(x - 2)(x - 6)y = 2x^2$

14. $x(3 - x^2)y = 1$

15. $(1 - x^2)y = x^4$

16. $xy = (x^2 - 9)^2$

17. $2xy = (x^2 - 1)^3$

18. $x(x^2 - 4)y = x^2 - 6$

19. $y^2 = x(x^2 - 4)$

20. $y^2 = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$

21. $xy^2 = x^2 + 3x + 2$

22. $(x^2 - 2x - 3)y^2 = 2x + 3$

23. $x(x - 1)y = x^2 - 4$

24. $(x + 1)(x + 4)^2y^2 = x(x^2 - 4)$

25. $y^2 = 4x^2(4 - x^2)$

26. $y^2 = 5x^4 + 4x^5$

27. $y^3 = x^2(8 - x^2)$

28. $y^3 = x^2(3 - x)$

29. $(x^2 - 1)y^3 = x^2$

30. $(x - 3)y^3 = x^4$

31. $(x - 6)y^2 = x^2(x - 4)$

32. $(x^2 - 16)y^2 = x^3(x - 2)$

33. $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$

34. $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$

35. $y^4 - 4xy^2 = x^4$

36. $(x^2 + y^2)^3 = 4xy(x^2 - y^2)$

37. $y^2 = x(x - 3)^2$

38. $y^2 = x(x - 2)^3$

39. $3y^4 = x(x^2 - 9)^3$

40. $x^3y^3 = (x - 3)^2$

Capítulo 25

Fórmulas fundamentales de integración

UNA FUNCION $F(x)$ cuya derivada, en un cierto intervalo del eje x, $F'(x) = f(x)$, decimos que $F(x)$ es la primitiva o integral indefinida de $f(x)$. La integral indefinida de una función dada no es única; por ejemplo: x^2, $x^2 + 5$, $x^2 - 4$ son las primitivas o integrales indefinidas de $f(x) = 2x$ ya que $\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(x^2 + 5) = \frac{d}{dx}(x^2 - 4) = 2x$. Todas las primitivas de $f(x) = 2x$ están representadas por la expresión $x^2 + C$, en la que C es una constante cualquiera y que se denomina *constante de integración*.

La primitiva o integral indefinida de la función $f(x)$ se representa por medio del símbolo $\int f(x)\,dx$. Por ejemplo: $\int 2x\,dx = x^2 + C$.

FORMULAS FUNDAMENTALES DE INTEGRACION. Algunas de las expresiones que figuran a continuación se deducen de forma inmediata de las fórmulas de derivación vistas en capítulos anteriores. La fórmula 25 se puede comprobar teniendo en cuenta que

$$\frac{d}{du}\left\{\tfrac{1}{2}u\sqrt{a^2 - u^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{arc\,sen}\frac{u}{a} + C\right\} = \sqrt{a^2 - u^2}$$

En algunas fórmulas aparece el signo de valor absoluto. Por ejemplo, escribimos

5. $$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

en lugar de

5(*a*). $\int \frac{du}{u} = \ln u + C, \quad u > 0$ 5(*b*). $\int \frac{du}{u} = \ln(-u) + C, \quad u < 0$

y

10. $$\int \operatorname{tag} u\,du = \ln|\sec u| + C$$

en lugar de

10(*a*). $\int \operatorname{tag} u\,du = \ln \sec u + C,$ siendo u tal que $\sec u \geq 1$

10(*b*). $\int \operatorname{tag} u\,du = \ln(-\sec u) + C,$ siendo u tal que $\sec u \leq -1$

1. $\int \frac{d}{dx}[f(x)]\,dx = f(x) + C$
2. $\int (u + v)\,dx = \int u\,dx + \int v\,dx$
3. $\int au\,dx = a\int u\,dx$, siendo a una constante
4. $\int u^m\,du = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C, \quad m \neq -1$
5. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$
6. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1$
7. $\int e^u\,du = e^u + C$
8. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$
9. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$
10. $\int \operatorname{tag} u\,du = \ln|\sec u| + C$
11. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
12. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \operatorname{tag} u| + C$
13. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$
14. $\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tag} u + C$
15. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$
16. $\int \sec u \operatorname{tag} u\,du = \sec u + C$

17. $\int \csc u \cot u\, du = -\csc u + C$

18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \text{arc sen}\,\frac{u}{a} + C$

19. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\text{arc tag}\,\frac{u}{a} + C$

20. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\text{arc sec}\,\frac{u}{a} + C$

21. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

22. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

23. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) + C$

24. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

25. $\int \sqrt{a^2-u^2}\, du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2-u^2} + \frac{1}{2}a^2\,\text{arc sen}\,\frac{u}{a} + C$

26. $\int \sqrt{u^2+a^2}\, du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2+a^2} + \frac{1}{2}a^2\ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) + C$

27. $\int \sqrt{u^2-a^2}\, du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2-a^2} - \frac{1}{2}a^2\ln|u+\sqrt{u^2-a^2}| + C$

Problemas resueltos

1. $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$

2. $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

3. $\int \sqrt[3]{z}\,dz = \int z^{1/3}\,dz = \frac{z^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{4}z^{4/3} + C$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-2/3}\,dx = \frac{x^{1/3}}{1/3} + C = 3x^{1/3} + C$

5. $\int (2x^2-5x+3)\,dx = 2\int x^2\,dx - 5\int x\,dx + 3\int dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x + C$

6. $\int (1-x)\sqrt{x}\,dx = \int (x^{1/2}-x^{3/2})\,dx = \int x^{1/2}\,dx - \int x^{3/2}\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} + C$

7. $\int (3s+4)^2\,ds = \int (9s^2+24s+16)\,ds = 9(\frac{1}{3}s^3) + 24(\frac{1}{2}s^2) + 16s + C = 3s^3 + 12s^2 + 16s + C$

8. $\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx = \int (x+5-4x^{-2})\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{4x^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{4}{x} + C$

9. Calcular: (*a*) $\int (x^3+2)^2\cdot 3x^2\,dx$, (*b*) $\int (x^3+2)^{1/2}x^2\,dx$, (*c*) $\int \frac{8x^2\,dx}{(x^3+2)^3}$, (*d*) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{(x^3+2)}}$.

Haciendo el cambio $x^3+2=u$; tendremos $du = 3x^2\,dx$.

(*a*) $\int (x^3+2)^2\cdot 3x^2\,dx = \int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}(x^3+2)^3 + C$

(*b*) $\int (x^3+2)^{1/2}x^2\,dx = \frac{1}{3}\int (x^3+2)^{1/2}\cdot 3x^2\,dx = \frac{1}{3}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{9}(x^3+2)^{3/2} + C$

(*c*) $\int \frac{8x^2\,dx}{(x^3+2)^3} = 8\cdot\frac{1}{3}\int (x^3+2)^{-3}3x^2\,dx = \frac{8}{3}\int u^{-3}\,du = -\frac{8}{3}\left(\frac{1}{2}u^{-2}\right) + C = -\frac{4}{3(x^3+2)^2} + C$

(*d*) $\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}\,dx = \frac{1}{3}\int (x^3+2)^{-1/4}3x^2\,dx = \frac{1}{3}\int u^{-1/4}\,du = \frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}u^{3/4} + C = \frac{4}{9}(x^3+2)^{3/4} + C$

10. Calcular $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx$. Haciendo el cambio $1-2x^2 = u$; tendremos $du = -4x\,dx$.

$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx = 3\left(-\frac{1}{4}\right)\int (1-2x^2)^{1/2}(-4x\,dx) = -\frac{3}{4}\int u^{1/2}\,du$$
$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C = -\frac{1}{2}(1-2x^2)^{3/2} + C$$

11. Calcular $\int \frac{(x+3)\,dx}{(x^2+6x)^{1/3}}$. Haciendo el cambio $x^2+6x = u$; tendremos $du = (2x+6)\,dx$.

$$\int \frac{(x+3)\,dx}{(x^2+6x)^{1/3}} = \frac{1}{2}\int (x^2+6x)^{-1/3}(2x+6)\,dx = \frac{1}{2}\int u^{-1/3}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}u^{2/3} + C = \frac{3}{4}(x^2+6x)^{2/3} + C$$

12. $\int \sqrt[3]{1-x^2}\, x\, dx \;=\; -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{1/3}(-2x\, dx) \;=\; -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}(1-x^2)^{4/3} + C \;=\; -\frac{3}{8}(1-x^2)^{4/3} + C$

13. $\int \sqrt{x^2-2x^4}\, dx \;=\; \int (1-2x^2)^{1/2} x\, dx \;=\; -\frac{1}{4}\int (1-2x^2)^{1/2}(-4x\, dx)$

$\;=\; -\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(1-2x^2)^{3/2} + C \;=\; -\frac{1}{6}(1-2x^2)^{3/2} + C$

14. $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}\, dx \;=\; \int \frac{1+2x+x^2}{x^{1/2}}\, dx \;=\; \int (x^{-1/2} + 2x^{1/2} + x^{3/2})\, dx \;=\; 2x^{1/2} + \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}x^{5/2} + C$

15. $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\, dx \;=\; \int \left\{1 - \frac{1}{(x+1)^2}\right\} dx \;=\; x + \frac{1}{x+1} + C' \;=\; \frac{x^2}{x+1} + 1 + C' \;=\; \frac{x^2}{x+1} + C$

FORMULAS 5-7

16. $\int \frac{dx}{x} \;=\; \ln|x| + C$ 17. $\int \frac{dx}{x+2} \;=\; \int \frac{d(x+2)}{x+2} \;=\; \ln|x+2| + C$

18. $\int \frac{dx}{2x-3} \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} \;=\; \frac{1}{2}\ln|u| + C \;=\; \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$, siendo $u = 2x-3$ y $du = 2\, dx$, o

$\int \frac{dx}{2x-3} \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{d(2x-3)}{2x-3} \;=\; \frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$

19. $\int \frac{x\, dx}{x^2-1} \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{2x\, dx}{x^2-1} \;=\; \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C \;=\; \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \ln c \;=\; \ln c\sqrt{|x^2-1|}$

20. $\int \frac{x^2\, dx}{1-2x^3} \;=\; -\frac{1}{6}\int \frac{-6x^2\, dx}{1-2x^3} \;=\; -\frac{1}{6}\ln|1-2x^3| + C \;=\; \ln\frac{c}{\sqrt[6]{|1-2x^3|}}$

21. $\int \frac{x+2}{x+1}\, dx \;=\; \int \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) dx \;=\; x + \ln|x+1| + C$

22. $\int e^{-x}\, dx \;=\; -\int e^{-x}(-dx) \;=\; -e^{-x} + C$ 24. $\int e^{3x}\, dx \;=\; \frac{1}{3}\int e^{3x}(3\, dx) \;=\; \frac{e^{3x}}{3} + C$

23. $\int a^{2x}\, dx \;=\; \frac{1}{2}\int a^{2x}(2\, dx) \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{a^{2x}}{\ln a}\right) + C$ 25. $\int \frac{e^{1/x}\, dx}{x^2} \;=\; -\int e^{1/x}\left(-\frac{dx}{x^2}\right) \;=\; -e^{1/x} + C$

26. $\int (e^x+1)^3 e^x\, dx \;=\; \int u^3\, du \;=\; \frac{u^4}{4} + C \;=\; \frac{(e^x+1)^4}{4} + C$ siendo $u = e^x+1$ y $du = e^x\, dx$, o

$\int (e^x+1)^3 e^x\, dx \;=\; \int (e^x+1)^3\, d(e^x+1) \;=\; \frac{(e^x+1)^4}{4} + C$

27. $\int \frac{dx}{e^x+1} \;=\; \int \frac{e^{-x}\, dx}{1+e^{-x}} \;=\; -\int \frac{-e^{-x}\, dx}{1+e^{-x}} \;=\; -\ln(1+e^{-x}) + C \;=\; \ln\frac{e^x}{1+e^x} + C$

$\;=\; x - \ln(1+e^x) + C$

El signo de valor absoluto no se precisa aquí, ya que $1 + e^{-x} > 0$ para todos los valores de x.

FORMULAS 8-17

28. $\int \operatorname{sen}\frac{1}{2}x\, dx \;=\; 2\int \operatorname{sen}\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}dx \;=\; -2\cos\frac{1}{2}x + C$

29. $\int \cos 3x\, dx \;=\; \frac{1}{3}\int \cos 3x\cdot 3\, dx \;=\; \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C$

30. $\int \operatorname{sen}^2 x\cos x\, dx \;=\; \int \operatorname{sen}^2 x(\cos x\, dx) \;=\; \int \operatorname{sen}^2 x\, d(\operatorname{sen} x) \;=\; \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$

31. $\int \operatorname{tag} x\, dx \;=\; \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx \;=\; -\int \frac{-\operatorname{sen} x\, dx}{\cos x} \;=\; -\ln|\cos x| + C \;=\; \ln|\sec x| + C$

32. $\int \operatorname{tag} 2x\, dx \;=\; \frac{1}{2}\int \operatorname{tag} 2x\cdot 2\, dx \;=\; \frac{1}{2}\ln|\sec 2x| + C$

33. $\int x\cot x^2\, dx \;=\; \frac{1}{2}\int \cot x^2\cdot 2x\, dx \;=\; \frac{1}{2}\ln|\operatorname{sen} x^2| + C$

34. $\int \sec x\,dx = \int \frac{\sec x\,(\sec x + \operatorname{tag} x)}{\sec x + \operatorname{tag} x}\,dx = \int \frac{\sec x \operatorname{tag} x + \sec^2 x}{\sec x + \operatorname{tag} x}\,dx = \ln|\sec x + \operatorname{tag} x| + C$

35. $\int \sec\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\int \sec x^{1/2}\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2}\,dx = 2\ln|\sec\sqrt{x} + \operatorname{tag}\sqrt{x}| + C$

36. $\int \sec^2 2ax\,dx = \frac{1}{2a}\int \sec^2 2ax\cdot 2a\,dx = \frac{\operatorname{tag} 2ax}{2a} + C$

37. $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x}\,dx = \int (\operatorname{tag} x + 1)\,dx = \ln|\sec x| + x + C$

38. $\int \frac{\operatorname{sen} y\,dy}{\cos^2 y} = \int \operatorname{tag} y \sec y\,dy = \sec y + C$

39. $\int (1 + \operatorname{tag} x)^2\,dx = \int (1 + 2\operatorname{tag} x + \operatorname{tag}^2 x)\,dx = \int (\sec^2 x + 2\operatorname{tag} x)\,dx$

$= \operatorname{tag} x + 2\ln|\sec x| + C$

40. $\int e^x \cos e^x\,dx = \int \cos e^x\cdot e^x\,dx = \operatorname{sen} e^x + C$

41. $\int e^{3\cos 2x}\operatorname{sen} 2x\,dx = -\frac{1}{6}\int e^{3\cos 2x}(-6\operatorname{sen} 2x\,dx) = -\frac{e^{3\cos 2x}}{6} + C$

42. $\int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x}\,dx = \int \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int (\csc^2 x - \cot x \csc x)\,dx$

$= -\cot x + \csc x + C$

43. $\int (\operatorname{tag} 2x + \sec 2x)^2\,dx = \int (\operatorname{tag}^2 2x + 2\operatorname{tag} 2x \sec 2x + \sec^2 2x)\,dx$

$= \int (2\sec^2 2x + 2\operatorname{tag} 2x \sec 2x - 1)\,dx = \operatorname{tag} 2x + \sec 2x - x + C$

44. $\int \csc u\,du = \int \frac{du}{\operatorname{sen} u} = \int \frac{du}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}u\cos\frac{1}{2}u} = \int \frac{\sec^2\frac{1}{2}u\cdot\frac{1}{2}du}{\operatorname{tag}\frac{1}{2}u} = \ln|\operatorname{tag}\frac{1}{2}u| + C$

45. $\int (\sec 4x - 1)^2\,dx = \int (\sec^2 4x - 2\sec 4x + 1)\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{tag} 4x - \frac{1}{2}\ln|\sec 4x + \operatorname{tag} 4x| + x + C$

46. $\int \frac{\sec x \operatorname{tag} x\,dx}{a + b\sec x} = \frac{1}{b}\int \frac{\sec x \operatorname{tag} x\cdot b\,dx}{a + b\sec x} = \frac{1}{b}\ln|a + b\sec x| + C$

47. $\int \frac{dx}{\csc 2x - \cot 2x} = \int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{1 - \cos 2x} = \frac{1}{2}\int \frac{\operatorname{sen} 2x\cdot 2\,dx}{1 - \cos 2x} = \frac{1}{2}\ln(1 - \cos 2x) + C'$

$= \frac{1}{2}\ln(2\operatorname{sen}^2 x) + C' = \frac{1}{2}(\ln 2 + 2\ln|\operatorname{sen} x|) + C' = \ln|\operatorname{sen} x| + C$

FORMULAS 18-20

48. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x + C$

49. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tag} x + C$

50. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \operatorname{arc\,sec} x + C$

51. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{2} + C$

52. $\int \frac{dx}{9 + x^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tag}\frac{x}{3} + C$

53. $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - 16x^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{4\,dx}{\sqrt{5^2 - (4x)^2}} = \frac{1}{4}\operatorname{arc\,sen}\frac{4x}{5} + C$

54. $\int \frac{dx}{4x^2 + 9} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{(2x)^2 + 3^2} = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tag}\frac{2x}{3} + C$

55. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 - 9}} = \int \frac{2\,dx}{2x\sqrt{(2x)^2 - 3^2}} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,sec}\frac{2x}{3} + C$

56. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1 - x^6}} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{1 - (x^3)^2}} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,sen} x^3 + C$

57. $\int \frac{x\,dx}{x^4 + 3} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2)^2 + 3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tag}\frac{x^2}{\sqrt{3}} + C = \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arc\,tag}\frac{x^2\sqrt{3}}{3} + C$

58. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2\sqrt{(x^2)^2-1}} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sec} x^2 + C = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\frac{1}{x^2} + C$

59. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x+2)^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{x+2}{2} + C$

60. $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \operatorname{arc\,tag} e^x + C$

61. $\displaystyle\int \frac{3x^3-4x^2+3x}{x^2+1}dx = \int \left(3x-4+\frac{4}{x^2+1}\right)dx = \frac{3x^2}{2} - 4x + 4\operatorname{arc\,tag} x + C$

62. $\displaystyle\int \frac{\sec x \operatorname{tag} x\,dx}{9+4\sec^2 x} = \frac{1}{2}\int \frac{2\sec x \operatorname{tag} x\,dx}{3^2+(2\sec x)^2} = \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tag}\frac{2\sec x}{3} + C$

63. $\displaystyle\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + 3\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + 3\operatorname{arc\,sen} x + C$

64. $\displaystyle\int \frac{(2x-7)\,dx}{x^2+9} = \int \frac{2x\,dx}{x^2+9} - 7\int \frac{dx}{x^2+9} = \ln(x^2+9) - \frac{7}{3}\operatorname{arc\,tag}\frac{x}{3} + C$

65. $\displaystyle\int \frac{dy}{y^2+10y+30} = \int \frac{dy}{(y^2+10y+25)+5} = \int \frac{dy}{(y+5)^2+5} = \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arc\,tag}\frac{(y+5)\sqrt{5}}{5} + C$

66. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{36-(x^2-8x+16)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{36-(x-4)^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{x-4}{6} + C$

67. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+2x+5} = \int \frac{2\,dx}{4x^2+4x+10} = \int \frac{2\,dx}{(2x+1)^2+9} = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tag}\frac{2x+1}{3} + C$

68. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2-4x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-4)+6}{x^2-4x+8}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-4)\,dx}{x^2-4x+8} + 3\int \frac{dx}{x^2-4x+8}$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-4)\,dx}{x^2-4x+8} + 3\int \frac{dx}{(x-2)^2+4} = \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+8) + \frac{3}{2}\operatorname{arc\,tag}\frac{x-2}{2} + C$

El signo de valor absoluto no se precisa aquí, ya que $x^2 - 4x + 8 > 0$ para todos los valores de x.

69. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{28-12x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{64-(x^2+12x+36)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{64-(x+6)^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{x+6}{8} + C$

70. $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-6}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(-2x-4)-2}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx + \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x+2)^2}}$

$\displaystyle = -\sqrt{5-4x-x^2} + \operatorname{arc\,sen}\frac{x+2}{3} + C$

71. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{9x^2-12x+8}dx = \frac{1}{9}\int \frac{18x+27}{9x^2-12x+8}dx = \frac{1}{9}\int \frac{(18x-12)+39}{9x^2-12x+8}dx$

$\displaystyle = \frac{1}{9}\int \frac{18x-12}{9x^2-12x+8}dx + \frac{13}{3}\int \frac{dx}{(3x-2)^2+4}$

$\displaystyle = \frac{1}{9}\ln(9x^2-12x+8) + \frac{13}{18}\operatorname{arc\,tag}\frac{3x-2}{2} + C$

72. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x-4}{\sqrt{4x-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(-2x+4)-8}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

$\displaystyle = -\frac{1}{2}\int \frac{4-2x}{\sqrt{4x-x^2}}dx + 4\int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = -\sqrt{4x-x^2} + 4\operatorname{arc\,sen}\frac{x-2}{2} + C$

FORMULAS 21-24

73. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$

74. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

75. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

76. $\displaystyle\int \frac{dx}{9-x^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + C$

77. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$

78. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$

79. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+9}} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\sqrt{(2x)^2+3^2}} = \frac{1}{2}\ln(2x+\sqrt{4x^2+9}) + C$

80. $\displaystyle\int \frac{dz}{\sqrt{9z^2-25}} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,dz}{\sqrt{9z^2-25}} = \frac{1}{3}\ln|3z+\sqrt{9z^2-25}| + C$

81. $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2-16} = \frac{1}{3}\int \frac{3\,dx}{(3x)^2-16} = \frac{1}{24}\ln\left|\frac{3x-4}{3x+4}\right| + C$

82. $\displaystyle\int \frac{dy}{25-16y^2} = \frac{1}{4}\int \frac{4\,dy}{25-(4y)^2} = \frac{1}{40}\ln\left|\frac{5+4y}{5-4y}\right| + C$

83. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+6x+8} = \int \frac{dx}{(x+3)^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+3)-1}{(x+3)+1}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x+4}\right| + C$

84. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x-x^2} = \int \frac{dx}{4-(x-2)^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+(x-2)}{2-(x-2)}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4-x}\right| + C$

85. $\displaystyle\int \frac{ds}{\sqrt{4s+s^2}} = \int \frac{ds}{\sqrt{(s+2)^2-4}} = \ln|s+2+\sqrt{4s+s^2}| + C$

86. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+9}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2+9}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$
$\displaystyle = \sqrt{x^2+9} + 2\ln(x+\sqrt{x^2+9}) + C$

87. $\displaystyle\int \frac{2x-3}{4x^2-11}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{8x-12}{4x^2-11}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{8x\,dx}{4x^2-11} - \frac{3}{2}\int \frac{2\,dx}{4x^2-11}$
$\displaystyle = \frac{1}{4}\ln|4x^2-11| - \frac{3\sqrt{11}}{44}\ln\left|\frac{2x-\sqrt{11}}{2x+\sqrt{11}}\right| + C$

88. $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx + \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}}$
$\displaystyle = \sqrt{x^2+2x-3} + \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}| + C$

89. $\displaystyle\int \frac{2-x}{4x^2+4x-3}\,dx = -\frac{1}{8}\int \frac{8x-16}{4x^2+4x-3}\,dx = -\frac{1}{8}\int \frac{8x+4}{4x^2+4x-3}\,dx + \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(2x+1)^2-4}$
$\displaystyle = -\frac{1}{8}\ln|4x^2+4x-3| + \frac{5}{16}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+3}\right| + C$

FORMULAS 25-27

90. $\displaystyle\int \sqrt{25-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2}\,\text{arc sen}\,\frac{x}{5} + C$

91. $\displaystyle\int \sqrt{3-4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{3-4x^2}\cdot 2\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{2}\sqrt{3-4x^2} + \frac{3}{2}\,\text{arc sen}\,\frac{2x}{\sqrt{3}}\right) + C$
$\displaystyle = \frac{1}{2}x\sqrt{3-4x^2} + \frac{3}{4}\,\text{arc sen}\,\frac{2x\sqrt{3}}{3} + C$

92. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-36}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-36} - 18\ln|x+\sqrt{x^2-36}| + C$

93. $\int \sqrt{3x^2+5}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \sqrt{3x^2+5}\cdot\sqrt{3}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x\sqrt{3x^2+5} + \frac{5}{2}\ln(\sqrt{3}\,x + \sqrt{3x^2+5})\right] + C$

$= \frac{1}{2}x\sqrt{3x^2+5} + \frac{5\sqrt{3}}{6}\ln(\sqrt{3}\,x + \sqrt{3x^2+5}) + C$

94. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-(x+1)^2}\,dx = \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + 2\,\text{arc sen}\,\frac{x+1}{2} + C$

95. $\int \sqrt{4x^2-4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{(2x-1)^2+4}\cdot 2\,dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{2x-1}{2}\sqrt{4x^2-4x+5} + 2\ln(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+5})\right] + C$

$= \frac{2x-1}{4}\sqrt{4x^2-4x+5} + \ln(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+5}) + C$

Problemas propuestos

Comprobar las siguientes integraciones.

96. $\int (4x^3+3x^2+2x+5)\,dx = x^4+x^3+x^2+5x+C$

97. $\int (3-2x-x^4)\,dx = 3x - x^2 - x^5/5 + C$

98. $\int (2-3x+x^3)\,dx = 2x - 3x^2/2 + x^4/4 + C$

99. $\int (x^2-1)^2\,dx = x^5/5 - 2x^3/3 + x + C$

100. $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + 2/\sqrt{x})\,dx = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}x^2 + 4x^{1/2} + C$

101. $\int (a+x)^3\,dx = \frac{1}{4}(a+x)^4 + C$

102. $\int (x-2)^{3/2}\,dx = \frac{2}{5}(x-2)^{5/2} + C$

103. $\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2x^2} + C$

104. $\int \frac{dx}{(x-1)^3} = -\frac{1}{2(x-1)^2} + C$

105. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}} = 2\sqrt{x+3} + C$

106. $\int \sqrt{3x-1}\,dx = \frac{2}{9}(3x-1)^{3/2} + C$

107. $\int \sqrt{2-3x}\,dx = -\frac{2}{9}(2-3x)^{3/2} + C$

108. $\int (2x^2+3)^{1/3}x\,dx = \frac{3}{16}(2x^2+3)^{4/3} + C$

109. $\int (x-1)^2x\,dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

110. $\int (x^2-1)x\,dx = \frac{1}{4}(x^2-1)^2 + C$

111. $\int \sqrt{1+y^4}\,y^3\,dy = \frac{1}{6}(1+y^4)^{3/2} + C$

112. $\int (x^3+3)x^2\,dx = \frac{1}{6}(x^3+3)^2 + C$

113. $\int (4-x^2)^2x^2\,dx = \frac{16}{3}x^3 - \frac{8}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + C$

114. $\int \frac{dy}{(2-y)^3} = \frac{1}{2(2-y)^2} + C$

115. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+4)^3} = -\frac{1}{4(x^2+4)^2} + C$

116. $\int (1-x^3)^2\,dx = x - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{7}x^7 + C$

117. $\int (1-x^3)^2x\,dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{8}x^8 + C$

118. $\int (1-x^3)^2x^2\,dx = -\frac{1}{9}(1-x^3)^3 + C$

119. $\int (x^2-x)^4(2x-1)\,dx = \frac{1}{5}(x^2-x)^5 + C$

120. $\int \frac{3t\,dt}{\sqrt[3]{t^2+3}} = \frac{9}{4}(t^2+3)^{2/3} + C$

121. $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x-4}} = \sqrt{x^2+2x-4} + C$

122. $\int \frac{dx}{(a+bx)^{1/3}} = \frac{3}{2b}(a+bx)^{2/3} + C$

123. $\displaystyle\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{3}(1+\sqrt{x})^3 + C$

124. $\displaystyle\int \sqrt{x}\,(3-5x)\,dx = 2x^{3/2}(1-x) + C$

125. $\displaystyle\int \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{2}{3}x^{3/2} - 4x^{1/2} + C$

126. $\displaystyle\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C$

127. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+1} = \frac{1}{3}\ln|3x+1| + C$

128. $\displaystyle\int \frac{3x\,dx}{x^2+2} = \frac{3}{2}\ln(x^2+2) + C$

129. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{1-x^3} = -\frac{1}{3}\ln|1-x^3| + C$

130. $\displaystyle\int \frac{x-1}{x+1}\,dx = x - 2\ln|x+1| + C$

131. $\displaystyle\int \frac{x^2+2x+2}{x+2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x+2| + C$

132. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + C$

133. $\displaystyle\int\left(\frac{dx}{2x-1} - \frac{dx}{2x+1}\right) = \ln\sqrt{\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|} + C$

134. $\displaystyle\int a^{4x}\,dx = \frac{1}{4}\frac{a^{4x}}{\ln a} + C$

135. $\displaystyle\int e^{4x}\,dx = \tfrac{1}{4}e^{4x} + C$

136. $\displaystyle\int \frac{e^{1/x^2}}{x^3}\,dx = -\frac{1}{2}e^{1/x^2} + C$

137. $\displaystyle\int e^{-x^2+2}x\,dx = -\tfrac{1}{2}e^{-x^2+2} + C$

138. $\displaystyle\int x^2e^{x^3}\,dx = \tfrac{1}{3}e^{x^3} + C$

139. $\displaystyle\int (e^x+1)^2\,dx = \tfrac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C$

140. $\displaystyle\int (e^x - x^e)\,dx = e^x - \frac{x^{e+1}}{e+1} + C$

141. $\displaystyle\int (e^x+1)^2e^x\,dx = \tfrac{1}{3}(e^x+1)^3 + C$

142. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+3) + C$

143. $\displaystyle\int \left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2e^{2x}} + C$

144. $\displaystyle\int \frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx = \ln(e^x+1)^2 - x + C$

145. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+3}\,dx = \ln(e^{2x}+3)^{2/3} - \frac{1}{3}x + C$

146. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} = \ln\frac{C}{(1-\sqrt{x})^2},\quad C>0$

147. $\displaystyle\int \frac{dx}{x+x^{1/3}} = \frac{3}{2}\ln C(x^{2/3}+1),\quad C>0$

148. $\displaystyle\int \text{sen}\,2x\,dx = -\tfrac{1}{2}\cos 2x + C$

149. $\displaystyle\int \cos\tfrac{1}{2}x\,dx = 2\,\text{sen}\,\tfrac{1}{2}x + C$

150. $\displaystyle\int \sec 3x\,\text{tag}\,3x\,dx = \tfrac{1}{3}\,\text{tag}\,3x + C$

151. $\displaystyle\int \csc^2 2x\,dx = -\tfrac{1}{2}\cot 2x + C$

152. $\displaystyle\int x\sec^2 x^2\,dx = \tfrac{1}{2}\,\text{tag}\,x^2 + C$

153. $\displaystyle\int \text{tag}^2\,x\,dx = \text{tag}\,x - x + C$

154. $\displaystyle\int \text{tag}\,\tfrac{1}{2}x\,dx = 2\ln|\sec\tfrac{1}{2}x| + C$

155. $\displaystyle\int \csc 3x\,dx = \tfrac{1}{3}\ln|\csc 3x - \cot 3x| + C$

156. $\displaystyle\int b\sec ax\,\text{tag}\,ax\,dx = \frac{b}{a}\sec ax + C$

157. $\displaystyle\int (\cos x - \text{sen}\,x)^2\,dx = x + \tfrac{1}{2}\cos 2x + C$

158. $\displaystyle\int \text{sen}\,ax\cos ax\,dx = \frac{1}{2a}\text{sen}^2\,ax + C$

$\displaystyle\qquad = -\frac{1}{2a}\cos^2 ax + C' = -\frac{1}{4a}\cos 2ax + K$

159. $\displaystyle\int \text{sen}^3\,x\cos x\,dx = \tfrac{1}{4}\,\text{sen}^4\,x + C$

160. $\displaystyle\int \cos^4 x\,\text{sen}\,x\,dx = -\tfrac{1}{5}\cos^5 x + C$

161. $\displaystyle\int \text{tag}^5\,x\sec^2 x\,dx = \tfrac{1}{6}\,\text{tag}^6\,x + C$

162. $\displaystyle\int \cot^4 3x\csc^2 3x\,dx = -\tfrac{1}{15}\cot^5 3x + C$

163. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\text{sen}\,\frac{1}{2}x} = 2(\text{tag}\,\tfrac{1}{2}x + \sec\tfrac{1}{2}x) + C$

164. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos 3x} = \frac{1-\cos 3x}{3\,\text{sen}\,3x} + C$

165. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sec ax} = x + \frac{1}{a}(\cot ax - \csc ax) + C$

166. $\displaystyle\int \sec^2\frac{x}{a}\,\text{tag}\,\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}a\,\text{tag}^2\,\frac{x}{a} + C$

167. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 3x}{\text{tag}\,3x}\,dx = \frac{1}{3}\ln|\text{tag}\,3x| + C$

168. $\displaystyle\int \frac{\sec^5 x}{\csc x}\,dx = \frac{1}{4}\sec^4 x + C$

169. $\displaystyle\int e^{\operatorname{tag} 2x} \sec^2 2x\, dx \;=\; \tfrac{1}{2} e^{\operatorname{tag} 2x} + C$

170. $\displaystyle\int e^{2 \operatorname{sen} 3x} \cos 3x\, dx \;=\; \tfrac{1}{6} e^{2 \operatorname{sen} 3x} + C$

171. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} \;=\; \operatorname{arc\,sen} \frac{x\sqrt{5}}{5} + C$

172. $\displaystyle\int \frac{dx}{5+x^2} \;=\; \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arc\,tag} \frac{x\sqrt{5}}{5} + C$

173. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-5}} \;=\; \frac{\sqrt{5}}{5} \operatorname{arc\,sec} \frac{x\sqrt{5}}{5} + C$

174. $\displaystyle\int \frac{e^x\, dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} \;=\; \operatorname{arc\,sen} e^x + C$

175. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}\, dx}{1+e^{4x}} \;=\; \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tag} e^{2x} + C$

176. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} \;=\; \frac{1}{3} \operatorname{arc\,sen} \frac{3x}{2} + C$

177. $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+4} \;=\; \frac{1}{6} \operatorname{arc\,tag} \frac{3x}{2} + C$

178. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} 8x}{9 + \operatorname{sen} 4x}\, dx \;=\; \frac{1}{12} \operatorname{arc\,tag} \frac{\operatorname{sen}^2 4x}{3} + C$

179. $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{1-4 \operatorname{tag}^2 x}} \;=\; \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} (2 \operatorname{tag} x) + C$

180. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4-9 \ln^2 x}} \;=\; \frac{1}{3} \operatorname{arc\,sen} \ln x^{3/2} + C$

