PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA. Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo de integración $a \leq x \leq b$:

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3. $\displaystyle\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$, siendo c una constante.

Ver demostraciones en el Problema 4.

4. $\displaystyle\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

5. $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$, cuando $a < c < b$

6. Primer teorema del valor medio:

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(x_0)$ para al menos un valor $x = x_0$ entre a y b.

Ver demostración en el Problema 5.

7. Si $F(u) = \displaystyle\int_a^u f(x)\,dx$, se verifica $\dfrac{d}{du}F(u) = f(u)$. Ver demostración en el Problema 6.

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO INTEGRAL. Regla de Barrow. Si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, y $F(x)$ es la primitiva o integral indefinida da $f(x)$, se verifica

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ver demostración en el Problema 7.

Ejemplo 1:

(*a*) Sea $f(x) = c$, una constante, y $F(x) = cx$; tendremos $\displaystyle\int_a^b c\,dx = cx\Big|_a^b = c(b-a)$.

(*b*) Sea $f(x) = x$ y $F(x) = \frac{1}{2}x^2$; tendremos $\displaystyle\int_0^5 x\,dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^5 = \frac{25}{2} - 0 = \frac{25}{2}$.

(*c*) Sea $f(x) = x^3$ y $F(x) = \frac{1}{4}x^4$; tendremos $\displaystyle\int_1^3 x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20$.

Compárese este resultado con el de los Problemas 1-3. Se deja para el alumno la demostración de que para obtener el valor de (*c*), siendo $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + C$, se puede utilizar una primitiva o integral indefinida *cualquiera* de $f(x)$.

(Ver Problemas 8-20.)

TEOREMA DE BLISS. Si $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en el intervalo cerrado $a \leq x \leq b$ y se divide, como antes, este intervalo en subintervalos eligiendo dos puntos en cada uno de ellos (es decir, x_k y x_k' en el k-ésimo subintervalo), se verifica:

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot g(x_k')\,\Delta_k x = \int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx$$

Observemos en primer lugar que el teorema es cierto si los puntos x_k y x_k' son idénticos. El valor del teorema reside en que cuando los puntos de cada subintervalo son distintos el resultado es el mismo que cuando coinciden. Para probar la validez del teorema, tendremos

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot g(x_k')\,\Delta_k x = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot g(x_k)\,\Delta_k x + \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\{g(x_k') - g(x_k)\}\,\Delta_k x$$

y observando que cuando $n \to +\infty$ (esto es, $\Delta_k x \to 0$), x_k y x_k' tienden a confundirse y al ser $g(x)$ continua, $g(x_k') - g(x_k) \to 0$.

Problemas resueltos

Hallar en los Problemas 1-3 las integrales definidas estableciendo el valor S_n y calculando su límite cuando $n \to +\infty$.

1. $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$, siendo c una constante.

Dividamos el intervalo $a \le x \le b$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = (b-a)/n$. Como el integrando es $f(x) = c$, resulta $f(x_k) = c$, cualquiera que sea el punto x_k del k-enésimo subintervalo y, por tanto,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x = \sum_{k=1}^{n} c(\Delta x) = (c + c + \cdots + c)(\Delta x) = nc \cdot \Delta x = nc\frac{b-a}{n} = c(b-a)$$

Luego $$\int_a^b c\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} c(b-a) = c(b-a)$$

2. $\int_0^5 x\,dx = 25/2.$

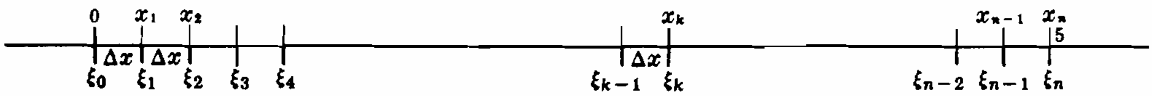

Fig. 33-2

Dividamos el intervalo $0 \le x \le 5$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = 5/n$. Eligiendo los puntos x_k coincidiendo con el extremo derecho de cada subintervalo, es decir, $x_1 = \Delta x$, $x_2 = 2\,\Delta x$, ..., $x_n = n\,\Delta x$, tendremos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x = \sum_{k=1}^{n} (k \cdot \Delta x)\,\Delta x = (1 + 2 + \cdots + n)(\Delta x)^2 = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{5}{n}\right)^2 = \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

y $$\int_0^5 x\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{25}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{25}{2}$$

3. $\int_1^3 x^3\,dx = 20.$

Dividir el intervalo $1 \le x \le 3$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = 2/n$

I. Tomemos los puntos x_k coincidiendo con el extremo izquierdo de cada subintervalo, como se indica en la Fig. 33-3, es decir, $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \Delta x$, ..., $x_n = 1 + (n-1)\,\Delta x$. En estas condiciones,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k n = x_1^3 \cdot \Delta x + x_2^3 \cdot \Delta x + \cdots + x_n^3 \cdot \Delta x \\ &= [1 + (1+\Delta x)^3 + (1 + 2\cdot\Delta x)^3 + \cdots + \{1 + (n-1)\,\Delta x\}^3]\,\Delta x \\ &= [n + 3\{1 + 2 + \cdots + (n-1)\}\,\Delta x + 3\{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\}\,(\Delta x)^2 \\ &\qquad + \{1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3\}\,(\Delta x)^3]\,\Delta x \\ &= \left[n + 3\,\frac{(n-1)n}{1\cdot 2}\left(\frac{2}{n}\right) + 3\,\frac{(n-1)n(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{(n-1)^2n^2}{(1\cdot 2)^2}\left(\frac{2}{n}\right)^3\right]\frac{2}{n} \\ &= 2 + \left(6 - \frac{6}{n}\right) + \left(8 - \frac{12}{n} + \frac{4}{n^2}\right) + \left(4 - \frac{8}{n} + \frac{4}{n^2}\right) = 20 - \frac{26}{n} + \frac{8}{n^2} \end{aligned}$$

y $$\int_1^3 x^3\,dx = \lim_{n\to+\infty}\left(20 - \frac{26}{n} + \frac{8}{n^2}\right) = 20$$

Fig. 33-3

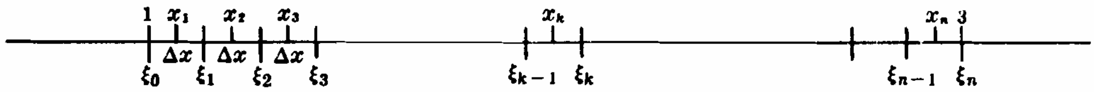

Fig. 33-4

II. Tomemos los puntos x_k coincidiendo con los puntos medios de los subintervalos, como se indica en la Fig. 33-4; es decir,

$$x_1 = 1+\tfrac{1}{2}\Delta x,\quad x_2 = 1+\tfrac{3}{2}\Delta x,\quad \ldots,\quad x_n = 1+\frac{2n-1}{2}\Delta x. \quad \text{Tendremos}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \left[(1+\tfrac{1}{2}\Delta x)^3 + (1+\tfrac{3}{2}\Delta x)^3 + \cdots + \left(1+\frac{2n-1}{2}\Delta x\right)^3\right]\Delta x \\
&= \Bigg[\{1+3(\tfrac{1}{2})\Delta x + 3(\tfrac{1}{2})^2(\Delta x)^2 + (\tfrac{1}{2})^3(\Delta x)^3\} + \{1+3(\tfrac{3}{2})(\Delta x)+3(\tfrac{3}{2})^2(\Delta x)^2 + (\tfrac{3}{2})^3(\Delta x)^3\} + \cdots \\
&\qquad + \left\{1+3\left(\frac{2n-1}{2}\right)(\Delta x) + 3\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2(\Delta x)^2 + \left(\frac{2n-1}{2}\right)^3(\Delta x)^3\right\}\Bigg]\Delta x \\
&= n\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{3}{2}n^2\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{4}(4n^3-n)\left(\frac{2}{n}\right)^3 + \frac{1}{8}(2n^4-n^2)\left(\frac{2}{n}\right)^4 \\
&= 2+6+\left(8-\frac{2}{n^2}\right)+\left(4-\frac{2}{n^2}\right) = 20-\frac{4}{n^2}
\end{aligned}$$

y
$$\int_1^3 x^3\,dx = \lim_{n\to+\infty}\left(20-\frac{4}{n^2}\right) = 20$$

4. Demostrar que:

(*a*) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$. La longitud del intervalo de integración es 0; luego $\Delta x = 0$, $S_n = 0$, y

$$\int_a^a f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = 0.$$

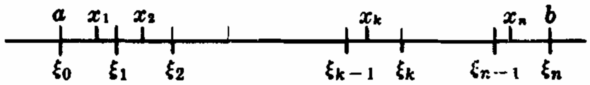

Fig. 33-5

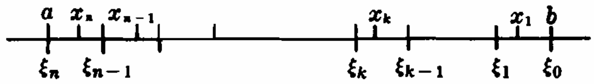

Fig. 33-6

(*b*) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. Para la integral del primer miembro, dividamos el intervalo $a \le x \le b$ de forma que los puntos x_k sean los indicados en la Fig. 33-5. Para la integral del segundo miembro, elegimos el intervalo (Fig. 33-6) exactamente igual al anterior, excepto que los puntos ξ_k y x_k se numeran de derecha a izquierda en lugar de izquierda a derecha. En estas condiciones, el valor de S_n a partir de lo indicado en la Fig. 33-5 será igual al calculado a partir de la Fig. 33-6, salvo que los signos de $\Delta_k x$ son positivos en el primer caso, y negativos en el segundo. Así pues,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

(*c*) $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$. Efectuando apropiadamente la subdivisión del intervalo y la elección de los puntos de los subintervalos,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c\,f(x_k)\,\Delta_k x = c\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x$$

De donde
$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x = c\int_a^b f(x)\,dx$$

5. Demostrar el primer teorema del valor medio del cálculo integral: Si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \le x \le b$, se verifica: $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(x_0)$ al menos para un valor $x = x_0$ comprendido entre a y b.

El teorema es cierto [ver Ejemplo 1 (*a*)] cuando $f(x) = c$, una constante. En los demás casos, sean m y M el mínimo y el máximo absolutos, respectivamente, de $f(x)$ en el intervalo $a \le x \le b$. Realizando de forma conveniente la subdivisión del intervalo y la elección de los puntos de los subintervalos,

$$\sum_{k=1}^{n} m\,\Delta_k x \quad < \quad \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x \quad < \quad \sum_{k=1}^{n} M\,\Delta_k x$$

Ahora bien, cuando $n \to +\infty$, tenemos

$$\int_a^b m\,dx \quad < \quad \int_a^b f(x)\,dx \quad < \quad \int_a^b M\,dx$$

que, por el Problema 1, se transforma en

$$m(b-a) \quad < \quad \int_a^b f(x)\,dx \quad < \quad M(b-a)$$

Por tanto

$$m \quad < \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \quad < \quad M$$

de forma que $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = N$, siendo N un número comprendido entre m y M. Como $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$, tomará, al menos una vez, todos los valores comprendidos entre m y M (ver Teorema I, Capítulo 3). Por consiguiente, debe existir un valor de x, $x = x_0$, para el cual $f(x_0) = N$. Así pues,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \;=\; N \;=\; f(x_0) \qquad \text{y} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \;=\; (b-a)\,f(x_0)$$

6. Demostrar que si $F(u) = \int_a^u f(x)\,dx$, se verifica $\frac{d}{du}F(u) = f(u)$.

Para calcular la derivada, pondremos

$$F(u+\Delta u) - F(u) \quad = \quad \int_a^{u+\Delta u} f(x)\,dx - \int_a^u f(x)\,dx$$

y según las Propiedades 2, 5 y 6, llegamos a

$$\begin{aligned} F(u+\Delta u) - F(u) &= \int_u^a f(x)\,dx + \int_a^{u+\Delta u} f(x)\,dx = \int_u^{u+\Delta u} f(x)\,dx \\ &= f(u_0)\cdot\Delta u, \quad \text{siendo } u < u_0 < u+\Delta u \end{aligned}$$

Por tanto

$$\frac{F(u+\Delta u) - F(u)}{\Delta u} = f(u_0) \qquad \text{y} \qquad \frac{dF}{du} = \lim_{\Delta u\to 0}\frac{F(u+\Delta u)-F(u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u\to 0} f(u_0) = f(u)$$

ya que cuando $\Delta u \to 0$, $u_0 \to u$.

Esta propiedad se suele expresar en la forma:

(i) $$\text{Si } F(x) = \int_a^x f(x)\,dx, \quad \text{se verifica } F'(x) = f(x).$$

El haber empleado la letra u en el desarrollo anterior, es debido a evitar toda confusión entre las diversas x. Obsérvese en (i) que $F(x)$ es una función del límite superior de integración x y no de la letra x que figura en el integrando $f(x)\,dx$. En otras palabras, esta propiedad también se puede expresar en la forma:

$$\text{Si } F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad \text{se verifica } F'(x) = f(x).$$

De (i) se deduce que $F(x)$ es simplemente una primitiva o integral indefinida de $f(x)$.

7. Demostrar que si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y si $F(x)$ es una integral indefinida de $f(x)$, se verifica

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a)$$

Aplicando la última expresión del Problema 6

$$\int_a^x f(x)\,dx \quad = \quad F(x) + C$$

Cuando el límite superior de integración es $x = a$, tenemos

$$\int_a^a f(x)\,dx \;=\; 0 \;=\; F(a) + C \qquad \text{y} \qquad C = -F(a)$$

Así pues, $\int_a^b f(x)\,dx = F(x) - F(a)$ y cuando el límite superior de integración es $x = b$, tenemos lo que queremos demostrar,

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a)$$

Aplicar el teorema fundamental del cálculo integral o regla de Barrow para calcular las integrales siguientes.

8. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(2x^2 - x^3)\,dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3}$

9. $\displaystyle\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx = \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right]_{-3}^{-1} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{18}\right) = \frac{10}{9}$

10. $\displaystyle\int_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\,\Big]_{1}^{4} = 2(\sqrt{4} - \sqrt{1}) = 2$

11. $\displaystyle\int_{-2}^{3} e^{-x/2}\,dx = -2e^{-x/2}\Big]_{-2}^{3} = -2(e^{-3/2} - e) = 4{,}9904$

12. $\displaystyle\int_{-6}^{-10}\frac{dx}{x+2} = \ln|x+2|\,\Big]_{-6}^{-10} = \ln 8 - \ln 4 = \ln 2$

13. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/4}\operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\,\Big]_{\pi/2}^{3\pi/4} = -\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} - 0\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

14. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tag}\frac{1}{2}x\,\Big]_{-2}^{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\pi - \left(-\frac{1}{4}\pi\right)\right] = \frac{1}{4}\pi$

15. $\displaystyle\int_{-5}^{-3}\sqrt{x^2-4}\,dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - 2\ln|x + \sqrt{x^2-4}|\right]_{-5}^{-3} = \frac{5}{2}\sqrt{21} - \frac{3}{2}\sqrt{5} - 2\ln\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{21}}$

16. $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x^2-9} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|\Big]_{-1}^{2} = \frac{1}{6}\left(\ln\frac{1}{5} - \ln 2\right) = \frac{1}{6}\ln 0{,}1$

17. $\displaystyle\int_{1}^{e}\ln x\,dx = \Big[x\ln x - x\Big]_{1}^{e} = (e\ln e - e) - (\ln 1 - 1) = 1$

18. **Calcular $\displaystyle\int_{3}^{6} xy\,dx$ siendo $x = 6\cos\theta$, $y = 2\operatorname{sen}\theta$,**

Expresando x, y, dx, en función del parámetro θ y $d\theta$, y escribiendo los nuevos límites de integración correspondientes a los valores del parámetro, se halla la integral que resulta.

$dx = -6\operatorname{sen}\theta\,d\theta$. Cuando $x = 6\cos\theta = 6$, $\theta = 0$; y cuando $x = 6\cos\theta = 3$, $\theta = \pi/3$. Luego

$$\int_{3}^{6} xy\,dx = \int_{\pi/3}^{0}(6\cos\theta)(2\operatorname{sen}\theta)(-6\operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$

$$= -72\int_{\pi/3}^{0}\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta = -24\operatorname{sen}^3\theta\,\Big]_{\pi/3}^{0} = -24\{0 - (\sqrt{3}/2)^3\} = 9\sqrt{3}$$

19. Calcular $\displaystyle\int_{0}^{2\pi/3}\frac{d\theta}{5 + 4\cos\theta}$. $\displaystyle\int\frac{d\theta}{5+4\cos\theta} = \int\frac{\dfrac{2\,dz}{1+z^2}}{5 + 4\dfrac{1-z^2}{1+z^2}} = \int\frac{2\,dz}{9+z^2}.$

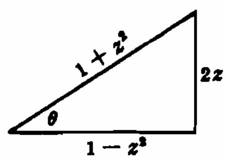

Fig. 33-7

Para determinar los límites de integración de z ($\theta = 2\operatorname{arc\,tag} z$): Cuando $\theta = 0$, $z = 0$; cuando $\theta = 2\pi/3$, $\operatorname{arc\,tag} z = \pi/3$ y $z = \sqrt{3}$. Por tanto,

$$\int_{0}^{2\pi/3}\frac{d\theta}{5+4\cos\theta} = 2\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dz}{9+z^2} = \frac{2}{3}\operatorname{arc\,tag}\frac{z}{3}\Big]_{0}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{9}$$

20. Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x}$. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x} = \int \frac{\dfrac{2\,dz}{1+z^2}}{1-\dfrac{2z}{1+z^2}} = \int \frac{2\,dz}{(1-z)^2}$.