181. $\displaystyle\int \frac{2x^4-x^2}{2x^2+1}\, dx \;=\; \frac{1}{3} x^3 - x + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arc\,tag} x\sqrt{2} + C$

182. $\displaystyle\int \frac{\cos 2x\, dx}{\operatorname{sen}^2 2x + 8} \;=\; \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arc\,tag} \frac{\operatorname{sen} 2x}{2\sqrt{2}} + C$

183. $\displaystyle\int \frac{(2x-3)\, dx}{x^2+6x+13} \;=\; \int \frac{(2x+6)\, dx}{x^2+6x+13} - 9 \int \frac{dx}{x^2+6x+13} \;=\; \ln (x^2+6x+13) - \frac{9}{2} \operatorname{arc\,tag} \frac{x+3}{2} + C$

184. $\displaystyle\int \frac{(x-1)\, dx}{3x^2-4x+3} \;=\; \frac{1}{6} \int \frac{(6x-4)\, dx}{3x^2-4x+3} - \int \frac{dx}{9x^2-12x+9} \;=\; \frac{1}{6} \ln (3x^2-4x+3) - \frac{\sqrt{5}}{15} \operatorname{arc\,tag} \frac{3x-2}{\sqrt{5}} + C$

185. $\displaystyle\int \frac{x\, dx}{\sqrt{27+6x-x^2}} \;=\; -\sqrt{27+6x-x^2} + 3 \operatorname{arc\,sen} \frac{x-3}{6} + C$

186. $\displaystyle\int \frac{(5-4x)\, dx}{\sqrt{12x-4x^2-8}} \;=\; \sqrt{12x-4x^2-8} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} (2x-3) + C$

187. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4} \;=\; \frac{1}{4} \ln \left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$

188. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2-9} \;=\; \frac{1}{12} \ln \left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + C$

189. $\displaystyle\int \frac{dx}{9-x^2} \;=\; \frac{1}{6} \ln \left|\frac{x+3}{x-3}\right| + C$

190. $\displaystyle\int \frac{dx}{25-9x^2} \;=\; \frac{1}{30} \ln \left|\frac{3x+5}{3x-5}\right| + C$

191. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} \;=\; \ln (x + \sqrt{x^2+4}\,) + C$

192. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-25}} \;=\; \frac{1}{2} \ln |\, 2x + \sqrt{4x^2-25}\,| + C$

193. $\displaystyle\int \sqrt{16-9x^2}\, dx \;=\; \frac{1}{2} x\sqrt{16-9x^2} + \frac{8}{3} \operatorname{arc\,sen} \frac{3x}{4} + C$

194. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-16}\, dx \;=\; \tfrac{1}{2} x\sqrt{x^2-16} - 8 \ln |\, x + \sqrt{x^2-16}\,| + C$

195. $\displaystyle\int \sqrt{4x^2+9}\, dx \;=\; \tfrac{1}{2} x\sqrt{4x^2+9} + \tfrac{9}{4} \ln (2x + \sqrt{4x^2+9}\,) + C$

196. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x-3}\, dx \;=\; \tfrac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-3} - 2 \ln |\, x-1+\sqrt{x^2-2x-3}\,| + C$

197. $\displaystyle\int \sqrt{12+4x-x^2}\, dx \;=\; \tfrac{1}{2}(x-2)\sqrt{12+4x-x^2} + 8 \operatorname{arc\,sen} \tfrac{1}{4}(x-2) + C$

198. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x}\, dx \;=\; \tfrac{1}{2}(x+2)\sqrt{x^2+4x} - 2 \ln |\, x+2+\sqrt{x^2+4x}\,| + C$

199. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-8x}\, dx \;=\; \tfrac{1}{2}(x-4)\sqrt{x^2-8x} - 8 \ln |\, x-4+\sqrt{x^2-8x}\,| + C$

200. $\displaystyle\int \sqrt{6x-x^2}\, dx \;=\; \frac{1}{2}(x-3)\sqrt{6x-x^2} + \frac{9}{2} \operatorname{arc\,sen} \frac{x-3}{3} + C$

Capítulo 26

Integración por partes

INTEGRACION POR PARTES. Sean u y v funciones derivables de x. En estas condiciones,

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$
$$u\,dv = d(uv) - v\,du$$

(i) $$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Para aplicar (i) en la práctica, se separa el integrando en dos partes; una de ellas se iguala a u y la otra, junto con dx, a dv. (Por esta razón, este método se denomina *integración por partes.*) Es conveniente tener en cuenta los dos criterios siguientes:

(*a*) La parte que se iguala a dv debe ser fácilmente integrable.

(*b*) $\int v\,du$ no debe ser más complicada que $\int u\,dv$.

Ejemplo 1: Calcular $\int x^3 e^{x^2}\,dx$.

Hacemos $u = x^2$ y $dv = e^{x^2} x\,dx$; de donde $du = 2x\,dx$ y $v = \frac{1}{2}e^{x^2}$. Aplicando la fórmula

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int x\,e^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \tfrac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Ejemplo 2: Calcular $\int \ln(x^2+2)\,dx$.

Hacemos $u = \ln(x^2+2)$ y $dv = dx$; de donde $du = \dfrac{2x\,dx}{x^2+2}$ y $v = x$. Por tanto,

$$\int \ln(x^2+2)\,dx = x\ln(x^2+2) - \int \frac{2x^2\,dx}{x^2+2} = x\ln(x^2+2) - \int\left(2 - \frac{4}{x^2+2}\right)dx$$
$$= x\ln(x^2+2) - 2x + 2\sqrt{2}\,\text{arc tag}\,x/\sqrt{2} + C$$

(Ver Problemas 1-10.)

FORMULAS DE REDUCCION. Las *fórmulas de reducción* permiten simplificar el cálculo cuando se haya de aplicar la integración por partes varias veces consecutivas. (Ver Problema 9.) En general, una fórmula de reducción es aquella que da lugar a una nueva integral de la misma forma que la original, pero con un exponente mayor o menor. Una fórmula de reducción es útil si, finalmente, conduce a una integral que se pueda calcular fácilmente. Algunas de las fórmulas más corrientes de reducción son:

(A) $$\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^m} = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{u}{(2m-2)(a^2 \pm u^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^{m-1}}\right\}, \quad m \neq 1$$

(B) $$\int (a^2 \pm u^2)^m\,du = \frac{u(a^2 \pm u^2)^m}{2m+1} + \frac{2ma^2}{2m+1}\int (a^2 \pm u^2)^{m-1}\,du, \quad m \neq -1/2$$

(C) $$\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^m} = -\frac{1}{a^2}\left\{\frac{u}{(2m-2)(u^2 - a^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int \frac{du}{(u^2 - a^2)^{m-1}}\right\}, \quad m \neq 1$$

(D) $$\int (u^2 - a^2)^m\,du = \frac{u(u^2 - a^2)^m}{2m+1} - \frac{2ma^2}{2m+1}\int (u^2 - a^2)^{m-1}\,du, \quad m \neq -1/2$$

(E) $$\int u^m e^{au}\,du = \frac{1}{a}u^m e^{au} - \frac{m}{a}\int u^{m-1} e^{au}\,du$$

(F) $$\int \operatorname{sen}^m u\,du = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} u \cos u}{m} + \frac{m-1}{m}\int \operatorname{sen}^{m-2} u\,du$$

(G) $$\int \cos^m u\,du = \frac{\cos^{m-1} u \operatorname{sen} u}{m} + \frac{m-1}{m}\int \cos^{m-2} u\,du$$

(H) $$\int \operatorname{sen}^m u \cos^n u\,du = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} u \cos^{n-1} u}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^m u \cos^{n-2} u\,du$$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} u \cos^{n+1} u}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \operatorname{sen}^{m-2} u \cos^n u\,du\,, \quad m \neq -n$$

(I) $$\int u^m \operatorname{sen} bu\,du = -\frac{u^m}{b}\cos bu + \frac{m}{b}\int u^{m-1}\cos bu\,du$$

(J) $$\int u^m \cos bu\,du = \frac{u^m}{b}\operatorname{sen} bu - \frac{m}{b}\int u^{m-1}\operatorname{sen} bu\,du$$

(Ver Problema 11.)

Problemas resueltos

1. Calcular $\int x \operatorname{sen} x\,dx$.

Podemos seguir los siguientes caminos:

(*a*) $u = x \operatorname{sen} x,\ dv = dx$; (*b*) $u = \operatorname{sen} x,\ dv = x\,dx$; (*c*) $u = x,\ dv = \operatorname{sen} x\,dx$.

(*a*) $u = x \operatorname{sen} x,\ dv = dx$. Por tanto $du = (\operatorname{sen} x + x\cos x)\,dx,\ v = x$, y

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = x \cdot x \operatorname{sen} x - \int x(\operatorname{sen} x + x\cos x)\,dx$$

La integral que resulta es menos sencilla que la original por la cual se descarta este camino.

(*b*) $u = \operatorname{sen} x,\ dv = x\,dx$. Por tanto $du = \cos x\,dx,\ v = \frac{1}{2}x^2$, y

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 \operatorname{sen} x - \int \tfrac{1}{2}x^2 \cos x\,dx$$

La integral que resulta es menos sencilla que la original y también descartamos este camino.

(*c*) $u = x,\ dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Por tanto $du = dx,\ v = -\cos x$, y

$$\int x \operatorname{sen} x\,dx = -x\cos x - \int -\cos x\,dx = -x\cos x + \operatorname{sen} x + C$$

2. Calcular $\int xe^x\,dx$.

Sea $u = x,\ dv = e^x\,dx$. Entonces, $du = dx,\ v = e^x$, y

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

3. Calcular $\int x^2 \ln x\,dx$.

Sea $u = \ln x,\ dv = x^2\,dx$. Por tanto, $du = \dfrac{dx}{x},\ v = \dfrac{x^3}{3}$, y

$$\int x^2 \ln x\,dx \quad \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

4. Calcular $\int x\sqrt{1+x}\,dx$.

Haciendo $u = x,\ dv = \sqrt{1+x}\,dx$. Tendremos $du = dx,\ v = \frac{2}{3}(1+x)^{3/2}$, y

$$\int x\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{2}{3}\int (1+x)^{3/2}\,dx = \frac{2}{3}x(1+x)^{3/2} - \frac{4}{15}(1+x)^{5/2} + C$$

5. Calcular $\int \text{arc sen}\, x\, dx$.

Haciendo $u = \text{arc sen}\, x$, $dv = dx$. Tendremos $du = dx/\sqrt{1-x^2}$, $v = x$, y

$$\int \text{arc sen}\, x\, dx \;=\; x \text{ arc sen}\, x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} \;=\; x \text{ arc sen}\, x + \sqrt{1-x^2} + C$$

6. Calcular $\int \text{sen}^2 x\, dx$.

Haciendo $u = \text{sen}\, x$, $dv = \text{sen}\, x\, dx$. Tendremos $du = \cos x\, dx$, $v = -\cos x$, y

$$\int \text{sen}^2 x\, dx \;=\; -\text{sen}\, x \cos x + \int \cos^2 x\, dx$$

$$= \; -\text{sen}\, x \cos x + \int (1 - \text{sen}^2 x)\, dx \;=\; -\tfrac{1}{2}\text{sen}\, 2x + \int dx - \int \text{sen}^2 x\, dx$$

Pasando al primer miembro la integral del segundo,

$$2\int \text{sen}^2 x\, dx \;=\; -\tfrac{1}{2}\text{sen}\, 2x + x + C' \qquad \text{y} \qquad \int \text{sen}^2 x\, dx \;=\; \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\text{sen}\, 2x + C$$

7. Calcular $\int \sec^3 x\, dx$.

Haciendo $u = \sec x$, $dv = \sec^2 x\, dx$. Tendremos $du = \sec x \text{ tag}\, x\, dx$, $v = \text{tag}\, x$, y

$$\int \sec^3 x\, dx \;=\; \sec x \text{ tag}\, x - \int \sec x \text{ tag}^2 x\, dx \;=\; \sec x \text{ tag}\, x - \int \sec x(\sec^2 x - 1)\, dx$$

$$= \; \sec x \text{ tag}\, x - \int \sec^3 x\, dx + \int \sec x\, dx$$

Por tanto $\quad 2\int \sec^3 x\, dx \;=\; \sec x \text{ tag}\, x + \int \sec x\, dx \;=\; \sec x \text{ tag}\, x + \ln|\sec x + \text{tag}\, x| + C'$

y $\quad \int \sec^3 x\, dx \;=\; \tfrac{1}{2}\{\sec x \text{ tag}\, x + \ln|\sec x + \text{tag}\, x|\} + C$

8. Calcular $\int x^2 \text{sen}\, x\, dx$.

Haciendo $u = x^2$, $dv = \text{sen}\, x\, dx$. Tendremos $du = 2x\, dx$, $v = -\cos x$, y

$$\int x^2 \text{sen}\, x\, dx \;=\; -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\, dx$$

Haciendo en la integral resultante $u = x$ y $dv = \cos x\, dx$. Tendremos $du = dx$, $v = \text{sen}\, x$, y

$$\int x^2 \text{sen}\, x\, dx \;=\; -x^2 \cos x + 2\,\{x \text{ sen}\, x - \int \text{sen}\, x\, dx\}$$

$$= \; -x^2 \cos x + 2x \text{ sen}\, x + 2\cos x + C$$

9. Calcular $\int x^3 e^{2x}\, dx$.

Haciendo $u = x^3$, $dv = e^{2x}\, dx$. Tendremos $du = 3x^2\, dx$, $v = \tfrac{1}{2}e^{2x}$, y

$$\int x^3 e^{2x}\, dx \;=\; \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}\int x^2 e^{2x}\, dx$$

Haciendo en la integral resultante $u = x^2$ y $dv = e^{2x}\, dx$. Tendremos $du = 2x\, dx$, $v = \tfrac{1}{2}e^{2x}$, y

$$\int x^3 e^{2x}\, dx \;=\; \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \int x e^{2x}\, dx\right\} \;=\; \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{2}\int x e^{2x}\, dx$$

Haciendo en la integral resultante $u = x$ y $dv = e^{2x}\, dx$. Tendremos $du = dx$, $v = \tfrac{1}{2}e^{2x}$, y

$$\int x^3 e^{2x}\, dx \;=\; \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx\right\}$$

$$= \; \frac{1}{2}x^3 e^{2x} - \frac{3}{4}x^2 e^{2x} + \frac{3}{4}x e^{2x} - \frac{3}{8}e^{2x} + C$$

10. (*a*) Haciendo $= x$, $dv = \dfrac{x\, dx}{(a^2 \pm x^2)^m}$; Tendremos $du = dx$, $v = \dfrac{\mp 1}{(2m-2)(a^2 \pm x^2)^{m-1}}$, y

$$\int \frac{x^2\, dx}{(a^2 \pm x^2)^m} \;=\; \frac{\mp x}{(2m-2)(a^2 \pm x^2)^{m-1}} \pm \frac{1}{2m-2}\int \frac{dx}{(a^2 \pm x^2)^{m-1}}$$

(*b*) Haciendo $u = x$, $dv = x(a^2 \pm x^2)^{m-1}\, dx$; Tendremos $du = dx$, $v = \dfrac{\pm 1}{2m}(a^2 \pm x^2)^m$, y

$$\int x^2 (a^2 \pm x^2)^{m-1}\, dx \;=\; \frac{\pm x}{2m}(a^2 \pm x^2)^m \mp \frac{1}{2m}\int (a^2 \pm x^2)^m\, dx$$

11. Hallar: (*a*) $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^{5/2}}$, (*b*) $\displaystyle\int (9+x^2)^{3/2}\,dx$.

(*a*) Como la fórmula de reducción (A) reduce a una unidad el exponente del denominador, aplicándola dos veces resulta:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^{5/2}} = \frac{x}{3(1+x^2)^{3/2}} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{3(1+x^2)^{3/2}} + \frac{2}{3}\,\frac{x}{(1+x^2)^{1/2}} + C$$

(*b*) Aplicando la fórmula de reducción (B),

$$\begin{aligned}\int (9+x^2)^{3/2}\,dx &= \frac{1}{4}x(9+x^2)^{3/2} + \frac{27}{4}\int (9+x^2)^{1/2}\,dx\\ &= \frac{1}{4}x(9+x^2)^{3/2} + \frac{27}{8}\{x(9+x^2)^{1/2} + 9\ln(x+\sqrt{9+x^2})\} + C\end{aligned}$$

Problemas propuestos

12. $\displaystyle\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + C$

13. $\displaystyle\int x\sec^2 3x\,dx = \frac{x}{3}\operatorname{tag} 3x - \frac{1}{9}\ln|\sec 3x| + C$

14. $\displaystyle\int \operatorname{arc}\cos 2x\,dx = x\operatorname{arc}\cos 2x - \tfrac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$

15. $\displaystyle\int \operatorname{arc}\operatorname{tag} x\,dx = x\operatorname{arc}\operatorname{tag} x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$

16. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x}\,dx = -\tfrac{2}{105}(1-x)^{3/2}(15x^2+12x+8) + C$

17. $\displaystyle\int \frac{xe^x\,dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} + C$

18. $\displaystyle\int x\operatorname{arc}\operatorname{tag} x\,dx = \tfrac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arc}\operatorname{tag} x - \tfrac{1}{2}x + C$

19. $\displaystyle\int x^2e^{-3x}\,dx = -\tfrac{1}{3}e^{-3x}(x^2+\tfrac{2}{3}x+\tfrac{2}{9}) + C$

20. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = -\tfrac{2}{3}\cos^3 x - \operatorname{sen}^2 x\cos x + C$

21. $\displaystyle\int x^3\operatorname{sen} x\,dx = -x^3\cos x + 3x^2\operatorname{sen} x + 6x\cos x - 6\operatorname{sen} x + C$

22. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(bx-2a)\sqrt{a+bx}}{3b^2} + C$

23. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x}} = \frac{2}{15}(3x^2-4x+8)\sqrt{1+x} + C$

24. $\displaystyle\int x\operatorname{arc}\operatorname{sen} x^2\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\operatorname{arc}\operatorname{sen} x^2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + C$

25. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\operatorname{sen} 3x\,dx = \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 3x\cos x - \tfrac{3}{8}\operatorname{sen} x\cos 3x + C$

26. $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx = \tfrac{1}{2}x(\operatorname{sen}\ln x - \cos\ln x) + C$

27. $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(b\operatorname{sen} bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + C$

28. $\displaystyle\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C$

29. (*a*) Poniendo $\displaystyle\int \frac{a^2\,dx}{(a^2\pm x^2)^m} = \int \frac{(a^2\pm x^2)\mp x^2}{(a^2\pm x^2)^m}\,dx = \int \frac{dx}{(a^2\pm x^2)^{m-1}} \mp \int \frac{x^2\,dx}{(a^2\pm x^2)^m}$ y aplicando el resultado del Problema 10 (*a*) deducir la fórmula de reducción (A).