Para $x=0$, arc tag $z = 0$ y $z=0$; Para $x=\pi/3$, arc tag $z = \pi/6$ y $z=\sqrt{3}/3$. Por tanto

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{1-\operatorname{sen} x} = 2\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{dz}{(1-z)^2} = \frac{2}{1-z}\Big]_0^{\sqrt{3}/3} = \frac{2}{1-\sqrt{3}/3} - 2 = \sqrt{3}+1$$

Problemas propuestos

21. Hallar la integral $\int_a^b c\,dx$ del Problema 1 dividiendo el intervalo $a \le x \le b$ en n subintervalos de longitudes $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots, \Delta_n x$. Obsérvese que $\sum_{k=1}^{n} \Delta_k x = b - a$.

22. Hallar la integral $\int_0^5 x\,dx$ del Problema 2 empleando subintervalos de igual longitud y (*a*) eligiendo los puntos x_k coincidiendo con el extremo izquierdo de los subintervalos, (*b*) eligiendo los puntos x_k coincidiendo con los puntos medios de los subintervalos, (*c*) eligiendo los puntos x_k a un tercio de sus longitudes, es decir, tomando $x_1 = \frac{1}{3}\Delta x$, $x_2 = \frac{4}{3}\Delta x, \ldots$

23. Comprobar que $\int_1^4 x^2\,dx = 21$ empleando subintervalos de igual longitud y eligiendo los puntos x_k (*a*) en el extremo derecho de los subintervalos (*b*) en el extremo izquierdo de los subintervalos, (*c*) en el punto medio de los subintervalos.

24. Con los mismos subintervalos y puntos elegidos en el Problema 23(*a*), calcular las integrales $\int_1^4 x\,dx$ y $\int_1^4 (x^2+x)\,dx$ y demostrar que $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

25. Hallar las integrales $\int_1^2 x^2\,dx$ y $\int_2^4 x^2\,dx$. Comparar la suma con el resultado del Problema 23 y demostrar que

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{cuando } a<c<b.$$

26. Calcular $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx = e-1$.

Ind. $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} e^{k\cdot\Delta x}\Delta x = e^{\Delta x}(e-1)\frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1}$ y $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x}{e^{\Delta x}-1}$ es una forma indeterminada del tipo 0/0.

27. Demostrar las propiedades 4 y 5 de la integral definida.

28. Aplicar el teorema fundamental o regla de Barrow para calcular:

(*a*) $\displaystyle\int_0^2 (2+x)\,dx = 6$

(*b*) $\displaystyle\int_0^2 (2-x)^2\,dx = 8/3$

(*c*) $\displaystyle\int_0^3 (3-2x+x^2)\,dx = 9$

(*d*) $\displaystyle\int_{-1}^2 (1-t^2)t\,dt = -9/4$

(*e*) $\displaystyle\int_1^4 (1-u)\sqrt{u}\,du = -116/15$

(*f*) $\displaystyle\int_1^8 \sqrt{1+3x}\,dx = 26$

(*g*) $\displaystyle\int_0^2 x^2(x^3+1)\,dx = 40/3$

(*h*) $\displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2$

(*i*) $\displaystyle\int_0^1 x(1-\sqrt{x})^2\,dx = 1/30$

(*j*) $\displaystyle\int_4^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-15}} = 6$

(*k*) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \tfrac{1}{4}a^2\pi$

(*l*) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \tfrac{2}{3}\pi - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$

(*m*) $\int_3^4 \frac{dx}{25-x^2} = \frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}$

(*n*) $\int_{-1/2}^{0} \frac{x^3\,dx}{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{9} - \frac{5}{8}$

(*o*) $\int_2^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}\,dx = 4\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}$

(*p*) $\int_8^{27} \frac{dx}{x-x^{1/3}} = \frac{3}{2}\ln\frac{8}{3}$

(*q*) $\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx = \ln 2 + \frac{1}{2}\pi - 2$

(*r*) $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{1}{2}t\,dt = 4$

(*s*) $\int_0^{\pi/3} x^2 \operatorname{sen} 3x\,dx = \frac{1}{27}(\pi^2-4)$

(*t*) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\cos 2x} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8}$

29. Demostrar que $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}} = \int_{-5}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$.

30. Hallar $\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} y\,dx = 3\pi$, siendo $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$.

31. Hallar $\int_1^4 \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \frac{15}{2} + \frac{1}{4}\ln 2$, siendo $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$.

32. Hallar $\int_2^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \sqrt{2}\,e^2(e-1)$, siendo $x = e^t\cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$.

33. Por medio de las fórmulas de reducción (Capítulo 26) deducir las fórmulas de Wallis:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \frac{1\cdot 3\ldots(n-3)(n-1)}{2\cdot 4\ldots(n-2)n}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{si } n \text{ es par y} > 0$$

$$= \frac{2\cdot 4\ldots(n-3)(n-1)}{1\cdot 3\ldots(n-2)n} \quad \text{si } n \text{ es impar y} > 1$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx = \frac{1\cdot 3\ldots(m-1)\cdot 1\cdot 3\ldots(n-1)}{2\cdot 4\ldots(m+n-2)(m+n)}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \text{si } m \text{ y } n \text{ son pares y} > 0$$

$$= \frac{2\cdot 4\ldots(m-3)(m-1)}{(n+1)(n+3)\ldots(n+m)} \quad \text{si } m \text{ es impar y} > 1$$

$$= \frac{2\cdot 4\ldots(n-3)(n-1)}{(m+1)(m+3)\ldots(m+n)} \quad \text{si es impar y} > 1$$

34. Hallar:

(*a*) $\int_3^{11} \sqrt{2x+3}\,dx = 98/3$

(*b*) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos 2x - 1}{\cos 2x + 1}\,dx = \frac{1}{4}\pi - 1$

(*c*) $\int_4^9 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = 4\ln\frac{3}{4} - 1$

(*d*) $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}(e^2+1)$

(*e*) $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{\cos^2 x - 5\cos x + 4} = \frac{1}{3}\ln\frac{7+3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}$

(*f*) $\int_{-2}^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+3}}\,dx = \ln\frac{3-2\sqrt{2}}{4-\sqrt{15}} + 2\sqrt{2} - \sqrt{15}$

(*g*) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\operatorname{sen} 2x} = \ln\sqrt{3}$

(*h*) $\int_1^3 \ln(x+\sqrt{x^2-1})\,dx = 3\ln(3+2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}$

(*i*) $\int_{-1}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \ln(\sqrt{2}-1)$

(*j*) $\int_{1/4}^{3/4} \frac{(x+1)\,dx}{x^2(x-1)} = 4\ln\frac{1}{3} - \frac{8}{3}$

(*k*) $\int_{-6}^{-3} \frac{(x+2)\,dx}{x(x-2)^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{4} + \frac{1}{5}$

(*l*) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{2+\operatorname{tag} x} = \frac{1}{5}\ln\frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{\pi}{10}$

Capítulo 34

Cálculo de áreas planas por integración

CONCEPTO DE AREA COMO LIMITE DE UNA SUMA. Sea $f(x)$ una función continua no negativa en ningún punto del intervalo cerrado $a \leq x \leq b$; la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x$ admite una interpretación geométrica sumamente importante. Dividamos el intervalo $a \leq x \leq b$ eligiendo los puntos x_k, como hemos visto en el capítulo anterior y levantemos, desde los extremos $\xi_0 = a$, ξ_1, ξ_2, . . ., $\xi_n = b$, perpendiculares al eje x; la región del plano limitada por la curva, el eje x y las ordenadas en los puntos $x = a$ y $x = b$, quedará dividida en n franjas, cada una de las cuales es, aproximadamente, un rectángulo cuya base está apoyada en el eje x y cuya altura es la ordenada levantada desde el punto x_k del subintervalo correspondiente. El área de la franja representada en la Fig. 34-1 es igual a $f(x_k)\Delta_k x$. Así, pues, la suma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta_k x$ representa el área de los n rectángulos.

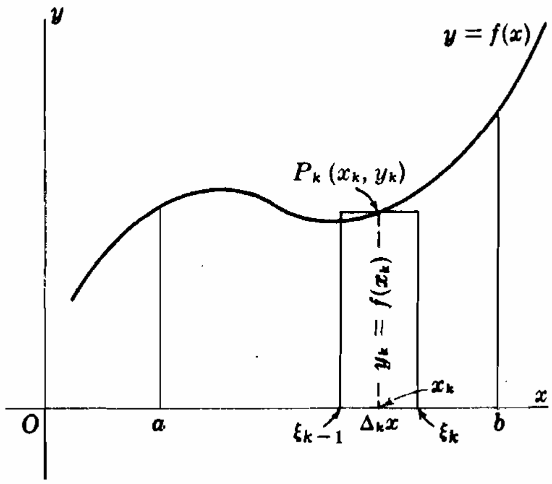

Fig. 34-1

El límite de esta suma, $\int_a^b f(x)\,dx$, cuando el número de franjas crece indefinidamente en la forma indicada en el Capítulo 33 es, por definición, el área de la porción del plano citada anteriormente, o dicho en pocas palabras, el área encerrada por la curva desde $x = a$ hasta $x = b$.

(Ver Problemas 1-2.)

Análogamente, sea $x = g(y)$ una función continua no negativa en ningún punto del intervalo $c \leq y \leq d$; la integral definida $\int_c^d g(y)\,dy$ es, por definición, el área limitada por la curva $x = g(y)$, el eje y y las ordenadas extremas $y = c$ e $y = d$. (Ver Problema 3.)

Si $y = f(x)$ es una función continua que no toma valor positivo en ningún punto del intervalo $a \leq x \leq b$, la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ será negativa, queriendo esto decir que el área está situada por debajo del eje x. De igual forma, si $x = g(y)$ es continua y no toma valor positivo en ningún punto del intervalo $c \leq y \leq d$, la integral $\int_c^d g(y)\,dy$ será negativa y el área estará situada a la izquierda del eje y. (Ver Problema 4.)

Si $y = f(x)$ cambia de signo en el intervalo $a \leq x \leq b$, o si $x = g(y)$ cambia de signo en el $c \leq y \leq d$, el área encerrada por la curva se hallará por medio de dos o más integrales definidas.

(Ver Problema 5.)

CALCULO DE AREAS POR INTEGRACION. Los pasos a tener en cuenta para plantear la integral definida que proporciona el valor del área a calcular son:

(1) Trazar un diagrama en el que figuren (*a*) el área a determinar, (*b*) una franja representativa y (*c*) el rectángulo genérico. Para ello tomaremos, sistemáticamente, el subintervalo representativo de longitud Δx (o Δy) y el punto x_k (o y_k) de este subintervalo en su mitad.

(2) Hallar el área del rectángulo y la suma correspondiente al área de los n rectángulos.

(3) Aplicar la regla de Barrow o teorema fundamental del cálculo integral (Capítulo 33) suponiendo que el número de rectángulos crece indefinidamente.

(Ver Problemas 6-14.)

Problemas resueltos

1. Hallar el área limitada por la curva $y = x^2$, el eje x y las ordenadas en los puntos $x = 1$ y $x = 3$.

En la Fig. 34-2 se representa el área a calcular, *KLMN*, una franja representativa, *RSTU*, y su rectángulo genérico, *RVWU*. La base de este rectángulo es $\Delta_k x$, la altura es $y_k = f(x_k) = x_k^2$ y, por tanto, su área vale $x_k^2 \cdot \Delta_k x$. Así pues,

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \Delta_k x = \int_1^3 x^2\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \text{ unidades de superficie}$$

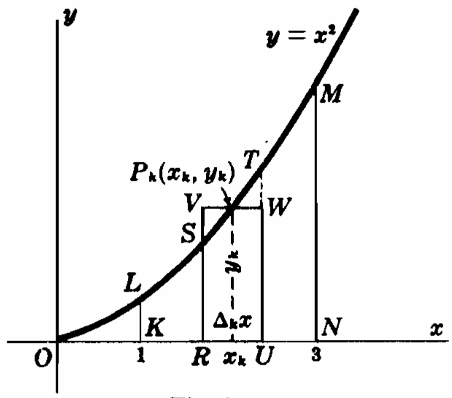

Fig. 34-2

2. Hallar el área comprendida entre el eje x y la parábola $y = 4x - x^2$.

La curva dada corta al eje x en los puntos $x = 0$ y $x = 4$, que serán los límites de integración. La base del rectángulo genérico es $\Delta_k x$, la altura $y_k = 4x_k - x_k^2$, y su área vale $(4x_k - x_k^2) \cdot \Delta_k x$. Por tanto,

$$A = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} (4x_k - x_k^2)\,\Delta_k x = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx$$

$$= \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = 32/3 \text{ unidades de superficie}$$

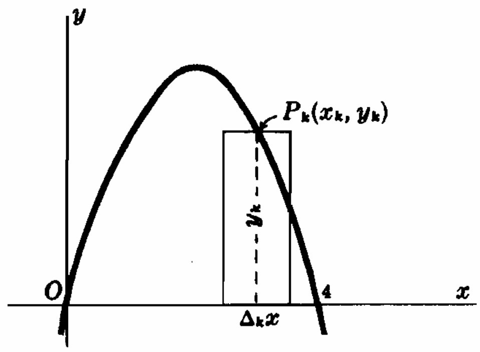

Fig. 34-3

Una vez que el alumno tenga en su mente todas las operaciones a realizar para hallar el valor de un área, es relativamente fácil plantear, directamente, la integral a resolver, una vez conocidos los límites de integración.

3. Hallar el área comprendida entre la parábola $x = 8 + 2y - y^2$, el eje y y las rectas $y = -1$ e $y = 3$.

En este caso, dividimos el área en franjas horizontales. La base del rectángulo genérico (Fig. 34-4) es Δy, la altura es $x = 8 + 2y - y^2$, y su área vale $(8 + 2y - y^2)\,\Delta y$. Por tanto, el área pedida será:

$$\int_{-1}^{3} (8 + 2y - y^2)\,dy = \left[8y + y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{3} = \frac{92}{3} \text{ unidades de superficie}$$

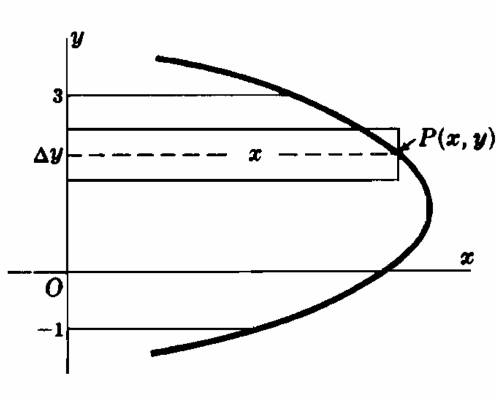

Fig. 34-4

4. Hallar el área limitada por la parábola $y = x^2 - 7x + 6$, el eje x y las rectas $x = 2$ y $x = 6$.

La base del rectángulo genérico (Fig. 34-5) es Δx, la altura es $-y = -(x^2 - 7x + 6)$, y el área vale $-(x^2 - 7x + 6)\,\Delta x$. El área pedida es,

$$A = \int_2^6 -(x^2 - 7x + 6)\,dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x\right)\Big]_2^6$$

$$= \frac{56}{3} \text{ unidades de superficie}$$

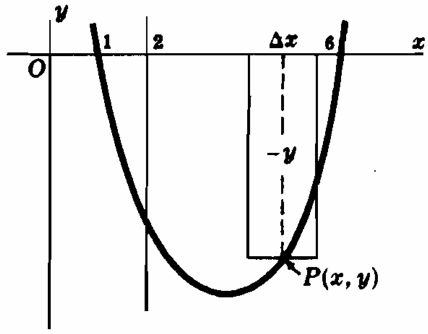

Fig. 34-5

5. Hallar el área comprendida entre la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje x.

La curva corta al eje x en $x = 0$, $x = 2$ y $x = 4$, como se indica en la Fig. 34-6. Trazando franjas verticales, el área del rectángulo genérico, con su base en el intervalo $0 < x < 2$, es $(x^3 - 6x^2 + 8x)\,\Delta x$, y el área situada por encima del eje x vendrá dada por $\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$. El área del rectángulo genérico con su base en el intervalo $2 < x < 4$ vale $-(x^3 - 6x^2 + 8x)\,\Delta x$, y el área situada por debajo del eje x viene dado por $\int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$. El área buscada será, en definitiva,

$$A = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx + \int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4$$

$$= 4 + 4 = 8 \text{ unidades de superficie}$$

En este caso, ha sido necesario calcular dos integrales definidas, ya que el integrando cambia de signo en el intervalo de integración. Con un planteamiento incorrecto del problema habríamos llegado a la conclusión de que $\int_0^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx = 0$.

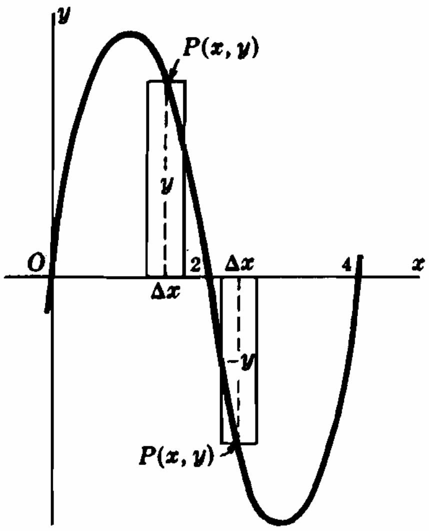

Fig. 34-6

6. Hallar el área comprendida entre la parábola $x = 4 - y^2$ y el eje y.

La parábola corta al eje x en el punto $(4, 0)$ y al eje y en los puntos $(0, 2)$ y $(0, -2)$. Vamos a resolver el problema de dos formas distintas.