(*b*) Poniendo $\displaystyle\int (a^2\pm x^2)^m\,dx = a^2\int (a^2\pm x^2)^{m-1}\,dx \pm \int x^2(a^2\pm x^2)^{m-1}\,dx$ y aplicando el resultado del Problema 10 (*b*) deducir la fórmula de reducción (B).

30. Deducir las fórmulas de reducción (C)-(J).

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)^3} = \frac{x(5-3x^2)}{8(1-x^2)^2} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{4(4+x^2)^{1/2}} + C$

33. $\displaystyle\int (4-x^2)^{3/2}\,dx = \tfrac{1}{4}x(10-x^2)\sqrt{4-x^2} + 6 \operatorname{arc sen} \tfrac{1}{2}x + C$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-16)^3} = \frac{1}{2048}\left\{\frac{x(3x^2-80)}{(x^2-16)^2} + \frac{3}{8}\ln\left|\frac{x-4}{x+4}\right|\right\} + C$

35. $\displaystyle\int (x^2-1)^{5/2}\,dx = \tfrac{1}{48}x(8x^4-26x^2+33)\sqrt{x^2-1} - \tfrac{5}{16}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C$

36. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\,dx = \tfrac{3}{8}x - \tfrac{3}{8}\operatorname{sen} x\cos x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen}^3 x\cos x + C$

37. $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx = \tfrac{1}{15}(3\cos^4 x + 4\cos^2 x + 8)\operatorname{sen} x + C$

38. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\cos^2 x\,dx = -\tfrac{1}{5}\cos^3 x\,(\operatorname{sen}^2 x + \tfrac{2}{3}) + C$

39. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 x\cos^5 x\,dx = \tfrac{1}{9}\operatorname{sen}^5 x\,(\cos^4 x + \tfrac{4}{7}\cos^2 x + \tfrac{8}{35}) + C$

Otro procedimiento útil en los casos más complejos y laboriosos de esta sección, resulta al considerar que en (ver Problema 9)

(i) $$\int x^3e^{2x}\,dx = \tfrac{1}{2}x^3e^{2x} - \tfrac{3}{4}x^2e^{2x} + \tfrac{3}{4}xe^{2x} - \tfrac{3}{8}e^{2x} + C$$

los términos del segundo miembro, sin tener en cuenta los coeficientes, se obtienen al derivar sucesivamente el integrando x^3e^{2x}. Así pues,

(ii) $$\int x^3e^{2x}\,dx = Ax^3e^{2x} + Bx^2e^{2x} + Dxe^{2x} + Ee^{2x} + C$$

y derivando

$$x^3e^{2x} = 2Ax^3e^{2x} + (3A+2B)x^2e^{2x} + (2B+2D)xe^{2x} + (D+2E)e^{2x}$$

Identificando coeficientes, tendremos

$$2A = 1,\quad 3A+2B = 0,\quad 2B+2D = 0,\quad D+2E = 0$$

De donde $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{3}{2}A = -\frac{3}{4}$, $D = -B = \frac{3}{4}$, $E = -\frac{1}{2}D = -\frac{3}{8}$. Sustituyendo A, B, D, E en (ii), obtenemos (i).

Este método se puede aplicar en el cálculo de $\int f(x)\,dx$ siempre que al derivar repetidamente $f(x)$ se obtenga un número finito de términos diferentes.

40. Calcular $\int e^{2x}\cos 3x\,dx = {}^1/_{13}e^{2x}(3\operatorname{sen} 3x + 2\cos 3x) + C$ haciendo

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = Ae^{2x}\operatorname{sen} 3x + Be^{2x}\cos 3x + C$$

41. Calcular $\int e^{3x}(2\operatorname{sen} 4x - 5\cos 4x)\,dx = {}^1/_{25}\,e^{3x}(-14\operatorname{sen} 4x - 23\cos 4x) + C$ haciendo

$$\int e^{3x}(2\operatorname{sen} 4x - 5\cos 4x)\,dx = Ae^{3x}\operatorname{sen} 4x + Be^{3x}\cos 4x + C$$

42. Calcular $\int \operatorname{sen} 3x\cos 2x\,dx = -{}^1/_5(2\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} 2x + 3\cos 3x\cos 2x) + C$ haciendo

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 3x\cos 2x\,dx = {} & A\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} 2x + B\cos 3x\cos 2x \\ & + D\cos 3x\operatorname{sen} 2x + E\operatorname{sen} 3x\cos 2x + C\end{aligned}$$

43. Calcular $\int e^{3x}x^2\operatorname{sen} x\,dx = \dfrac{e^{3x}}{250}[25x^2(3\operatorname{sen} x - \cos x) - 10x(4\operatorname{sen} x - 3\cos x) + 9\operatorname{sen} x - 13\cos x] + C$

Capítulo 27

Integrales trigonométricas

LAS IDENTIDADES que se utilizan en la resolución de las integrales trigonométricas de este capítulo son las siguientes:

1. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $1 + \operatorname{tag}^2 x = \sec^2 x$
3. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
4. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
5. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
6. $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$
7. $\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)]$
8. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$
9. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$
10. $1 - \cos x = 2\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x$
11. $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{1}{2}x$
12. $1 \pm \operatorname{sen} x = 1 \pm \cos(\frac{1}{2}\pi - x)$

Problemas resueltos

SENOS Y COSENOS

1. $$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = \int \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)\,dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C$$

2. $$\int \cos^2 3x\,dx = \int \tfrac{1}{2}(1 + \cos 6x)\,dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{12}\operatorname{sen} 6x + C$$

3. $$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x\,dx = \int (1 - \cos^2 x)\operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + \tfrac{1}{3}\cos^3 x + C$$

4. $$\begin{aligned}\int \cos^5 x\,dx &= \int \cos^4 x \cos x\,dx = \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x\,dx \\ &= \int \cos x\,dx - 2\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx + \int \operatorname{sen}^4 x \cos x\,dx \\ &= \operatorname{sen} x - \tfrac{2}{3}\operatorname{sen}^3 x + \tfrac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C\end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \cos x\,dx = \int \operatorname{sen}^2 x(1 - \operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx \\ &= \int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx - \int \operatorname{sen}^4 x \cos x\,dx = \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \tfrac{1}{5}\operatorname{sen}^5 x + C\end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned}\int \cos^4 2x \operatorname{sen}^3 2x\,dx &= \int \cos^4 2x \operatorname{sen}^2 2x \operatorname{sen} 2x\,dx = \int \cos^4 2x(1 - \cos^2 2x)\operatorname{sen} 2x\,dx \\ &= \int \cos^4 2x \operatorname{sen} 2x\,dx - \int \cos^6 2x \operatorname{sen} 2x\,dx = -\tfrac{1}{10}\cos^5 2x + \tfrac{1}{14}\cos^7 2x + C\end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 3x \cos^5 3x\,dx &= \int (1 - \cos^2 3x)\cos^5 3x \operatorname{sen} 3x\,dx \\ &= \int \cos^5 3x \operatorname{sen} 3x\,dx - \int \cos^7 3x \operatorname{sen} 3x\,dx = -\tfrac{1}{18}\cos^6 3x + \tfrac{1}{24}\cos^8 3x + C\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 3x \cos^5 3x\,dx &= \int \operatorname{sen}^3 3x(1 - \operatorname{sen}^2 3x)^2 \cos 3x\,dx \\ &= \int \operatorname{sen}^3 3x \cos 3x\,dx - 2\int \operatorname{sen}^5 3x \cos 3x\,dx + \int \operatorname{sen}^7 3x \cos 3x\,dx \\ &= \tfrac{1}{12}\operatorname{sen}^4 3x - \tfrac{1}{9}\operatorname{sen}^6 3x + \tfrac{1}{24}\operatorname{sen}^8 3x + C\end{aligned}$$

8. $\int \cos^3 \frac{x}{3}\, dx = \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{3}\right) \cos \frac{x}{3}\, dx = 3 \operatorname{sen} \frac{x}{3} - \operatorname{sen}^3 \frac{x}{3} + C$

9. $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 x)^2\, dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2\, dx$

$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x\, dx$

$= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x)\, dx$

$= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C = \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C$

10. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\, dx = \frac{1}{4} \int \operatorname{sen}^2 2x\, dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x)\, dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C$

11. $\int \operatorname{sen}^4 3x \cos^2 3x\, dx = \int (\operatorname{sen}^2 3x \cos^2 3x) \operatorname{sen}^2 3x\, dx = \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2 6x\,(1 - \cos 6x)\, dx$

$= \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2 6x\, dx - \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2 6x \cos 6x\, dx$

$= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 12x)\, dx - \frac{1}{8} \int \operatorname{sen}^2 6x \cos 6x\, dx$

$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{192} \operatorname{sen} 12x - \frac{1}{144} \operatorname{sen}^3 6x + C$

12. $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x\, dx = \int \frac{1}{2} \{\cos(3x - 2x) - \cos(3x + 2x)\}\, dx = \frac{1}{2} \int (\cos x - \cos 5x)\, dx$

$= \frac{1}{2} \operatorname{sen} x - \frac{1}{10} \operatorname{sen} 5x + C$

13. $\int \operatorname{sen} 3x \cos 5x\, dx = \int \frac{1}{2} \{\operatorname{sen}(3x - 5x) + \operatorname{sen}(3x + 5x)\}\, dx = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C$

14. $\int \cos 4x \cos 2x\, dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x + \cos 6x)\, dx = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{12} \operatorname{sen} 6x + C$

15. $\int \sqrt{1 - \cos x}\, dx = \sqrt{2} \int \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} x\, dx = -2\sqrt{2} \cos \tfrac{1}{2} x + C$

16. $\int (1 + \cos 3x)^{3/2}\, dx = 2\sqrt{2} \int \cos^3 \tfrac{3}{2} x\, dx = 2\sqrt{2} \int (1 - \operatorname{sen}^2 \tfrac{3}{2} x) \cos \tfrac{3}{2} x\, dx$

$= 2\sqrt{2} \left(\tfrac{2}{3} \operatorname{sen} \tfrac{3}{2} x - \tfrac{2}{9} \operatorname{sen}^3 \tfrac{3}{2} x\right) + C$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} 2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \cos(\frac{1}{2}\pi - 2x)}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{dx}{\operatorname{sen}(\frac{1}{4}\pi - x)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \csc(\tfrac{1}{4}\pi - x)\, dx$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \ln |\csc(\tfrac{1}{4}\pi - x) - \cot(\tfrac{1}{4}\pi - x)| + C$

TANGENTES, SECANTES, COTANGENTES, COSECANTES

18. $\int \operatorname{tag}^4 x\, dx = \int \operatorname{tag}^2 x \operatorname{tag}^2 x\, dx = \int \operatorname{tag}^2 x (\sec^2 x - 1)\, dx = \int \operatorname{tag}^2 x \sec^2 x\, dx - \int \operatorname{tag}^2 x\, dx$

$= \int \operatorname{tag}^2 x \sec^2 x\, dx - \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \tfrac{1}{3} \operatorname{tag}^3 x - \operatorname{tag} x + x + C$

19. $\int \operatorname{tag}^5 x\, dx = \int \operatorname{tag}^3 x \operatorname{tag}^2 x\, dx = \int \operatorname{tag}^3 x (\sec^2 x - 1)\, dx$

$= \int \operatorname{tag}^3 x \sec^2 x\, dx - \int \operatorname{tag}^3 x\, dx = \int \operatorname{tag}^3 x \sec^2 x\, dx - \int \operatorname{tag} x (\sec^2 x - 1)\, dx$

$= \tfrac{1}{4} \operatorname{tag}^4 x - \tfrac{1}{2} \operatorname{tag}^2 x + \ln|\sec x| + C$

20. $\int \sec^4 2x\, dx = \int \sec^2 2x \sec^2 2x\, dx = \int \sec^2 2x\,(1 + \operatorname{tag}^2 2x)\, dx$

$= \int \sec^2 2x\, dx + \int \operatorname{tag}^2 2x \sec^2 2x\, dx = \tfrac{1}{2} \operatorname{tag} 2x + \tfrac{1}{6} \operatorname{tag}^3 2x + C$

21. $\int \operatorname{tag}^3 3x \sec^4 3x\, dx = \int \operatorname{tag}^3 3x\,(1 + \operatorname{tag}^2 3x) \sec^2 3x\, dx$

$= \int \operatorname{tag}^3 3x \sec^2 3x\, dx + \int \operatorname{tag}^5 3x \sec^2 3x\, dx = \frac{1}{12} \operatorname{tag}^4 3x + \frac{1}{18} \operatorname{tag}^6 3x + C$

22. $\int \operatorname{tag}^2 x \sec^3 x\, dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x\, dx = \int \sec^5 x\, dx - \int \sec^3 x\, dx$

$= \frac{1}{4} \sec^3 x \operatorname{tag} x - \frac{1}{8} \sec x \operatorname{tag} x - \frac{1}{8} \ln |\sec x + \operatorname{tag} x| + C$, integrando por partes.

23. $\int \operatorname{tag}^3 2x \sec^3 2x\, dx = \int \operatorname{tag}^2 2x \sec^2 2x \cdot \sec 2x \operatorname{tag} 2x\, dx$

$= \int (\sec^2 2x - 1) \sec^2 2x \cdot \sec 2x \operatorname{tag} 2x\, dx$

$= \int \sec^4 2x \cdot \sec 2x \operatorname{tag} 2x\, dx - \int \sec^2 2x \cdot \sec 2x \operatorname{tag} 2x\, dx$

$= \frac{1}{10} \sec^5 2x - \frac{1}{6} \sec^3 2x + C$

24. $\int \cot^3 2x\, dx = \int \cot 2x\,(\csc^2 2x - 1)\, dx = -\frac{1}{4} \cot^2 2x + \frac{1}{2} \ln |\csc 2x| + C$

25. $\int \cot^4 3x\, dx = \int \cot^2 3x\,(\csc^2 3x - 1)\, dx = \int \cot^2 3x \csc^2 3x\, dx - \int \cot^2 3x\, dx$

$= \int \cot^2 3x \csc^2 3x\, dx - \int (\csc^2 3x - 1)\, dx = -\frac{1}{9} \cot^3 3x + \frac{1}{3} \cot 3x + x + C$

26. $\int \csc^6 x\, dx = \int \csc^2 x\,(1 + \cot^2 x)^2\, dx$

$= \int \csc^2 x\, dx + 2 \int \cot^2 x \csc^2 x\, dx + \int \cot^4 x \csc^2 x\, dx$

$= -\cot x - \frac{2}{3} \cot^3 x - \frac{1}{5} \cot^5 x + C$

27. $\int \cot 3x \csc^4 3x\, dx = \int \cot 3x\,(1 + \cot^2 3x) \csc^2 3x\, dx$

$= \int \cot 3x \csc^2 3x\, dx + \int \cot^3 3x \csc^2 3x\, dx = -\frac{1}{6} \cot^2 3x - \frac{1}{12} \cot^4 3x + C$

28. $\int \cot^3 x \csc^5 x\, dx = \int \cot^2 x \csc^4 x \cdot \csc x \cot x\, dx = \int (\csc^2 x - 1) \csc^4 x \cdot \csc x \cot x\, dx$

$= \int \csc^6 x \cdot \csc x \cot x\, dx - \int \csc^4 x \cdot \csc x \cot x\, dx$

$= -\frac{1}{7} \csc^7 x + \frac{1}{5} \csc^5 x + C$

Problemas propuestos

29. $\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C$

30. $\int \operatorname{sen}^3 2x\, dx = \frac{1}{6} \cos^3 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$

31. $\int \operatorname{sen}^4 2x\, dx = \frac{3}{8} x - \frac{1}{8} \operatorname{sen} 4x + \frac{1}{64} \operatorname{sen} 8x + C$

32. $\int \cos^4 \frac{1}{2} x\, dx = \frac{3}{8} x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2x + C$

33. $\int \operatorname{sen}^7 x\, dx = \frac{1}{7} \cos^7 x - \frac{3}{5} \cos^5 x + \cos^3 x - \cos x + C$

34. $\int \cos^6 \tfrac{1}{2}x \, dx = \tfrac{5}{16}x + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x + \tfrac{3}{32}\operatorname{sen} 2x - \tfrac{1}{24}\operatorname{sen}^3 x + C$

35. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x \, dx = \tfrac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x - \tfrac{2}{5}\operatorname{sen}^5 x + \tfrac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x + C$

36. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x \, dx = \tfrac{1}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{3}\cos^3 x + C$

37. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^3 x \, dx = \tfrac{1}{48}\cos^3 2x - \tfrac{1}{16}\cos 2x + C$

38. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \, dx = \tfrac{1}{128}(3x - \operatorname{sen} 4x + \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 8x) + C$

39. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 4x \, dx = \tfrac{1}{4}\cos 2x - \tfrac{1}{12}\cos 6x + C$

40. $\int \cos 3x \cos 2x \, dx = \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} x + \tfrac{1}{10}\operatorname{sen} 5x + C$

41. $\int \operatorname{sen} 5x \operatorname{sen} x \, dx = \tfrac{1}{8}\operatorname{sen} 4x - \tfrac{1}{12}\operatorname{sen} 6x + C$

42. $\int \dfrac{\cos^3 x \, dx}{1 - \operatorname{sen} x} = \operatorname{sen} x + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$

43. $\int \dfrac{\cos^{2/3} x}{\operatorname{sen}^{8/3} x} dx = -\dfrac{3}{5}\cot^{5/3} x + C$

44. $\int \dfrac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x} dx = \csc x - \dfrac{1}{3}\csc^3 x + C$

45. $\int x(\cos^3 x^2 - \operatorname{sen}^3 x^2)\, dx = \tfrac{1}{12}(\operatorname{sen} x^2 + \cos x^2)(4 + \operatorname{sen} 2x^2) + C$

46. $\int \operatorname{tag}^3 x \, dx = \tfrac{1}{2}\operatorname{tag}^2 x + \ln|\cos x| + C$

47. $\int \operatorname{tag}^3 3x \sec 3x \, dx = \tfrac{1}{9}\sec^3 3x - \tfrac{1}{3}\sec 3x + C$

48. $\int \operatorname{tag}^{3/2} x \sec^4 x \, dx = \tfrac{2}{5}\operatorname{tag}^{5/2} x + \tfrac{2}{9}\operatorname{tag}^{9/2} x + C$

49. $\int \operatorname{tag}^4 x \sec^4 x \, dx = \tfrac{1}{7}\operatorname{tag}^7 x + \tfrac{1}{5}\operatorname{tag}^5 x + C$

50. $\int \cot^3 x \, dx = -\tfrac{1}{2}\cot^2 x - \ln|\operatorname{sen} x| + C$

51. $\int \cot^3 x \csc^4 x \, dx = -\tfrac{1}{4}\cot^4 x - \tfrac{1}{6}\cot^6 x + C$

52. $\int \cot^3 x \csc^3 x \, dx = -\tfrac{1}{5}\csc^5 x + \tfrac{1}{3}\csc^3 x + C$

53. $\int \csc^4 2x \, dx = -\tfrac{1}{2}\cot 2x - \tfrac{1}{6}\cot^3 2x + C$

54. $\int \left(\dfrac{\sec x}{\operatorname{tag} x}\right)^4 dx = -\dfrac{1}{3\operatorname{tag}^3 x} - \dfrac{1}{\operatorname{tag} x} + C$

55. $\int \dfrac{\cot^3 x}{\csc x} dx = -\operatorname{sen} x - \csc x + C$

56. $\int \operatorname{tag} x \sqrt{\sec x}\, dx = 2\sqrt{\sec x} + C$

57. Aplicar la integración por partes para deducir las fórmulas de reducción

(*a*) $\int \sec^m u \, du = \dfrac{1}{m-1}\sec^{m-2} u \operatorname{tag} u + \dfrac{m-2}{m-1}\int \sec^{m-2} u \, du$

(*b*) $\int \csc^m u \, du = -\dfrac{1}{m-1}\csc^{m-2} u \cot u + \dfrac{m-2}{m-1}\int \csc^{m-2} u \, du$

Aplicar las fórmulas de reducción por partes del Problema 57 para resolver los Problemas 58-60.

58. $\int \sec^3 x \, dx = \tfrac{1}{2}\sec x \operatorname{tag} x + \tfrac{1}{2}\ln|\sec x + \operatorname{tag} x| + C$

59. $\int \csc^5 x \, dx = -\tfrac{1}{4}\csc^3 x \cot x - \tfrac{3}{8}\csc x \cot x + \tfrac{3}{8}\ln|\csc x - \cot x| + C$

60. $\int \sec^6 x \, dx = \tfrac{1}{5}\sec^4 x \operatorname{tag} x + \tfrac{4}{15}\sec^2 x \operatorname{tag} x + \tfrac{8}{15}\operatorname{tag} x + C$

$= \tfrac{1}{5}\operatorname{tag}^5 x + \tfrac{2}{3}\operatorname{tag}^3 x + \operatorname{tag} x + C$

Capítulo 28

Cambios de variable trigonométricos

UN INTEGRANDO, que sea de una de las formas, $\sqrt{a^2-b^2u^2}$, $\sqrt{a^2+b^2u^2}$ o $\sqrt{b^2u^2-a^2}$, se puede transformar, si no contiene otro factor irracional, en otro formado a base de funciones trigonométricas de una nueva variable, efectuando los cambios siguientes:

Para	hacer el cambio	para obtener
$\sqrt{a^2-b^2u^2}$	$u = \frac{a}{b}\operatorname{sen} z$	$a\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 z} = a\cos z$
$\sqrt{a^2+b^2u^2}$	$u = \frac{a}{b}\operatorname{tag} z$	$a\sqrt{1+\operatorname{tag}^2 z} = a\sec z$
$\sqrt{b^2u^2-a^2}$	$u = \frac{a}{b}\sec z$	$a\sqrt{\sec^2 z - 1} = a\operatorname{tag} z$

En cada caso, la integración conduce a una expresión en función de la variable z. Para obtener la solución correspondiente en función de la variable original no hay más que deshacer el cambio, es decir tener en cuenta las relaciones pitagóricas en todo triángulo rectángulo, como se indica en los problemas resueltos.

Problemas resueltos

1. Calcular $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$.

Haciendo $x = 2\operatorname{tag} z$; tendremos $dx = 2\sec^2 z\,dz$ y $\sqrt{4+x^2} = 2\sec z$.

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2 z\,dz}{(4\operatorname{tag}^2 z)(2\sec z)} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec z}{\operatorname{tag}^2 z}dz$$
$$= \frac{1}{4}\int \operatorname{sen}^{-2} z\cos z\,dz = -\frac{1}{4\operatorname{sen} z} + C = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$$

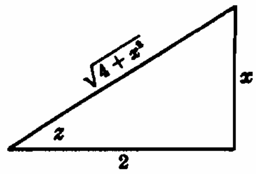


Fig. 28-1

2. Calcular $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx$.

Haciendo $x = 2\sec z$; tendremos $dx = 2\sec z\operatorname{tag} z\,dz$ y $\sqrt{x^2-4} = 2\operatorname{tag} z$.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{4\sec^2 z}{2\operatorname{tag} z}(2\sec z\operatorname{tag} z\,dz) = 4\int \sec^3 z\,dz$$
$$= 2\sec z\operatorname{tag} z + 2\ln|\sec z + \operatorname{tag} z| + C'$$
$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} + 2\ln|x+\sqrt{x^2-4}| + C$$

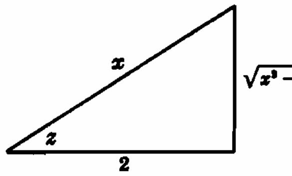


Fig. 28-2

3. Calcular $\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}dx$.

Haciendo $x = \frac{3}{2}\operatorname{sen} z$; tendremos $dx = \frac{3}{2}\cos z\,dz$ y $\sqrt{9-4x^2} = 3\cos z$.

$$\int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x}\,dx \;=\; \int \frac{3\cos z}{\frac{3}{2}\operatorname{sen} z}\left(\tfrac{3}{2}\cos z\,dz\right) \;=\; 3\int \frac{\cos^2 z}{\operatorname{sen} z}\,dz$$

$$= 3\int \frac{1-\operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z}\,dz \;=\; 3\int \csc z\,dz \;-\; 3\int \operatorname{sen} z\,dz$$

$$= 3\ln|\csc z - \cot z| \;+\; 3\cos z \;+\; C'$$

$$= 3\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{x}\right| \;+\; \sqrt{9-4x^2} \;+\; C$$

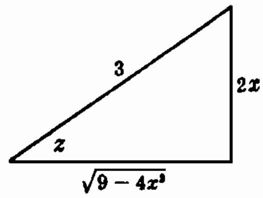


Fig. 28-3

4. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}}$.

Haciendo $x = \frac{3}{2}\operatorname{tag} z$, tendremos $dx = \frac{3}{2}\sec^2 z\,dz$ y $\sqrt{9+4x^2} = 3\sec z$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9+4x^2}} \;=\; \int \frac{\frac{3}{2}\sec^2 z\,dz}{\frac{3}{2}\operatorname{tag} z\cdot 3\sec z} \;=\; \frac{1}{3}\int \csc z\,dz$$

$$= \frac{1}{3}\ln|\csc z - \cot z| \;+\; C' \;=\; \frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9+4x^2}-3}{x}\right| \;+\; C$$

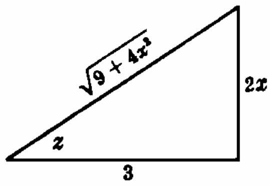


Fig. 28-4

5. Calcular $\displaystyle\int \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^6}\,dx$.

Haciendo $x = -\operatorname{sen} z$, tendremos $dx = -\cos z\,dz$ y $\sqrt{16-9x^2} = 4\cos z$.

$$\int \frac{(16-9x^2)^{3/2}}{x^6}\,dx \;=\; \int \frac{64\cos^3 z\cdot\frac{4}{3}\cos z\,dz}{\frac{4096}{729}\operatorname{sen}^6 z} \;=\; \frac{243}{16}\int \frac{\cos^4 z}{\operatorname{sen}^6 z}\,dz$$

$$= \frac{243}{16}\int \cot^4 z\csc^2 z\,dz \;=\; -\frac{243}{80}\cot^5 z \;+\; C$$

$$= -\frac{243}{80}\cdot\frac{(16-9x^2)^{5/2}}{243x^5} \;+\; C \;=\; -\frac{1}{80}\cdot\frac{(16-9x^2)^{5/2}}{x^5} \;+\; C$$

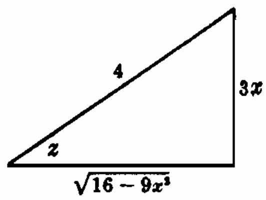


Fig. 28-5

6. Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$.

Haciendo $x-1 = \operatorname{sen} z$, tendremos $dx = \cos z\,dz$ y $\sqrt{2x-x^2} = \cos z$.

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2x-x^2}} \;=\; \int \frac{(1+\operatorname{sen} z)^2}{\cos z}\cos z\,dz \;=\; \int (1+\operatorname{sen} z)^2\,dz$$

$$= \int \left(\tfrac{3}{2} + 2\operatorname{sen} z - \tfrac{1}{2}\cos 2z\right)dz \;=\; \tfrac{3}{2}z \;-\; 2\cos z \;-\; \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2z \;+\; C$$

$$= \tfrac{3}{2}\operatorname{arc\,sen}(x-1) \;-\; 2\sqrt{2x-x^2} \;-\; \tfrac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2} \;+\; C$$

$$= \tfrac{3}{2}\operatorname{arc\,sen}(x-1) \;-\; \tfrac{1}{2}(x+3)\sqrt{2x-x^2} \;+\; C$$

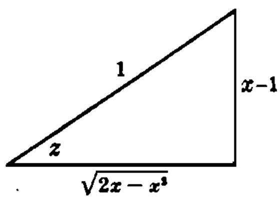


Fig. 28-6

7. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{3/2}} = \int \frac{dx}{\{4(x-3)^2-9\}^{3/2}}$.

Haciendo $x-3 = \frac{3}{2}\sec z$, tendremos $dx = \frac{3}{2}\sec z\operatorname{tag} z\,dz$ y $\sqrt{4x^2-24x+27} = 3\operatorname{tag} z$.

$$\int \frac{dx}{(4x^2-24x+27)^{3/2}} \;=\; \int \frac{\frac{3}{2}\sec z\;\operatorname{tag} z\,dz}{27\;\operatorname{tag}^3 z}$$

$$= \frac{1}{18}\int \operatorname{sen}^{-2} z\cos z\,dz$$

$$= -\frac{1}{18}\csc z \;+\; C$$

$$= -\frac{1}{9}\,\frac{x-3}{\sqrt{4x^2-24x+27}} \;+\; C$$

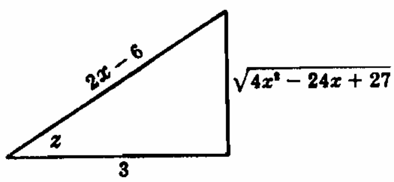


Fig. 28-7

Problemas propuestos

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(4-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C$

9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\,dx = 5\ln\left|\frac{5-\sqrt{25-x^2}}{x}\right| + \sqrt{25-x^2} + C$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C$

11. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4}\,dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} + 2\ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C$

12. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C$

13. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-4}\,dx = \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - 2\ln|x+\sqrt{x^2-4}| + C$

14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a}{2}\ln\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{\sqrt{a^2+x^2}+a} + C$

15. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{(4-x^2)^{5/2}} = \frac{x^3}{12(4-x^2)^{3/2}} + C$

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C$

17. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{9x} + C$

18. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-16}} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-16} + 8\ln|x+\sqrt{x^2-16}| + C$

19. $\displaystyle\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{5}(a^2-x^2)^{5/2} - \frac{a^2}{3}(a^2-x^2)^{3/2} + C$

20. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+13}} = \ln(x-2+\sqrt{x^2-4x+13}) + C$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{3/2}} = \frac{x-2}{4\sqrt{4x-x^2}} + C$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{(9+x^2)^2} = \frac{1}{54}\operatorname{arc\,tag}\frac{x}{3} + \frac{x}{18(9+x^2)} + C$

Aplicar la integración, por partes y el método de este capítulo, en la resolución de los Problemas 23-24.

23. $\displaystyle\int x\operatorname{arc\,sen}x\,dx = \tfrac{1}{4}(2x^2-1)\operatorname{arc\,sen}x + \tfrac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$

24. $\displaystyle\int x\operatorname{arc\,cos}x\,dx = \tfrac{1}{4}(2x^2-1)\operatorname{arc\,cos}x - \tfrac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$

Capítulo 29

Integración por descomposición en fracciones simples

UN POLINOMIO EN x es una función de la forma $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, en donde los coeficientes son constantes, $a_0 \neq 0$ y n un número entero y positivo cualquiera, incluido el cero.

Si dos polinomios del mismo grado toman iguales valores numéricos para todos los valores de la variable, los coeficientes de los términos de igual grado de ésta, en ambos polinomios, son iguales.

Todo polinomio de coeficientes reales se puede expresar (al menos teóricamente) como producto de factores reales lineales, de la forma $ax + b$, y de factores cuadráticos reales irreducibles, de la forma $ax^2 + bx + c$.

UNA FUNCION $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ en la que $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios recibe el nombre de *fracción racional.*

Si el grado de $f(x)$ es menor que el de $g(x)$, $F(x)$ recibe el nombre de función *propia*; en caso contrario, $F(x)$ se denomina *impropia.*

Toda fracción racional impropia se puede expresar (al menos teóricamente) como suma de un polinomio y una fracción propia. Por ejemplo, $\dfrac{x^3}{x^2+1} = x - \dfrac{x}{x^2+1}$.

Toda fracción racional propia se puede expresar (al menos teóricamente) como suma de *fracciones simples* cuyos denominadores son de la forma $(ax + b)^n$ y $(ax^2 + bx + c)^n$, siendo n un número entero y positivo. Atendiendo a la naturaleza de los factores del denominador, se pueden considerar cuatro casos.

CASO I. FACTORES LINEALES DISTINTOS

A cada factor lineal, $ax + b$, del denominador de una fracción racional propia, le corresponde una fracción de la forma $\dfrac{A}{ax+b}$, siendo A una constante a determinar.

(Ver Problemas 1-2.)

CASO II. FACTORES LINEALES IGUALES

A cada factor lineal, $ax + b$, que figure n veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

siendo los numeradores constantes a determinar.

(Ver Problemas 3-4.)

CASO III. FACTORES CUADRATICOS DISTINTOS

A cada factor cuadrático reducible, $ax^2 + bx + c$, que figure en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una fracción de la forma $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, siendo A y B constantes a determinar.

(Ver Problemas 5-6.)

CASO IV. FACTORES CUADRATICOS IGUALES

A cada factor cuadrático irreducible, $ax^2 + bx + c$, que se repita n veces en el denominador de una fracción racional propia, le corresponde una suma de n fracciones de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

siendo los valores de A y B constantes a determinar.

(Ver Problemas 7-8.)

Problemas resueltos

1. Hallar $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 4}$.

(*a*) Descomposición del denominador en factores: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.

Por tanto $\dfrac{1}{x^2 - 4} = \dfrac{A}{x - 2} + \dfrac{B}{x + 2}$; quitando denominadores

$$(1)\quad 1 = A(x + 2) + B(x - 2) \quad \text{o bien} \quad (2)\quad 1 = (A + B)x + (2A - 2B)$$

(*b*) Cálculo de las constantes.