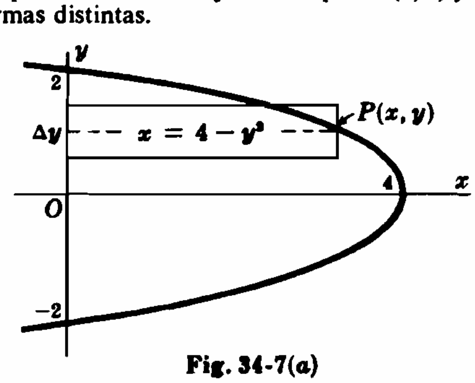

Fig. 34-7(a)

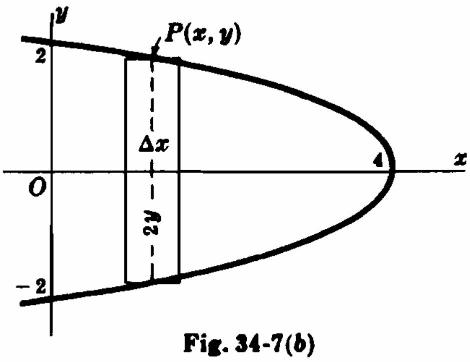

Fig. 34-7(b)

Empleando franjas horizontales. La base del rectángulo genérico [Fig. 34-7(a)] es Δy, su altura $4 - y^2$ y su área vale $(4 - y^2)\,\Delta y$. Los límites de integración de la integral definida son $y = -2$ e $y = 2$. Ahora bien, observando que el área situada por debajo del eje x es igual a la situada por encima de él, tendremos:

$$\int_{-2}^{2} (4 - y^2)\,dy = 2\int_0^2 (4 - y^2)\,dy = 2\left(4y - \frac{y^3}{3}\right)\Big]_0^2 = \frac{32}{3} \text{ unidades de superficie}$$

Empleando franjas verticales. La base del rectángulo genérico [Fig. 34-7(b)] es Δx, su altura $2y = 2\sqrt{4 - x}$, y su área vale $2\sqrt{4 - x}\,\Delta x$. Los límites de integración son $x = 0$ y $x = 4$. Por tanto, el área será:

$$\int_0^4 2\sqrt{4 - x}\,dx = -\frac{4}{3}(4 - x)^{3/2}\Big]_0^4 = \frac{32}{3} \text{ unidades de superficie}$$

7. Hallar el área comprendida entre la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = 2x - 4$.

La recta corta a la parábola en los puntos $(1, -2)$ y $(4, 4)$. En las figuras se puede observar que, si empleamos franjas verticales, unas van desde una rama de la parábola a la recta y otras desde una rama de la parábola a la otra. Si empleamos franjas horizontales, todas ellas van desde la recta a la parábola. Aquí vamos a resolver el problema de las dos formas para observar cuál de ellas es la más adecuada. Antes de empezar a calcular, conviene considerar, previamente, qué tipo de división del área a resolver es el más apto.

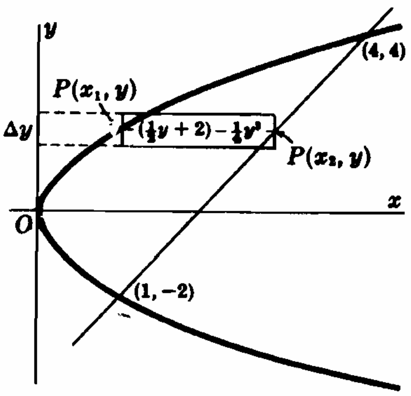

Fig. 34-8(*a*)

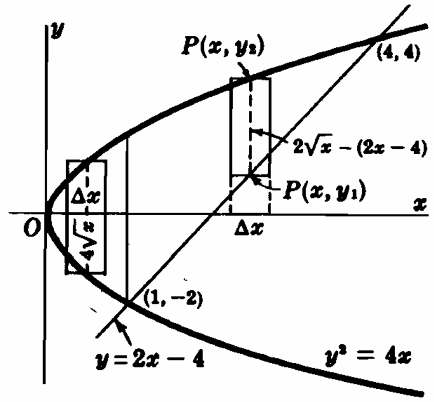

Fig. 34-8(*b*)

Empleando franjas horizontales. La base del rectángulo genérico [ver Fig. 34-8(*a*)] es Δy, su altura {(valor de x de la recta) — (valor de x de la parábola)} es $(\frac{1}{2}y + 2) - \frac{1}{4}y^2 = 2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2$, y su área vale $(2 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2)\Delta y$. El área pedida es

$$\int_{-2}^{4} (2 + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{4}y^2)\,dy \quad = \quad \left[2y + \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{12}\right]_{-2}^{4} \quad = \quad 9 \text{ unidades de superficie}$$

Empleando franjas verticales. Dividimos el área por la recta $x = 1$ [ver Fig. 34-8(*b*)]. El rectángulo genérico, a la izquierda de esta recta, tiene de base Δx, de altura (teniendo en cuenta la simetría de la figura) $2y = 4\sqrt{x}$ y su área vale $4\sqrt{x}\,\Delta x$. El rectángulo genérico, a la derecha de la recta, tiene de base Δx, de altura $2\sqrt{x} - (2x - 4) = 2\sqrt{x} - 2x + 4$ y su área vale $(2\sqrt{x} - 2x + 4)\,\Delta x$. El área pedida es, entonces,

$$\int_0^1 4\sqrt{x}\,dx + \int_1^4 (2\sqrt{x} - 2x + 4)\,dx \quad = \quad \left[\frac{8}{3}x^{3/2}\right]_0^1 + \left[\frac{4}{3}x^{3/2} - x^2 + 4x\right]_1^4 \quad = \quad \frac{8}{3} + \frac{19}{3} \quad = \quad 9 \text{ un. sup.}$$

8. Hallar el área comprendida entre las parábolas $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$.

Las parábolas se cortan en los puntos $(0, 0)$ y $(4, 8)$. En la figura se observa que lo más adecuado es dividir el área mediante franjas verticales.

El rectángulo genérico tiene de base Δx, de altura, {(valor de y en el límite superior) — (valor de y en el límite inferior)} $= (6x - x^2) - (x^2 - 2x) = 8x - 2x^2$, y su área vale $(8x - 2x^2)\,\Delta x$. El área pedida es

$$\int_0^4 (8x - 2x^2)\,dx \quad = \quad \left[4x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^4 \quad = \quad \frac{64}{3} \text{ un. sup.}$$

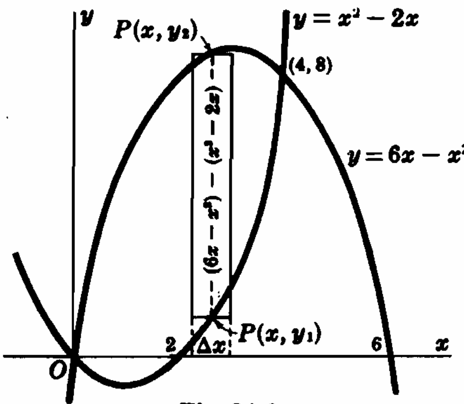

Fig. 34-9

9. Hallar el área limitada por la curva $y^2 = x^2 - x^4$.

La curva es simétrica con respecto a los ejes coordenados. Por tanto, el área será 4 veces la correspondiente al primer cuadrante.

La base del rectángulo genérico es Δx, su altura $y = \sqrt{x^2 - x^4} = x\sqrt{1 - x^2}$, y su área vale $x\sqrt{1 - x^2}\,\Delta x$. El área buscada es, pues,

$$4\int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}\,dx \quad = \quad \left[-\frac{4}{3}(1 - x^2)^{3/2}\right]_0^1$$

$$= \quad \frac{4}{3} \text{ unidades de superficie}$$

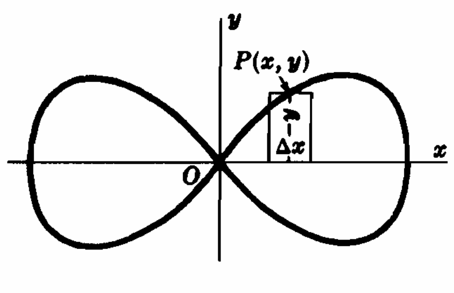

Fig. 34-10

10. Hallar el área del menor de los sectores que la recta $x = 3$ determina en el círculo $x^2 + y^2 = 25$. (Ver Fig. 34-11.)

$$A = \int_3^5 2y\,dx = 2\int_3^5 \sqrt{25 - x^2}\,dx = 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2}\text{ arc sen }\frac{x}{5}\right]_3^5$$

$$= \left(\frac{25}{2}\pi - 12 - 25\text{ arc sen }\frac{3}{5}\right)\text{ unidades de superficie}$$

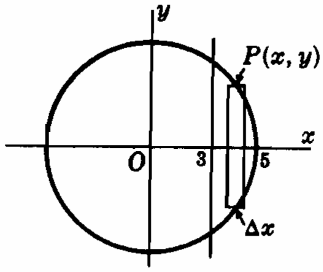

Fig. 34-11

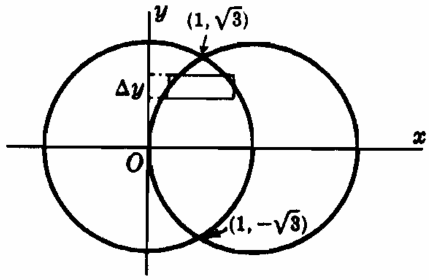

Fig. 34-12

11. Hallar el área de la intersección de los círculos $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 4x$. (Ver Fig. 34-12.)

Los círculos se cortan en los puntos $(1, \pm\sqrt{3})$.

El rectángulo genérico se extiende desde $x = 2 - \sqrt{4 - y^2}$ hasta $x = \sqrt{4 - y^2}$.

$$A = 2\int_0^{\sqrt{3}} \{\sqrt{4-y^2} - (2 - \sqrt{4-y^2})\}\,dy = 4\int_0^{\sqrt{3}} (\sqrt{4-y^2} - 1)\,dy$$

$$= 4\left[\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2} + 2\text{ arc sen }\frac{1}{2}y - y\right]_0^{\sqrt{3}} = \left(\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}\right)\text{ unidades de superficie}$$

12. Hallar el área limitada por la curva $y^2 = x^4(4 + x)$. (Ver Fig. 34-13.)

$$A = \int_{-4}^{0} 2y\,dx = 2\int_{-4}^{0} x^2\sqrt{4+x}\,dx. \quad \text{Haciendo } 4 + x = z^2, \text{ tendremos}$$

$$A = 4\int_0^2 (z^2-4)^2 z^2\,dz = 4\left[\frac{z^7}{7} - \frac{8z^5}{5} + \frac{16z^3}{3}\right]_0^2 = \frac{4096}{105}\text{ unidades de superficie}$$

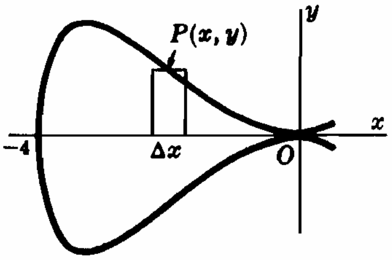

Fig. 34-13

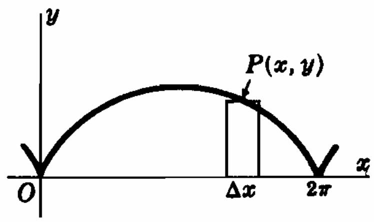

Fig. 34-14

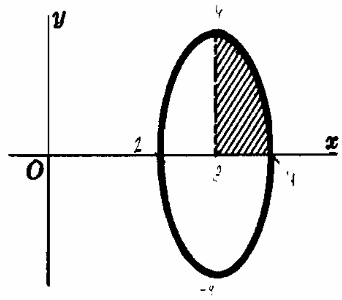

Fig. 34-15

13. Hallar el área limitada por el arco de cicloide $x = \theta - \text{sen }\theta$, $y = 1 - \cos\theta$. (Ver Fig. 34-14.)

Cuando θ varía de 0 a 2π, se describe un arco completo. Por tanto, $dx = (1 - \cos\theta)\,d\theta$ y

$$A = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} y\,dx = \int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)(1-\cos\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$= \left[\frac{3}{2}\theta - 2\text{ sen }\theta + \frac{1}{4}\text{ sen }2\theta\right]_0^{2\pi} = 3\pi\text{ unidades de superficie}$$

14. Hallar el área limitada por la curva $x = 3 + \cos\theta$, $y = 4\text{ sen }\theta$. (Ver Fig. 34-15.)

Cuando θ varía, de *derecha a izquierda*, desde 0 a $\frac{1}{2}\pi$, se describe el área rayada de la figura, que vale, $\frac{1}{4}$ del área pedida.

$$A = -4\int_0^{\pi/2} (4\text{ sen }\theta)(-\text{sen }\theta)\,d\theta = 16\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\theta\,d\theta = 8\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= 8\left[\theta - \frac{1}{2}\text{ sen }2\theta\right]_0^{\pi/2} = 4\pi\text{ unidades de superficie}$$

Problemas propuestos

15. Hallar el área limitada por las curvas y rectas que se indican:

(*a*) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 5$
(*b*) $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$
(*c*) $y = 4x - x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$
(*d*) $x = 1 + y^2$, $x = 10$
(*e*) $x = 3y^2 - 9$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$
(*f*) $x = y^2 + 4y$, $x = 0$
(*g*) $y = 9 - x^2$, $y = x + 3$
(*h*) $y = 2 - x^2$, $y = -x$
(*i*) $y = x^2 - 4$, $y = 8 - 2x^2$
(*j*) $y = x^4 - 4x^2$, $y = 4x^2$
(*k*) La curva dada por $y^2 = x^2(a^2 - x^2)$
(*l*) La curva dada por $9ay^2 = x(3a - x)^2$
(*m*) $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 0$, $x = 2$
(*n*) $y = e^{x/a} + e^{-x/a}$, $y = 0$, $x = \pm a$
(*o*) $xy = 12$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e^2$
(*p*) $y = 1/(1 + x^2)$, $y = 0$, $x = \pm 1$
(*q*) $y = \operatorname{tag} x$, $x = 0$, $x = \frac{1}{4}\pi$
(*r*) Un sector circular de radio r y ángulo α.
(*s*) La elipse $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$.
(*t*) $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta - 1$, $y = 2 \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 2\theta$.
(*u*) $x = a\cos^3 t$, $y = a \operatorname{sen}^3 t$.
(*v*) Primer arco de $y = e^{-ax} \operatorname{sen} ax$.
(*w*) $y = xe^{-x^2}$, $y = 0$, y la ordenada máxima.
(*x*) Las dos ramas de $(2x - y)^2 = x^3$ y $x = 4$.
(*y*) Dentro de $y = 25 - x^2$, $256x = 3y^2$, $16y = 9x^2$.

Soluciones: (*a*) 39 unidades de superficie, (*b*) 20, (*c*) 22/3, (*d*) 36, (*e*) 8, (*f*) 32/3, (*g*) 125/6, (*h*) 9/2, (*i*) 32, (*j*) $512\sqrt{2}/15$, (*k*) $2a^3/3$, (*l*) $8\sqrt{3}a^2/5$, (*m*) $(e^2 + 1/e^2 - 2)$, (*n*) $2a(e - 1/e)$, (*o*) 24, (*p*) $\frac{1}{2}\pi$, (*q*) $\frac{1}{2}\ln 2$, (*r*) $\frac{1}{2}r^2\alpha$, (*s*) πab, (*t*) 6π, (*u*) $3\pi a^2/8$, (*v*) $(1 + 1/e^{\pi})/2a$, (*w*) $\frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{e})$, (*x*) 128/5, (*y*) 98/3 unidades de superficie.

La *ordenada media* de la curva $y = f(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$ viene dada por

$$\frac{\text{Area}}{\text{Base}} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a}$$

16. Hallar la ordenada de (*a*) una semicircunferencia, (*b*) la parábola $y = 4 - x^2$ desde $x = -2$ hasta $x = 2$.

Sol. (*a*) $\pi r/4$, (*b*) 8/3.

17. (*a*) Hallar la ordenada media de un arco de la cicloide $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ con respecto a x.

(*b*) Idem, con respecto a θ.

Sol. (*a*) $\dfrac{1}{2\pi a}\displaystyle\int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos\theta)^2\,d\theta = \dfrac{3a}{2}$, (*b*) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} a(1 - \cos\theta)\,d\theta = a$

18. En la caída libre de un cuerpo, $s = \frac{1}{2}gt^2$ y $v = gt = \sqrt{2gs}$.

(*a*) Demostrar que el valor medio de v con respecto a t en el intervalo $0 \leq t \leq t_1$ es igual a la mitad de la velocidad final.

(*b*) Demostrar que el valor medio de v con respecto a s en el intervalo $0 \leq s \leq s_1$ es igual a dos tercios de la velocidad final.

Capítulo 35

Volúmenes de sólidos de revolución

UN SOLIDO DE REVOLUCION está generado por la rotación de un área plana alrededor de una recta del plano o eje de revolución. El *volumen* de un sólido de revolución se puede hallar por uno de los procedimientos siguientes:

METODO DEL DISCO

A. El eje de rotación forma parte del contorno del área plana.

(1) Se traza un diagrama indicando el área generatriz, una franja representativa perpendicular al eje de rotación, y su rectángulo genérico, como se hizo en el capítulo anterior.