Método general. Se identifican los coeficientes de igual potencia de x en (2) y se resuelve el sistema de ecuaciones obtenido para determinar las constantes. Esto es, $A + B = 0$ y $2A - 2B = 1$; $A = \frac{1}{4}$ y $B = -\frac{1}{4}$.

Método abreviado. Se sustituyen en (1) los valores de x que anulen los denominadores de las fracciones. Es decir, para $x = 2$ y $x = -2$, obtenemos $1 = 4A$ y $1 = -4B$, de donde, $A = \frac{1}{4}$ y $B = -\frac{1}{4}$, como antes.

(*c*) Hemos obtenido $\dfrac{1}{x^2 - 4} = \dfrac{\frac{1}{4}}{x - 2} - \dfrac{\frac{1}{4}}{x + 2}$ con lo cual

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x - 2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x + 2} = \frac{1}{4}\ln|x - 2| - \frac{1}{4}\ln|x + 2| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x - 2}{x + 2}\right| + C$$

2. Calcular $\displaystyle\int \frac{(x + 1)\,dx}{x^3 + x^2 - 6x}$.

(*a*) $x^3 + x^2 - 6x = x(x - 2)(x + 3)$. Por tanto $\dfrac{x + 1}{x^3 + x^2 - 6x} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x - 2} + \dfrac{C}{x + 3}$ y

$$(1)\quad x + 1 = A(x - 2)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x - 2) \quad \text{o}$$

$$(2)\quad x + 1 = (A + B + C)x^2 + (A + 3B - 2C)x - 6A$$

(*b*) *Método general.* Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$A + B + C = 0, \quad A + 3B - 2C = 1, \quad \text{y} \quad -6A = 1$$

obtenemos $A = -1/6$, $B = 3/10$, y $C = -2/15$.

Método abreviado. Sustituyendo en (1) los valores $x = 0$, $x = 2$, y $x = -3$ obtenemos $1 = -6A$, o sea, $A = -1/6$, $3 = 10B$ ó $B = 3/10$, y $-2 = 15C$ ó $C = -2/15$.

(*c*)
$$\int \frac{(x + 1)\,dx}{x^3 + x^2 - 6x} = -\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x} + \frac{3}{10}\int \frac{dx}{x - 2} - \frac{2}{15}\int \frac{dx}{x + 3}$$
$$= -\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x - 2| - \frac{2}{15}\ln|x + 3| + C = \ln\frac{|x - 2|^{3/10}}{|x|^{1/6}\,|x + 3|^{2/15}} + C$$

3. Calcular $\displaystyle\int \frac{(3x + 5)\,dx}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

$x^3 - x^2 - x + 1 = (x + 1)(x - 1)^2$. Tendremos $\dfrac{3x + 5}{x^3 - x^2 - x + 1} = \dfrac{A}{x + 1} + \dfrac{B}{x - 1} + \dfrac{C}{(x - 1)^2}$ y

$$3x + 5 = A(x - 1)^2 + B(x + 1)(x - 1) + C(x + 1)$$

Para $x = -1$, $2 = 4A$ y $A = \frac{1}{2}$. Para $x = 1$, $8 = 2C$ y $C = 4$. Para determinar las demás constantes, se sustituye otro valor de x, por ejemplo, $x = 0$; para $x = 0$, $5 = A - B + C$ y $B = -\frac{1}{2}$. Por tanto,

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} + 4\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + C = -\frac{4}{x-1} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$$

4. Calcular $\int \frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx$.

El integrando es una fracción impropia. Dividiendo,

$$\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2} = x - \frac{x+1}{x^3-x^2} = x - \frac{x+1}{x^2(x-1)}$$

Descomponiendo $\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}$. Tendremos,

$$x+1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2$$

Para $x = 0$, $1 = -B$ y $B = -1$. Para $x = 1$, $2 = C$. Para $x = 2$, $3 = 2A + B + 4C$ y $A = -2$. Por tanto,

$$\int\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx = \int x\,dx + 2\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dx}{x^2} - 2\int\frac{dx}{x-1}$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + 2\ln|x| - \frac{1}{x} - 2\ln|x-1| + C = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + 2\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + C$$

5. Calcular $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx$.

$x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2+1)(x^2+2)$. Con lo que $\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$. De donde

$$x^3 + x^2 + x + 2 = (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1)$$
$$= (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (2A+C)x + (2B+D)$$

Luego $A + C = 1$, $B + D = 1$, $2A + C = 1$, y $2B + D = 2$. Resolviendo el sistema, $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 0$. Es decir,

$$\int\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}\,dx = \int\frac{dx}{x^2+1} + \int\frac{x\,dx}{x^2+2} = \text{arc tag}\,x + \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C$$

6. Resolver la ecuación $\int\frac{x^2\,dx}{a^4-x^4} = \int k\,dt$ que se presenta en química física.

Tendremos $\frac{x^2}{a^4-x^4} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{a+x} + \frac{Cx+D}{a^2+x^2}$. Por tanto,

$$x^2 = A(a+x)(a^2+x^2) + B(a-x)(a^2+x^2) + (Cx+D)(a-x)(a+x)$$

Para $x = a$, $a^2 = 4Aa^3$ y $A = 1/4a$. Para $x = -a$, $a^2 = 4Ba^3$ y $B = 1/4a$. Para $x = 0$, $0 = Aa^3 + Ba^3 + Da^2 = a^2/2 + Da^2$ y $D = -1/2$. Para $x = 2a$, $4a^2 = 15Aa^3 - 5Ba^3 - 6Ca^3 - 3Da^2$ y $C = 0$. Así, pues,

$$\int\frac{x^2\,dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a}\int\frac{dx}{a-x} + \frac{1}{4a}\int\frac{dx}{a+x} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{a^2+x^2}$$
$$= -\frac{1}{4a}\ln|a-x| + \frac{1}{4a}\ln|a+x| - \frac{1}{2a}\text{arc tag}\,\frac{x}{a} + C$$

y $$\int k\,dt = kt = \frac{1}{4a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| - \frac{1}{2a}\text{arc tag}\,\frac{x}{a} + C$$

7. Calcular $\int\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3}\,dx$.

Tendremos $\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+8x-4}{(x^2+2)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^3}$. De donde

$$x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = (Ax+B)(x^2+2)^2 + (Cx+D)(x^2+2) + Ex + F$$
$$= Ax^5 + Bx^4 + (4A+C)x^3 + (4B+D)x^2$$
$$+ (4A+2C+E)x + (4B+2D+F)$$

se obtiene $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 0$, $E = 4$, $F = 0$. Así, pues, la integral dada es igual a

$$\int \frac{x-1}{x^2+2}\,dx + 4\int \frac{x\,dx}{(x^2+2)^3} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{2}\text{arc tag}\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{(x^2+2)^2} + C$$

8. Calcular $\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx$.

Tendremos $\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}$. Por tanto

$$2x^2 + 3 = (Ax + B)(x^2 + 1) + Cx + D = Ax^3 + Bx^2 + (A + C)x + (B + D)$$

de donde $A = 0$, $B = 2$, $A + C = 0$, $B + D = 3$. Por tanto $A = 0$, $B = 2$, $C = 0$, $D = 1$ y

$$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{2\,dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

Para la segunda integral del segundo miembro, hacemos $x = \text{tag}\, z$. Con lo cual

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{\sec^2 z\,dz}{\sec^4 z} = \int \cos^2 z\,dz = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2z + C$$

y $$\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx = 2\,\text{arc tag}\,x + \frac{1}{2}\text{arc tag}\,x + \frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1} + C = \frac{5}{2}\text{arc tag}\,x + \frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1} + C$$

Problemas propuestos

9. $\int \frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$

10. $\int \frac{dx}{x^2+7x+6} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x+1}{x+6}\right| + C$

11. $\int \frac{x\,dx}{x^2-3x-4} = \frac{1}{5}\ln|(x+1)(x-4)^4| + C$

12. $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}\,dx = x + \ln|(x+2)(x-4)^4| + C$

13. $\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx = \ln\left|\frac{x^{1/2}(x+2)^{3/2}}{x-1}\right| + C$

14. $\int \frac{x\,dx}{(x-2)^2} = \ln|x-2| - \frac{2}{x-2} + C$

15. $\int \frac{x^4}{(1-x)^3}\,dx = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \ln(1-x)^6 - \frac{4}{1-x} + \frac{1}{2(1-x)^2} + C$

16. $\int \frac{dx}{x^3+x} = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C$

17. $\int \frac{x^3+x^2+x+3}{(x^2+1)(x^2+3)}\,dx = \ln\sqrt{x^2+3} + \text{arc tag}\,x + C$

18. $\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+3}{x^3-2x^2+3x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2-2x+3}}\right| + C$

19. $\int \frac{2x^3\,dx}{(x^2+1)^2} = \ln(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} + C$

20. $\int \frac{2x^3+x^2+4}{(x^2+4)^2}\,dx = \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\text{arc tag}\,\frac{1}{2}x + \frac{4}{x^2+4} + C$

21. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2}\,dx = \ln\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{2}\text{arc tag}\,x - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + C$

22. $\int \frac{x^4+8x^3-x^2+2x+1}{(x^2+x)(x^3+1)}\,dx = \ln\left|\frac{x^3-x^2+x}{(x+1)^2}\right| - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arc tag}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$

23. $\int \frac{x^3+x^2-5x+15}{(x^2+5)(x^2+2x+3)}\,dx = \ln\sqrt{x^2+2x+3} + \frac{5}{\sqrt{2}}\text{arc tag}\,\frac{x+1}{\sqrt{2}} - \sqrt{5}\,\text{arc tag}\,\frac{x}{\sqrt{5}} + C$

24. $\int \frac{x^6+7x^5+15x^4+32x^3+23x^2+25x-3}{(x^2+x+2)^2(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{x^2+x+2} - \frac{3}{x^2+1} + \ln\frac{x^2+1}{x^2+x+2} + C$

25. $\int \frac{dx}{e^{2x}-3e^x} = \frac{1}{3e^x} + \frac{1}{9}\ln\left|\frac{e^x-3}{e^x}\right| + C$ (Hacer $e^x = u$.)

26. $\int \frac{\text{sen}\,x\,dx}{\cos x\,(1+\cos^2 x)} = \ln\left|\frac{\sqrt{1+\cos^2 x}}{\cos x}\right| + C$ (Hacer $\cos x = u$.)

27. $\int \frac{(2+\text{tag}^2\,\theta)\sec^2\theta\,d\theta}{1+\text{tag}^3\,\theta} = \ln|1+\text{tag}\,\theta| + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arc tag}\,\frac{2\,\text{tag}\,\theta-1}{\sqrt{3}} + C$

Capítulo 30

Diversos cambios de variable

INTEGRANDO RACIONAL de la forma:

1. $\sqrt[n]{au+b}$. Se transforma en racional mediante el cambio de variable $au + b = z^n$.
2. $\sqrt{q+pu+u^2}$. Se transforma en racional mediante el cambio de variable $q + pu + u^2 = (z - u)^2$.
3. $\sqrt{q+pu-u^2} = \sqrt{(\alpha+u)(\beta-u)}$. Se transforma en racional mediante el cambio de variable $q + pu - u^2 = (\alpha + u)^2z^2$, o bien $q + pu - u^2 = (\beta - u)^2z^2$.

(Ver Problemas 1-5.)

EL CAMBIO DE VARIABLE $u = 2 \text{ arc tag } z$ transforma una función racional de sen u y cos u en una función de z,

$$\text{sen } u = \frac{2z}{1+z^2}, \qquad \cos u = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \qquad \text{y} \qquad du = \frac{2\,dz}{1+z^2}$$

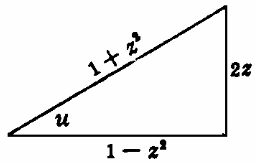


Fig. 30-1

Las dos primeras relaciones se deducen de la Fig. 30-1 y la tercera, diferenciando la expresión

$$u = 2 \text{ arc tag } z$$

Después de efectuar la integración se deshace el cambio, es decir, $z = \text{tag } \frac{1}{2}u$, con objeto de expresar el resultado en función de la variable original.

(Ver Problemas 6-10.)

OTROS CAMBIOS DE VARIABLE. Según la forma que presente el integrando se pueden aplicar otros cambios de variable de suma utilidad en el cálculo de integrales.

(Ver Problemas 11-12.)

Problemas resueltos

1. Calcular $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$. Haciendo $1 - x = z^2$, tendremos $x = 1 - z^2$, $dx = -2z\,dz$, y

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}} = \int \frac{-2z\,dz}{(1-z^2)z} = -2\int \frac{dz}{1-z^2} = -\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + C = \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right| + C$$

2. Calcular $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$. Haciendo $x + 2 = z^2$, tendremos $x = z^2 - 2$, $dx = 2z\,dz$, y

$$\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}} = \int \frac{2z\,dz}{z(z^2-4)} = 2\int \frac{dz}{z^2-4} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2}\right| + C$$

3. Calcular $\int \frac{dx}{x^{1/2}-x^{1/4}}$. Haciendo $x = z^4$, tendremos $dx = 4z^3\,dz$ y

$$\int \frac{dx}{x^{1/2}-x^{1/4}} = \int \frac{4z^3\,dz}{z^2-z} = 4\int \frac{z^2}{z-1}\,dz = 4\int \left(z+1+\frac{1}{z-1}\right)dz$$

$$= 4(\tfrac{1}{2}z^2 + z + \ln|z-1|) + C = 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + \ln(\sqrt[4]{x}-1)^4 + C$$

4. Calcular $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}}$. Haciendo $x^2 + x + 2 = (z - x)^2$, tendremos

$$x = \frac{z^2-2}{1+2z}, \quad dx = \frac{2(z^2+z+2)\,dz}{(1+2z)^2}, \quad \sqrt{x^2+x+2} = \frac{z^2+z+2}{1+2z}, \quad \text{y}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}} = \int \frac{\dfrac{2(z^2+z+2)}{(1+2z)^2}}{\dfrac{z^2-2}{1+2z}\cdot\dfrac{z^2+z+2}{1+2z}}\,dz = 2\int\frac{dz}{z^2-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+x+2}+x+\sqrt{2}}\right| + C$$

5. Calcular $\int \frac{x\,dx}{(5-4x-x^2)^{3/2}}$. Haciendo $5 - 4x - x^2 = (5 + x)(1 - x) = (1 - x)^2z^2$, tendremos

$$x = \frac{z^2-5}{1+z^2}, \quad dx = \frac{12z\,dz}{(1+z^2)^2}, \quad \sqrt{5-4x-x^2} = (1-x)z = \frac{6z}{1+z^2}, \quad \text{y}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(5-4x-x^2)^{3/2}} = \int \frac{\dfrac{z^2-5}{1+z^2}\cdot\dfrac{12z}{(1+z^2)^2}}{\dfrac{216z^3}{(1+z^2)^3}}\,dz = \frac{1}{18}\int\left(1-\frac{5}{z^2}\right)dz$$

$$= \frac{1}{18}\left(z+\frac{5}{z}\right) + C = \frac{5-2x}{9\sqrt{5-4x-x^2}} + C$$

6. $$\int\frac{dx}{1+\operatorname{sen} x-\cos x} = \int\frac{\dfrac{2\,dz}{1+z^2}}{1+\dfrac{2z}{1+z^2}-\dfrac{1-z^2}{1+z^2}} = \int\frac{dz}{z(1+z)} = \ln|z| - \ln|1+z| + C$$

$$= \ln\left|\frac{z}{1+z}\right| + C = \ln\left|\frac{\operatorname{tag}\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tag}\frac{1}{2}x}\right| + C$$

7. $$\int\frac{dx}{3-2\cos x} = \int\frac{\dfrac{2\,dz}{1+z^2}}{3-2\dfrac{1-z^2}{1+z^2}} = \int\frac{2\,dz}{1+5z^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\operatorname{arc\,tag} z\sqrt{5} + C$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5}\operatorname{arc\,tag}\,(\sqrt{5}\operatorname{tag}\tfrac{1}{2}x) + C$$

8. $$\int\sec x\,dx = \int\frac{1+z^2}{1-z^2}\cdot\frac{2\,dz}{1+z^2} = 2\int\frac{dz}{1-z^2} = \ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\operatorname{tag}\frac{1}{2}x}{1-\operatorname{tag}\frac{1}{2}x}\right| + C$$

$$= \ln|\operatorname{tag}(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}\pi)| + C$$

9. $$\int\frac{dx}{2+\cos x} = \int\frac{\dfrac{2\,dz}{1+z^2}}{2+\dfrac{1-z^2}{1+z^2}} = 2\int\frac{dz}{3+z^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tag}\frac{z}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tag}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tag}\tfrac{1}{2}x\right) + C$$

10. $$\int\frac{dx}{5+4\operatorname{sen} x} = \int\frac{\dfrac{2\,dz}{1+z^2}}{5+4\dfrac{2z}{1+z^2}} = \int\frac{2\,dz}{5+8z+5z^2} = \frac{2}{5}\int\frac{dz}{(z+\frac{4}{5})^2+\frac{9}{25}}$$

$$= \frac{2}{3}\operatorname{arc\,tag}\frac{z+4/5}{3/5} + C = \frac{2}{3}\operatorname{arc\,tag}\frac{5\operatorname{tag}\frac{1}{2}x+4}{3} + C$$

11. Por medio del cambio de variable $1 - x^3 = z^2$ calcular $\int x^5\sqrt{1-x^3}\,dx$. $x^3 = 1-z^2$, $3x^2\,dx = -2z\,dz$, y

$$\int x^5\sqrt{1-x^3}\,dx = \int x^3\sqrt{1-x^3}\cdot x^2\,dx = \int(1-z^2)z(-\tfrac{2}{3}z\,dz) = -\frac{2}{3}\int(1-z^2)z^2\,dz$$

$$= -\frac{2}{3}\left(\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}\right) + C = -\frac{2}{45}(1-x^3)^{3/2}(2+3x^3) + C$$