(2) Se halla el volumen del disco producido en la rotación del rectángulo genérico alrededor del eje de rotación y la suma correspondiente a los n rectángulos.

(3) Se aplica la regla de Barrow o teorema fundamental del cálculo integral (Capítulo 33) suponiendo que el número de rectángulos crece indefinidamente.

(Ver Problemas 1-2.)

B. El eje de rotación no forma parte del contorno del área plana.

(1) Se procede como en el apartado (1) anterior.

(2) Se prolongan los lados del rectángulo genérico, $ABCD$, hasta que corten al eje de rotación en E y en F (ver Fig. 35-3 correspondiente al Problema 3). Cuando este rectángulo gire alrededor del eje de rotación se produce un cilindro cuyo volumen es igual a la diferencia entre los volúmenes generados por los rectángulos $EABF$ y $ECDF$ al girar con respecto al mismo eje. Se halla la diferencia de los dos volúmenes y se procede como en el apartado (2) anterior.

(3) Se procede como en el apartado (3) anterior. (Ver Problemas 3-4.)

METODO DEL ANILLO

(1) Se dibuja, en un diagrama, el área generatriz, una franja representativa paralela al eje de rotación, y su rectángulo correspondiente.

(2) Se halla el volumen (= circunferencia media $\times$ altura $\times$ espesor) del anillo cilíndrico producido en la rotación del rectángulo genérico con respecto al eje de giro y se halla la suma correspondiente a los n rectángulos.

(3) Se aplica el teorema fundamental, o regla de Barrow, suponiendo que el número de rectángulos crece indefinidamente.

(Ver Problemas 5-8.)

Problemas resueltos

1. Hallar el volumen generado en la rotación del área del primer cuadrante limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la ordenada correspondiente a $x = 2$ con respecto al eje x. (Ver Fig. 35-1.)

Dividiendo el área mediante franjas verticales, cuando el rectángulo genérico de la Fig. 35-1 gire alrededor del eje x se produce un disco de radio y, de altura Δx y de volumen $\pi y^2 \Delta x$. La suma de los volúmenes de los n discos, correspondientes a los n rectángulos, es $\Sigma \pi y^2 \Delta x$, y el volumen pedido será,

$$V = \int_a^b dV = \int_0^2 \pi y^2\,dx = \pi\int_0^2 8x\,dx = 4\pi x^2\Big]_0^2 = 16\pi \text{ unidades de volumen}$$

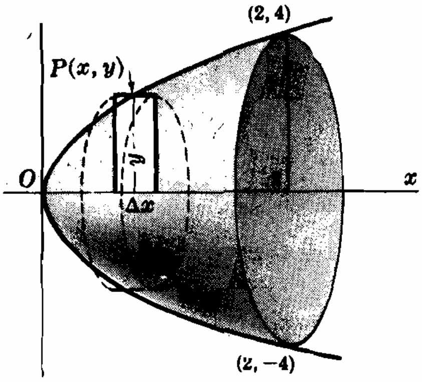

Fig. 35-1

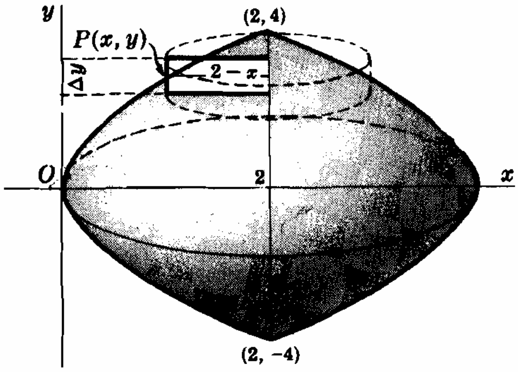

Fig. 35-2

2. Hallar el volumen generado al girar el área limitada por la parábola $y^2 = 8x$ alrededor de la ordenada correspondiente a $x = 2$. (Ver Fig. 35-2.)

Dividiendo el área mediante franjas horizontales, cuando el rectángulo genérico de la Fig. 35-2 gire alrededor del eje y se produce un disco de radio $2 - x$, de altura Δy y de volumen $\pi(2-x)^2 \Delta y$. El volumen pedido será

$$V = \int_{-4}^4 \pi(2-x)^2\,dy = 2\pi\int_0^4 (2-x)^2\,dy = 2\pi\int_0^4 \left(2-\frac{y^2}{8}\right)^2 dy = \frac{256}{15}\pi \text{ unidades de volumen}$$

3. Hallar el volumen generado en la rotación del área limitada por $y^2 = 8x$ y la ordenada correspondiente a $x = 2$ con respecto al eje y. (Ver Fig. 35-3.)

Dividiendo el área mediante franjas horizontales, cuando el rectángulo genérico de la Fig. 35-3 gire alrededor del eje y, se produce un disco cuyo volumen es igual a la diferencia entre los volúmenes generados al girar los rectángulos $ECDF$ (de dimensiones 2 por Δy) y $EABF$ (de dimensiones x por Δy) con respecto al eje y, es decir, $\pi(2)^2 \Delta y - \pi(x)^2 \Delta y$. El volumen pedido será

$$V = \int_{-4}^4 4\pi\,dy - \int_{-4}^4 \pi x^2\,dy = 2\pi\int_0^4 (4-x^2)\,dy = 2\pi\int_0^4 \left(4-\frac{y^4}{64}\right) dy = \frac{128}{5}\pi \text{ unidades de volumen}$$

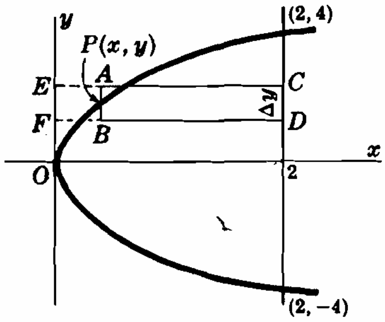

Fig. 35-3

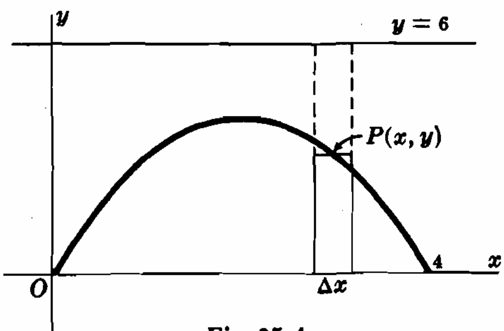

Fig. 35-4

4. Hallar el volumen generado en la rotación del área comprendida entre la parábola $y = 4x - x^2$ y el eje x con respecto a la recta $y = 6$. (Ver Fig. 35-4.)

Dividiendo el área mediante franjas verticales, el rectángulo genérico, al girar alrededor de la recta $y = 6$, produce un disco de volumen $\pi(6)^2 \Delta x - \pi(6-y)^2 \Delta x$. El volumen pedido será

$$V = \pi\int_0^4 \{(6)^2 - (6-y)^2\}\,dx = \pi\int_0^4 (12y - y^2)\,dx$$

$$= \pi\int_0^4 (48x - 28x^2 + 8x^3 - x^4)\,dx = \frac{1408\pi}{15} \text{ unidades de volumen}$$

5. Se trata de hallar el volumen generado en la rotación del área del primer cuadrante limitada por la curva $y = f(x)$ y las ordenadas correspondientes a $x = a$ y $x = b$, alrededor del eje y. (Ver Fig. 35-5.) Dividiendo este área en n franjas y trazando los rectángulos correspondientes, cuando uno de ellos gire alrededor del eje y, se produce un anillo cilíndrico de altura y_k, radio interno ξ_{k-1}, radio externo ξ_k y volumen

(i) $$\Delta_k V = \pi(\xi_k^2 - \xi_{k-1}^2)y_k$$

Por el teorema del valor medio de la derivada

(ii) $$\xi_k^2 - \xi_{k-1}^2 = \frac{d}{dx}(x^2)\Big|_{x=x_k'} \cdot (\xi_k - \xi_{k-1}) = 2x_k'\Delta_k x$$

Siendo $\xi_{k-1} < x_k < \xi_k$. Por tanto, (i) se transforma en

$$\Delta_k V = 2\pi\, x_k' y_k\, \Delta_k x = 2\pi\, x_k' f(x_k)\, \Delta_k x$$

y $$V = 2\pi \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k' f(x_k)\, \Delta_k x = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx \text{ por el teorema de Bliss}$$

Nota. Si los puntos x_k de los subintervalos son los puntos medios de estos, no es necesario acudir al teorema de Bliss. Para los x_k' definidos en (ii), se verifica: $x_k' = \frac{1}{2}(\xi_k + \xi_{k-1}) = x_k$ [ver Problema 17(*b*), Capítulo 21]. El volumen producido al girar los n rectángulos alrededor del eje y es $\sum_{k=1}^{n} 2\pi x_k f(x_k)\, \Delta_k x = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\, \Delta_k x$ del tipo (i) del Capítulo 33.