12. Haciendo $x = \frac{1}{z}$, calcular $\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}\,dx$. Tendremos $dx = -\frac{dz}{z^2}$, $\sqrt{x-x^2} = \frac{1}{z}\sqrt{z-1}$, y

$$\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4}\,dx \quad = \quad \int \frac{\frac{1}{z}\sqrt{z-1}\left(-\frac{dz}{z^2}\right)}{1/z^4} \quad = \quad -\int z\sqrt{z-1}\,dz$$

Haciendo $z - 1 = s^2$, tendremos

$$-\int z\sqrt{z-1}\,dz \quad = \quad -\int (s^2+1)s\cdot 2s\,ds \quad = \quad -2\left(\frac{s^5}{5}+\frac{s^3}{3}\right) + C$$

$$= \quad -2\left(\frac{(z-1)^{5/2}}{5} + \frac{(z-1)^{3/2}}{3}\right) + C \quad = \quad -2\left(\frac{(1-x)^{5/2}}{5x^{5/2}} + \frac{(1-x)^{3/2}}{3x^{3/2}}\right) + C$$

Problemas propuestos

13. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx \quad = \quad 2\sqrt{x} - 2 \text{ arc tag } \sqrt{x} + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} \quad = \quad 2 \ln (1+\sqrt{x}) + C$

15. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{x+2}} \quad = \quad 2\sqrt{x+2} - 6 \ln (3+\sqrt{x+2}) + C$

16. $\int \frac{1-\sqrt{3x+2}}{1+\sqrt{3x+2}}\,dx \quad = \quad -x + \frac{4}{3}\left\{\sqrt{3x+2} - \ln (1+\sqrt{3x+2})\right\} + C$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} \quad = \quad \ln\left|2\sqrt{x^2-x+1} + 2x - 1\right| + C$

18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}} \quad = \quad 2 \text{ arc tag } (\sqrt{x^2+x-1} + x) + C$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{6+x-x^2}} \quad = \quad \text{arc sen } \frac{2x-1}{5} + C$

20. $\int \frac{\sqrt{4x-x^2}}{x^3}\,dx \quad = \quad -\frac{(4x-x^2)^{3/2}}{6x^3} + C$

21. $\int \frac{dx}{(x+1)^{1/2}+(x+1)^{1/4}} \quad = \quad 2(x+1)^{1/2} - 4(x+1)^{1/4} + 4 \ln (1+(x+1)^{1/4}) + C$

22. $\int \frac{dx}{2+\text{sen } x} \quad = \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ arc tag } \frac{2 \text{ tag } \frac{1}{2}x + 1}{\sqrt{3}} + C$

23. $\int \frac{dx}{1-2 \text{ sen } x} \quad = \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \left|\frac{\text{tag } \frac{1}{2}x - 2 - \sqrt{3}}{\text{tag } \frac{1}{2}x - 2 + \sqrt{3}}\right| + C$

24. $\int \frac{dx}{3+5 \text{ sen } x} \quad = \quad \frac{1}{4} \ln \left|\frac{3 \text{ tag } \frac{1}{2}x + 1}{\text{tag } \frac{1}{2}x + 3}\right| + C$

25. $\int \frac{dx}{\text{sen } x - \cos x - 1} \quad = \quad \ln \left|\text{tag } \frac{1}{2}x - 1\right| + C$

26. $\int \frac{dx}{5+3 \text{ sen } x} \quad = \quad \frac{1}{2} \text{ arc tag } \frac{5 \text{ tag } \frac{1}{2}x + 3}{4} + C$

27. $\int \frac{\text{sen } x\,dx}{1+\text{sen}^2 x} \quad = \quad \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left|\frac{\text{tag}^2 \frac{1}{2}x + 3 - 2\sqrt{2}}{\text{tag}^2 \frac{1}{2}x + 3 + 2\sqrt{2}}\right| + C$

28. $\int \frac{dx}{1+\text{sen } x + \cos x} \quad = \quad \ln \left|1 + \text{tag } \frac{1}{2}x\right| + C$

29. $\int \frac{dx}{2-\cos x} \quad = \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ arc tag } (\sqrt{3} \text{ tag } \frac{1}{2}x) + C$

30. $\int \text{sen}\sqrt{x}\,dx \quad = \quad -2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2 \text{ sen}\sqrt{x} + C$

31. $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+2x-1}} \quad = \quad -\text{arc sen } \frac{1-x}{2x} + C$ Hacer $x = 1/z$.

32. $\int \frac{(e^x-2)e^x}{e^x+1}\,dx \quad = \quad e^x - 3 \ln (e^x+1) + C$ Hacer $e^x + 1 = z$.

33. $\int \frac{\text{sen } x \cos x}{1-\cos x}\,dx \quad = \quad \cos x + \ln (1-\cos x) + C$ Hacer $\cos x = z$.

34. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} \quad = \quad -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$ Hacer $x = 2/z$.

35. $\int \frac{dx}{x^2(4+x^2)} \quad = \quad -\frac{1}{4x} + \frac{1}{8} \text{ arc tag } \frac{2}{x} + C$

36. $\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx \quad = \quad \frac{4}{5}(1+\sqrt{x})^{5/2} - \frac{4}{3}(1+\sqrt{x})^{3/2} + C$

37. $\int \frac{dx}{3(1-x^2) - (5+4x)\sqrt{1-x^2}} \quad = \quad \frac{2\sqrt{1+x}}{3\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} + C$

Capítulo 31

Integración de funciones hiperbólicas

FORMULAS DE INTEGRACION

$$\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u + C \qquad \int \operatorname{sech}^2 u\,du = \operatorname{tagh} u + C$$

$$\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u + C \qquad \int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u + C$$

$$\int \operatorname{tagh} u\,du = \ln \cosh u + C \qquad \int \operatorname{sech} u \operatorname{tagh} u\,du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$\int \coth u\,du = \ln|\operatorname{senh} u| + C \qquad \int \operatorname{csch} u \coth u\,du = -\operatorname{csch} u + C$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{u}{a} + C \qquad \int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{tagh}^{-1}\frac{u}{a} + C, \quad u^2<a^2$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{u}{a} + C, \quad u>a>0 \qquad \int \frac{du}{u^2-a^2} = -\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{u}{a} + C, \quad u^2>a^2$$

Problemas resueltos

1. $\int \operatorname{senh} \tfrac{1}{2}x\,dx = 2\cosh \tfrac{1}{2}x + C$

2. $\int \cosh 2x\,dx = \tfrac{1}{2}\operatorname{senh} 2x + C$

3. $\int \operatorname{sech}^2 (2x-1)\,dx = \tfrac{1}{2}\operatorname{tagh}(2x-1) + C$

4. $\int \operatorname{csch} 3x \coth 3x\,dx = -\tfrac{1}{3}\operatorname{csch} 3x + C$

5. $\int \operatorname{sech} x\,dx = \int \frac{1}{\cosh x}dx = \int \frac{\cosh x}{\cosh^2 x} = \int \frac{\cosh x}{1+\operatorname{senh}^2 x}dx = \operatorname{arc\,tag}(\operatorname{senh} x) + C$

6. $\int \operatorname{senh}^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cosh 2x - 1)\,dx = \tfrac{1}{4}\operatorname{senh} 2x - \tfrac{1}{2}x + C$

7. $\int \operatorname{tagh}^2 2x\,dx = \int (1-\operatorname{sech}^2 2x)\,dx = x - \tfrac{1}{2}\operatorname{tagh} 2x + C$

8. $\int \cosh^3 \tfrac{1}{2}x\,dx = \int (1+\operatorname{senh}^2 \tfrac{1}{2}x)\cosh \tfrac{1}{2}x\,dx = 2\operatorname{senh}\tfrac{1}{2}x + \tfrac{2}{3}\operatorname{senh}^3 \tfrac{1}{2}x + C$

9. $\int \operatorname{sech}^4 x\,dx = \int (1-\operatorname{tagh}^2 x)\operatorname{sech}^2 x\,dx = \operatorname{tagh} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{tagh}^3 x + C$

10. $\int e^x \cosh x\,dx = \int e^x\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int (e^{2x}+1)\,dx = \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2}x + C$

11. $\int x \operatorname{senh} x\,dx = \int x\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int xe^x\,dx - \frac{1}{2}\int xe^{-x}\,dx$

$$= \frac{1}{2}(xe^x - e^x) - \frac{1}{2}(-xe^{-x}-e^{-x}) + C = x\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) - \frac{e^x-e^{-x}}{2} + C$$

$$= x\cosh x - \operatorname{senh} x + C$$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{2}\cosh^{-1}\frac{2x}{3} + C$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2-25} = -\frac{1}{15}\coth^{-1}\frac{3x}{5} + C$

14. Calcular $\int \sqrt{x^2+4}\,dx$. Haciendo $x = 2\operatorname{senh} z$, tendremos $dx = 2\cosh z\,dz$, $\sqrt{x^2+4} = 2\cosh z$, y

$$\int \sqrt{x^2+4}\,dx = 4\int \cosh^2 z\,dz = 2\int (\cosh 2z + 1)\,dz = \operatorname{senh} 2z + 2z + C$$
$$= 2\operatorname{senh} z\cosh z + 2z + C = \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} + 2\operatorname{senh}^{-1}\tfrac{1}{2}x + C$$

15. Calcular $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$. Haciendo $x = \operatorname{sech} z$, tendremos $dx = -\operatorname{sech} z \operatorname{tagh} z\,dz$, $1 - x^2 = \operatorname{tagh} z$, y

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{\operatorname{sech} z \operatorname{tagh} z}{\operatorname{sech} z \operatorname{tagh} z}\,dz = -\int dz = -z + C = -\operatorname{sech}^{-1} x + C$$

Problemas propuestos

16. $\int \operatorname{senh} 3x\,dx = \frac{1}{3}\cosh 3x + C$

17. $\int \cosh \frac{1}{4}x\,dx = 4\operatorname{senh}\frac{1}{4}x + C$

18. $\int \coth \frac{3}{2}x\,dx = \frac{2}{3}\ln|\operatorname{senh}\frac{3}{2}x| + C$

19. $\int \operatorname{csch}^2(1+3x)\,dx = -\frac{1}{3}\coth(1+3x) + C$

20. $\int \operatorname{sech} 2x \operatorname{tagh} 2x\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{sech} 2x + C$

21. $\displaystyle\int \operatorname{csch} x\,dx = \ln\sqrt{\frac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}} + C$

22. $\int \cosh^2 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}(\operatorname{senh} x + x) + C$

23. $\int \coth^2 3x\,dx = x - \frac{1}{3}\coth 3x + C$

24. $\int \operatorname{senh}^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cosh^3 x - \cosh x + C$

25. $\int e^x \operatorname{senh} x\,dx = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x + C$

26. $\int e^{2x}\cosh x\,dx = \frac{1}{6}e^{3x} + \frac{1}{2}e^x + C$

27. $\int x\cosh x\,dx = x\operatorname{senh} x - \cosh x + C$

28. $\int x^2 \operatorname{senh} x\,dx = (x^2+2)\cosh x - 2x\operatorname{senh} x + C$

29. $\int \operatorname{senh}^3 x \cosh^2 x\,dx = \frac{1}{5}\cosh^5 x - \frac{1}{3}\cosh^3 x + C$

30. $\int \operatorname{senh} x \ln\cosh^2 x\,dx = \cosh x(\ln\cosh^2 x - 2) + C$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{3} + C$

32. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-25}} = \cosh^{-1}\frac{x}{5} + C$

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{4-9x^2} = \frac{1}{6}\operatorname{tagh}^{-1}\frac{3}{2}x + C$

34. $\displaystyle\int \frac{dx}{16x^2-9} = -\frac{1}{12}\coth^{-1}\frac{4}{3}x + C$

35. $\displaystyle\int \sqrt{x^2-9}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-9} - \frac{9}{2}\cosh^{-1}\frac{x}{3} + C$

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+17}} = \operatorname{senh}^{-1}\frac{x-1}{4} + C$

37. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+12x+5} = -\frac{1}{4}\coth^{-1}\left(x+\frac{3}{2}\right) + C$

38. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+4)^{3/2}}\,dx = \operatorname{senh}^{-1}\frac{1}{2}x - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + C$

39. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx = \operatorname{senh}^{-1} x - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$

Capítulo 32

Aplicaciones de las integrales indefinidas

CONOCIENDO la ecuación de una curva, $y = f(x)$, la pendiente m de la tangente a ella en uno de sus puntos, $P(x, y)$, viene dada por $m = f'(x)$. Recíprocamente, si la pendiente de la tangente en un punto, $P(x, y)$, de una curva es $m = dy/dx = f'(x)$ se puede hallar, por integración, una familia de curvas, $y = f(x) + C$. Para determinar una de ellas en particular es necesario asignar o determinar el valor de la constante C. Esto se puede realizar obligando a que la curva pase por el punto dado.

(Ver Problemas 1-4.)

UNA ECUACION $s = f(t)$, siendo s el espacio y t el tiempo, define de forma completa el movimiento rectilíneo de un cuerpo con respecto a un punto fijo, razón por la cual se denomina ley del movimiento. La velocidad y la aceleración vendrán dadas, en función del tiempo t, por

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t) \quad \text{y} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t)$$

Recíprocamente, si se conoce la velocidad (aceleración) en función del tiempo t y la posición (posición y velocidad) en un instante dado, normalmente el instante inicial $t = 0$, se puede obtener la ley del movimiento.

(Ver Problemas 7-10.)

Problemas resueltos

1. Hallar la ecuación de la familia de curvas cuya pendiente en un punto dado sea igual y de signo contrario al doble de la abscisa en dicho punto. Determinar la curva de la familia que pasa por el punto (1, 1).

Se sabe que $dy/dx = -2x$. Por tanto, $dy = -2x\,dx$, $\int dy = \int -2x\,dx$, e $y = -x^2 + C$. Esta es la ecuación de una familia de parábolas.

Sustituyendo $x = 1$, $y = 1$ en la ecuación de la familia, $1 = -1 + C$ y $C = 2$.
La ecuación de la curva de la familia que pasa por el punto (1, 1) es $y = -x^2 + 2$.

2. Hallar la ecuación de la familia de curvas cuya pendiente en un punto, $P(x, y)$, es $m = 3x^2y$ y determinar la curva de la familia que pasa por el punto (0, 8).

$$m = \frac{dy}{dx} = 3x^2y \quad \text{o} \quad \frac{dy}{y} = 3x^2\,dx. \quad \text{Por tanto} \quad \ln y = x^3 + C = x^3 + \ln c \quad \text{e} \quad y = ce^{x^3}.$$

Para $x = 0$ e $y = 8$, $8 = ce^0 = c$. La ecuación de la curva pedida es $y = 8e^{x^3}$.

3. Hallar la ecuación de la curva que pasa por el punto (1, 1) y es tangente a la recta $x + 12y = 13$ en dicho punto, sabiendo que en cualquier punto de ella se verifica $y'' = x^2 - 1$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = x^2 - 1. \text{ Por tanto } \int \frac{d}{dx}(y')\,dx = \int (x^2 - 1)\,dx \text{ e } y' = \frac{x^3}{3} - x + C_1.$$

En el punto (1, 1) la pendiente y' de la curva es igual a la pendiente, $-1/12$, de la recta. Por tanto, $-1/12 = \frac{1}{3} - 1 + C_1$
$C_1 = 7/12$, con lo cual

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{7}{12}, \quad \int dy = \int \left(\frac{1}{3}x^3 - x + \frac{7}{12}\right)dx, \quad y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{12}x + C_2$$

En (1, 1), $1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12} + C_2$ y $C_2 = \frac{5}{6}$. La ecuación pedida es $y = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{12}x + \frac{5}{6}$.

4. La familia de *curvas ortogonales* a un sistema de curvas dado es otro sistema de curvas en el que cada una de ellas corta en ángulo recto a cualquiera de la familia dada. Hallar la ecuación de la familia de curvas ortogonales a la familia de hipérbolas $x^2 - y^2 = c$.

En un punto cualquiera, $P(x, y)$, la pendiente de la hipérbola que pasa por él es $m_1 = x/y$ y, por tanto, la pendiente de la curva ortogonal que pasa por P será, $m_2 = dy/dx = -y/x$. Así pues,

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = -\ln|x| + \ln C' \quad \text{y} \quad |xy| = C'$$

La ecuación pedida es $xy = \pm C'$ o, simplemente, $xy = C$.

5. El incremento respecto del tiempo de una cierta magnitud q es proporcional al valor de dicha magnitud. Sabiendo que en el instante inicial $t = 0$, $q = 25$, y que en el instante $t = 2$, $q = 75$, hallar el valor de q en el instante $t = 6$.

Como $\dfrac{dq}{dt} = kq$, tendremos $\dfrac{dq}{q} = k\,dt$. De donde $\ln q = kt + \ln c$ o sea, $q = ce^{kt}$.

Para $t = 0$, $q = 25 = ce^0 = c$; o sea, $q = 25e^{kt}$.
Para $t = 2$, $q = 25e^{2k} = 75$; es decir, $e^{2k} = 3 = e^{1,10}$ y $k = 0,55$.
Para $t = 6$, $q = 25e^{0,55t} = 25e^{3,3} = 25(e^{1,1})^3 = 25(27) = 675$.

6. La velocidad con que una sustancia se transforma en otra es proporcional a la cantidad que queda sin transformar. Sabiendo que la cantidad de sustancia inicialmente presente es igual a 50 y que en el instante $t = 3$ es igual a 25, hallar el tiempo que transcurre hasta que la cantidad que queda sin transformar sea igual a $^1/_{10}$ de la inicial.

Si representamos por q la cantidad transformada en tiempo t; entonces

$$\frac{dq}{dt} = k(50-q), \quad \frac{dq}{50-q} = k\,dt, \quad \ln(50-q) = -kt + \ln c, \quad \text{y} \quad 50-q = de^{-kt}$$

Para $t = 0$, $q = 0$ y $c = 50$; por tanto, $50 - q = 50e^{-kt}$.
Para $t = 3$, $50 - q = 25 = 50e^{-3k}$; es decir, $e^{-3k} = 0,5 = e^{-0,69}$, $k = 0,23$, y $50 - q = 50e^{-0,23t}$,
Cuando la cantidad sin transformar es 5, $50e^{-0,23t} = 5$; o sea, $e^{-0,23t} = 0,1 = e^{-2,30}$ y $t = 10$.

7. Se lanza una pelota rodando por una superficie horizontal con una velocidad inicial de 25 metros por segundo. Debido al rozamiento, la velocidad disminuye a razón de 6 metros por segundo cada segundo. Hallar el espacio que recorrerá la pelota hasta detenerse.

$\dfrac{dv}{dt} = -6$ y $v = -6t + C_1$. Para $t = 0$, $v = 25$; por tanto $C_1 = 25$ y $v = -6t + 25$.

$v = ds/dt = -6t + 25$ y $s = -3t^2 + 25t + C_2$. Para $t = 0$, $s = 0$; por tanto $C_2 = 0$ y $s = -3t^2 + 25t$.
Para $v = 0$, $t = 25/6$, es decir, la pelota rueda durante 25/6 seg hasta que se detiene.
Para $t = 25/6$, $s = -3(25/6)^2 + 25(25/6) = -625/12 + 625/6 = 625/12$ m.

8. Desde un globo en reposo situado a una altura de 3 000 metros sobre la tierra, se lanza un objeto verticalmente hacia abajo con una velocidad inicial de 15 metros por segundo.

Suponiendo que la aceleración de la gravedad, g, es de 10 metros por segundo cada segundo, hallar la posición del objeto, y su velocidad, 20 segundos después de iniciado el descenso.

Tomando la vertical hacia arriba como sentido positivo, cuando el objeto abandone el globo,

$$a = dv/dt = -10 \text{ m/s}^2, \text{ de donde } v = -10t + C_1$$

Para $t = 0$, $v = -15$; por tanto, $C_1 = -15$. En estas condiciones $v = ds/dt = -10t - 15$, de donde $s = -5t^2 - 15t + C_2$.
Para $t = 0$, $s = 3\,000$; por tanto, $C_2 = 3\,000$, con lo que $s = -5t^2 - 15t + 3\,000$.
Para $t = 20$, $s = -5(20)^2 - 15(20) + 3\,000 = 700$ y $v = -10(20) - 15 = -215$.
Al cabo de 20 segundos, el objeto está a una altura de 700 metros sobre la tierra y su velocidad es de 215 m/s.

9. Desde un globo que se eleva a una velocidad de 15 metros por segundo, se deja caer un objeto cuando la altura de aquél sobre la tierra es de 200 metros. Hallar, suponiendo el valor de 10 metros por segundo cada segundo para la aceleración de la gravedad, g:

(*a*) la máxima altura sobre la tierra a la que llega a estar el objeto.
(*b*) el tiempo que está el objeto en el aire.
(*c*) la velocidad del objeto cuando llega al suelo.

Tomando la vertical hacia arriba como sentido positivo, tendremos:

$$a = dv/dt = -10 \text{ m/s}^2, \text{ de donde } v = -10t + C_1$$

Para $t = 0$, $v = 15$; por tanto $C_1 = 15$. En estas condiciones $v = ds/dt = -10t+15$, con lo que $s = -5t^2+15t+C_2$.
Para $t = 0$, $s = 200$; por tanto, $C_2 = 200$, de donde $s = -5t^2 + 15t + 200$.

(*a*) Cuando $v = 0$, $t = 3/2$ y $s = -5(3/2)^2 + 15(3/2) + 200 = 211,25$. La máxima altura alcanzada por el objeto es de 211,25 metros.

(*b*) Cuando $s = 0$, $-5t^2 + 15t + 200 = 0$, de donde $t = 8$. El objeto está en el aire durante 8 segundos.

(*c*) Cuando $t = 8$, $v = -10(8) + 15 = -65$. El objeto llega al suelo con una velocidad de 65 m/s.

10. La velocidad con que sale el agua por un orificio situado a una distancia de h metros con respecto a la superficie es $0{,}6\sqrt{2gh}$ metros por segundo, siendo la aceleración de la gravedad de 9,8 metros por segundo cada segundo. Hallar el tiempo que tardará en vaciarse un depósito cilíndrico de 1,5 metros de altura y 30 centímetros de radio a través de un orificio de 2 centímetros de diámetro situado en el fondo.

Sea h la profundidad del agua en el instante t. El agua que sale en un tiempo dt, forma un cilindro de vdt metros de altura, 0,01 metros de radio y $\pi(0{,}01)^2\, v\, dt = 0{,}6\pi(0{,}01)^2\sqrt{2gh}\, dt$ metros cúbicos de volumen.

Si llamamos $-dh$ al descenso de la superficie del agua, la disminución de volumen es $-\pi(0{,}3)^2dh$ metros cúbicos. Por tanto, $0{,}6\pi(0{,}01)^2\cdot 4{,}42\sqrt{h}\, dt = -\pi(0{,}3)^2dh$, o sea, $dt = -(340\, dh)/\sqrt{h}$, de donde $t = -680\sqrt{h} + C$. Para $t = 0$, $h = 1{,}5$ y $C = 680\sqrt{1{,}5}$; por tanto, $t = -680\sqrt{h} + 680\sqrt{1{,}5}$. Cuando el depósito esté vacío, $h = 0$, y $t = 680\sqrt{1{,}5}$ seg $= 14$ min, aproximadamente.

Problemas propuestos

11. Hallar la ecuación de la familia de curvas cuya pendiente es la indicada y la ecuación de la curva de la familia que pasa por el punto dado.

(*a*) $m = 4x$; $(1, 5)$ (*c*) $m = (x-1)^3$; $(3, 0)$ (*e*) $m = x/y$; $(4, 2)$ (*g*) $m = 2y/x$; $(2, 8)$
(*b*) $m = \sqrt{x}$; $(9, 18)$ (*d*) $m = 1/x^2$; $(1, 2)$ (*f*) $m = x^2/y^3$; $(3, 2)$ (*h*) $m = xy/(1+x^2)$; $(3, 5)$

Sol. (*a*) $y = 2x^2 + C$; $y = 2x^2 + 3$
(*b*) $3y = 2x^{3/2} + C$; $3y = 2x^{3/2}$
(*c*) $4y = (x-1)^4 + C$; $4y = (x-1)^4 - 16$
(*d*) $xy = Cx - 1$; $xy = 3x - 1$
(*e*) $x^2 - y^2 = C$; $x^2 - y^2 = 12$
(*f*) $3y^4 = 4x^3 + C$; $3y^4 = 4x^3 - 60$
(*g*) $y = Cx^2$; $y = 2x^2$
(*h*) $y^2 = C(1+x^2)$; $2y^2 = 5(1+x^2)$

12. (*a*) Hallar la ecuación de una curva sabiendo que pasa por el punto $P(2,6)$ en el que la pendiente es igual a 10 y que, en cualquier punto de ella, se verifica que $y'' = 2$. *Sol.* $y = x^2 + 6x - 10$.

(*b*) Hallar la ecuación de una curva sabiendo que pasa por el punto $P(1,0)$ en el que la pendiente es igual a 4 y que, en cualquiera de sus puntos, se verifica $y'' = 6x - 8$. *Sol.* $y = x^3 - 4x^2 + 9x - 6$.

13. Una partícula con movimiento rectilíneo, parte del origen O, en el instante $t = 0$, con una velocidad v. Hallar el espacio recorrido por la partícula durante el intervalo $t = t_1$ hasta $t = t_2$:

(*a*) $v = 4t + 1$; 0, 4 (*c*) $v = 3t^2 + 2t$; 2, 4 (*e*) $v = 2t - 2$; 0, 5
(*b*) $v = 6t + 3$; 1, 3 (*d*) $v = \sqrt{t} + 5$; 4, 9 (*f*) $v = t^2 - 3t + 2$; 0, 4

Sol. (*a*) 36, (*b*) 30, (*c*) 68, (*d*) $37\frac{2}{3}$, (*e*) 17, (*f*) 17/3.

14. Hallar la ecuación de la familia de curvas cuya subtangente en un punto cualquiera sea igual al doble de la abscisa en ese punto. *Sol.* $y^2 = Cx$.

15. Hallar la ecuación de la familia de curvas ortogonales a la familia de parábolas $y^2 = 2x + C$. *Sol.* $y = Ce^{-x}$.

16. Una partícula con movimiento rectilíneo parte del origen (en $t = 0$) con una velocidad inicial v_0 y aceleración a. Hallar la posición s en función del tiempo t (ley del movimiento).

(*a*) $a = 32$; $v_0 = 2$ (*b*) $a = -32$; $v_0 = 96$ (*c*) $a = 12t^2 + 6t$; $v_0 = -3$ (*d*) $a = 1/\sqrt{t}$; $v_0 = 4$
Sol. (*a*) $s = 16t^2 + 2t$ (*b*) $s = -16t^2 + 96t$ (*c*) $s = t^4 + t^3 - 3t$ (*d*) $s = \frac{4}{3}(t^{3/2} + 3t)$

17. Un vehículo lleva una velocidad de 15 kilómetros por hora y frena a razón de 0,8 metros por segundo en cada segundo. Hallar el espacio que recorre antes de detenerse. *Sol.* 11 metros.

18. Se lanza verticalmente hacia arriba una partícula desde un punto situado a una altura de 40 metros sobre el suelo con una velocidad inicial de 30 metros por segundo. Hallar (*a*) la velocidad de la partícula cuando está a una altura, de 80 metros, (*b*) el tiempo que tardará en alcanzar la máxima altura, (*c*) la velocidad de la partícula al llegar al suelo. Tómese $g = 10$ m/s². *Sol.* (*a*) 10 m/s, (*b*) 4 s, (*c*) 41,2 m/s.

19. Un bloque de hielo desliza hacia abajo por una pendiente con una aceleración de 4 metros por segundo al cuadrado. La pendiente tiene 60 metros de longitud y el bloque emplea en bajar 5 segundos. Hallar la velocidad inicial del bloque y la velocidad que lleva cuando diste 20 metros del fin de la pendiente. *Sol.* 2 m/s; 18 m/s.

20. Hallar la aceleración constante que debe tener una partícula para (*a*) recorrer 50 metros en 5 segundos, (*b*) detenerla en un espacio de 15 metros desde el instante en que su velocidad es de 45 metros por segundo. *Sol.* (*a*) 4 m/s², (*b*) $-67{,}5$ m/s².

21. La ley del crecimiento de una cierta bacteria viene dada por $dN/dt = 0{,}25N$. Sabiendo que inicialmente $N = 200$ hallar N en el instante $t = 8$. *Sol.* 1 478.

Capítulo 33

Integral definida

INTEGRAL DEFINIDA. Sea la función $f(x)$ continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$. Consideremos el intervalo dividido en n subintervalos $h_1, h_2, \ldots, h_n$, mediante los $(n-1)$ puntos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, siendo $a < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{n-1} < b$ y representemos ahora el punto a por ξ_0 y el b por ξ_n. A las longitudes de los subintervalos $h_1, h_2, \ldots, h_n$, las denominamos $\Delta_1 x = \xi_1 - \xi_0$, $\Delta_2 x$

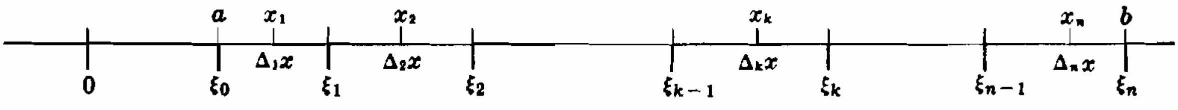


Fig. 33-1

$= \xi_2 - \xi_1, \ldots, \Delta_n x = \xi_n - \xi_{n-1}$, respectivamente. (Estas distancias se consideran con signo, siendo positivas cuando están de acuerdo con la desigualdad anterior.) Elijamos en cada subintervalo un punto; x_1 en h_1, x_2 en $h_2, \ldots, x_n$ en h_n y formemos la suma

(i) $$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x = f(x_1)\,\Delta_1 x + f(x_2)\,\Delta_2 x + \cdots + f(x_n)\,\Delta_n x$$

en la que cada término es igual al producto de la longitud del subintervalo por un valor de la función en el punto elegido del mismo. Sea λ_n la longitud del mayor de los subintervalos que figuran en (i) y supongamos que el número de estos aumenta indefinidamente de forma que $\lambda_n \to 0$. (Una forma de conseguirlo sería dividiendo los subintervalos iniciales en dos partes, cada una de ellas en otras dos, y así sucesivamente.) En estas condiciones,

(ii) $$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x$$

existe y su valor es independiente de la forma de subdividir el intervalo $a \leq x \leq b$ siempre que $\lambda_n \to 0$, y del punto x_k elegido en los subintervalos.

La demostración de este teorema queda fuera del propósito de este libro. En los Problemas 1-3 se halla este límite en el caso de funciones $f(x)$ convenientemente elegidos. Se comprenderá, sin embargo, que este procedimiento no se puede aplicar en la práctica con una función cualquiera. Además, con objeto de poder efectuar los cálculos que aquí figuran es necesario dar alguna relación entre las longitudes de los subintervalos (a los que supondremos todos de igual longitud) y seguir algún criterio en la elección del punto de cada subintervalo (por ejemplo, elegir el extremo izquierdo, el derecho o el punto medio de cada subintervalo).

Por convenio, se escribe

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x$$

El símbolo $\int_a^b f(x)\,dx$ se lee «integral definida de $f(x)$ con respecto a x, desde $x = a$ a $x = b$».

La función $f(x)$ recibe el nombre de *integrando* y a y b el de *límites inferior y superior de integración*, respectivamente.

(Ver Problemas 1-3.)

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA. Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo de integración $a \leq x \leq b$:

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx \;=\; 0$

2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \;=\; -\int_b^a f(x)\,dx$

3. $\displaystyle\int_a^b c\,f(x)\,dx \;=\; c\int_a^b f(x)\,dx\,,$ siendo c una constante.

Ver demostraciones en el Problema 4.

4. $\displaystyle\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;\pm\; \int_a^b g(x)\,dx$

5. $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx \;+\; \int_c^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx\,,$ cuando $a < c < b$

6. Primer teorema del valor medio:

   $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \;=\; (b-a)\,f(x_0)$ para al menos un valor $x = x_0$ entre a y b.

Ver demostración en el Problema 5.

7. Si $F(u) = \int_a^u f(x)\,dx$, se verifica $\dfrac{d}{du}F(u) = f(u)$. Ver demostración en el Problema 6.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO INTEGRAL. Regla de Barrow. Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, y $F(x)$ es la primitiva o integral indefinida da $f(x)$, se verifica

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; F(x)\Big|_a^b \;=\; F(b) \;-\; F(a)$$

Ver demostración en el Problema 7.

Ejemplo 1:

(*a*) Sea $f(x) = c$, una constante, y $F(x) = cx$; tendremos $\displaystyle\int_a^b c\,dx \;=\; cx\Big|_a^b \;=\; c(b-a).$

(*b*) Sea $f(x) = x$ y $F(x) = \frac{1}{2}x^2$; tendremos $\displaystyle\int_0^5 x\,dx \;=\; \frac{1}{2}x^2\Big|_0^5 \;=\; \frac{25}{2} - 0 \;=\; \frac{25}{2}.$

(*c*) Sea $f(x) = x^3$ y $F(x) = \frac{1}{4}x^4$; tendremos $\displaystyle\int_1^3 x^3\,dx \;=\; \frac{1}{4}x^4\Big|_1^3 \;=\; \frac{81}{4} - \frac{1}{4} \;=\; 20.$

Compárese este resultado con el de los Problemas 1-3. Se deja para el alumno la demostración de que para obtener el valor de (*c*), siendo $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$, se puede utilizar una primitiva o integral indefinida *cualquiera* de $f(x)$.

(Ver Problemas 8-20.)

TEOREMA DE BLISS. Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y se divide, como antes, este intervalo en subintervalos eligiendo dos puntos en cada uno de ellos (es decir, x_k y x_k' en el k-ésimo subintervalo), se verifica:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot g(x_k')\,\Delta_k x \;=\; \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$$

Observemos en primer lugar que el teorema es cierto si los puntos x_k y x_k' son idénticos. El valor del teorema reside en que cuando los puntos de cada subintervalo son distintos el resultado es el mismo que cuando coinciden. Para probar la validez del teorema, tendremos

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot g(x_k')\,\Delta_k x \;=\; \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot g(x_k)\,\Delta_k x \;+\; \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\{g(x_k') - g(x_k)\}\,\Delta_k x$$

y observando que cuando $n \to +\infty$ (esto es, $\Delta_k x \to 0$), x_k y x_k' tienden a confundirse y al ser $g(x)$ continua, $g(x_k') - g(x_k) \to 0$.