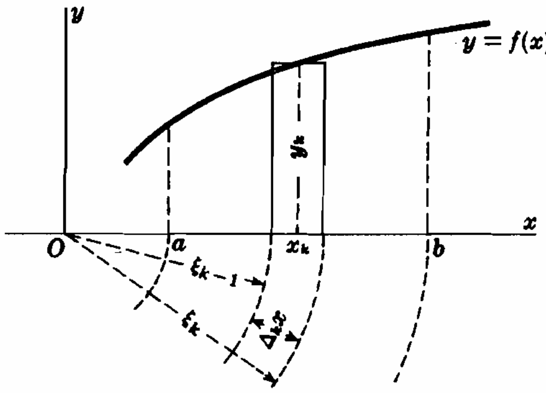

Fig. 35-5

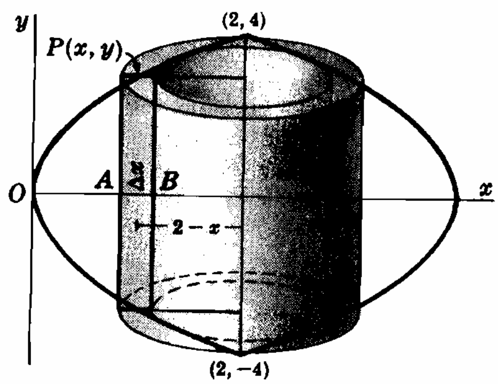

Fig. 35-6

6. Hallar el volumen generado en la rotación del área limitada por la parábola $y^2 = 8x$ y la ordenada correspondiente a $x = 2$ con respecto a esta recta. Aplicar el método del anillo. (Ver Problema 2.)

Dividimos el área (Fig. 35-6) mediante franjas verticales y elegimos, para mayor sencillez, el punto P de forma que sea el punto medio del segmento AB.

La altura del rectángulo genérico es $2y = 4\sqrt{2x}$, su base, Δx y su distancia al eje de giro, es $2 - x$. Cuando este rectángulo gire alrededor de este eje se produce un anillo cilíndrico de volumen $2\pi(2 - x) \cdot 4\sqrt{2x}\, \Delta x$. El volumen pedido será

$$V = 8\sqrt{2}\,\pi\int_0^2 (2-x)\sqrt{x}\, dx = 8\sqrt{2}\,\pi\int_0^2 (2x^{1/2} - x^{3/2})\, dx = \frac{256\pi}{15} \text{ unidades de volumen}$$

7. Hallar el volumen del toro generado en la rotación del círculo $x^2 + y^2 = 4$ alrededor de la recta $x = 3$.

Aplicamos el método del anillo. La altura del rectángulo genérico es $2y$, su base Δx, y la distancia media al eje de revolución vale $3 - x$. El volumen pedido será

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_{-2}^{2} 2y(3-x)\, dx = 4\pi\int_{-2}^{2} (3-x)\sqrt{4-x^2}\, dx \\ &= 12\pi\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx - 4\pi\int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\, dx \\ &= \left[12\pi\left(\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2 \text{ arc sen } \frac{x}{2}\right) + \frac{4\pi}{3}(4-x^2)^{3/2}\right]_{-2}^{2} \\ &= 24\pi^2 \text{ unidades de volumen} \end{aligned}$$

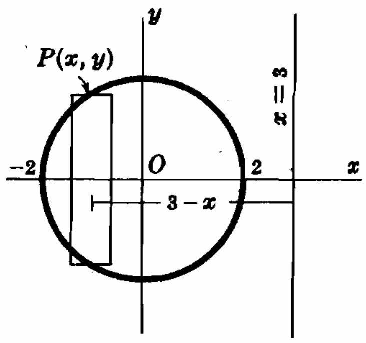

Fig. 35-7

8. Hallar el volumen generado en la rotación alrededor del eje y del área limitada por el primer arco de la cicloide $x = \theta - \text{sen}\,\theta$, $y = 1 - \cos\theta$ y el eje x. Aplicar el método del anillo.

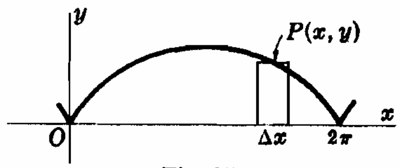

Fig. 35-8

$$V = 2\pi\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} xy\,dx = 2\pi\int_0^{2\pi}(\theta - \text{sen}\,\theta)(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)\,d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi}(\theta - 2\theta\cos\theta + \theta\cos^2\theta - \text{sen}\,\theta + 2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta - \cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta)\,d\theta$$

$$= 2\pi\Big[\tfrac{3}{4}\theta^2 - 2(\theta\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta) + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}\theta\,\text{sen}\,2\theta + \tfrac{1}{4}\cos 2\theta) + \cos\theta + \text{sen}^2\theta + \tfrac{1}{3}\cos^3\theta\Big]_0^{2\pi} = 6\pi^3 \text{ unidades de volumen}$$

9. Hallar el volumen generado en la rotación del área limitada por $y = -x^2 - 3x + 6$ y $x + y - 3 = 0$ alrededor de la recta, (*a*) $x = 3$, (*b*) $y = 0$.

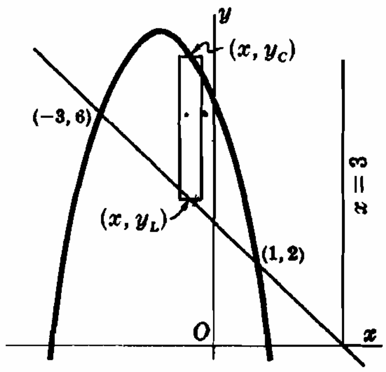

Fig. 35-9

(*a*) $$V = 2\pi\int_{-3}^{1}(y_C - y_L)(3-x)\,dx$$

$$= 2\pi\int_{-3}^{1}(x^3 - x^2 - 9x + 9)\,dx = 256\pi/3 \text{ unidades de volumen}$$

(*b*) $$V = \pi\int_{-3}^{1}\{(y_C)^2 - (y_L)^2\}\,dx$$

$$= \pi\int_{-3}^{1}(x^4 + 6x^3 - 4x^2 - 30x + 27)\,dx = 1792\pi/15 \text{ unidades de volumen.}$$

Problemas propuestos

Hallar, en los Problemas 10-19, el volumen generado en la rotación del área plana dada alrededor del eje indicado, aplicando el método del disco. (Soluciones en unidades cúbicas.)

10. $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$; eje x — *Sol.* $2\,500\pi$

11. $x^2 - y^2 = 16$, $y = 0$, $x = 8$; eje x — *Sol.* $256\pi/3$

12. $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 16$; eje y — *Sol.* 32π

13. $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 16$; $y = 16$ — *Sol.* $4\,096\pi/15$

14. $y^2 = x^3$, $y = 0$, $x = 2$; eje x — *Sol.* 4π

15. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$; $x = 2$ — *Sol.* $16\pi/5$

16. $y^2 = x^4(1 - x^2)$; eje x — *Sol.* $4\pi/35$

17. $4x^2 + 9y^2 = 36$; eje x — *Sol.* 16π

18. $4x^2 + 9y^2 = 36$, eje y — *Sol.* 24π

19. Dentro de $x = 9 - y^2$, entre $x - y - 7 = 0$, $x = 0$; eje y — *Sol.* $963\pi/5$

Hallar, en los Problemas 20-26, el volumen generado en la rotación del área plana dada alrededor del eje indicado, aplicando el método del disco. (Soluciones en unidades cúbicas.)

20. $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$; eje y — *Sol.* 625π

21. $x^2 - y^2 = 16$, $y = 0$, $x = 8$; eje y — *Sol.* $128\sqrt{3}\pi$

22. $y = 4x^2$, $x = 0$, $y = 16$; eje x — *Sol.* $2\,048\pi/5$

23. $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$; $x = 2$ — *Sol.* $144\pi/5$

24. $y = x^2$, $y = 4x - x^2$; eje x — *Sol.* $32\pi/3$

25. $y = x^2$, $y = 4x - x^2$; $y = 6$ — *Sol.* $64\pi/3$

26. $x = 9 - y^2$, $x - y - 7 = 0$; $x = 4$ — *Sol.* $153\pi/5$

Hallar, en los Problemas 27-32, el volumen generado en la rotación del área plana dada alrededor del eje indicado, aplicando el método del anillo. (Soluciones en unidades cúbicas.)

27. $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$; eje y

28. $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 5$; $x = 6$

29. $y = x^3$, $y = 0$, $x = 2$; $y = 8$

30. $y = x^2$, $y = 4x - x^2$; $x = 5$

31. $y = x^2 - 5x + 6$, $y = 0$; eje y

32. Dentro de $x = 9 - y^2$, entre $x - y - 7 = 0$, $x = 0$; $y = 3$

Sol. (27) 625π, (28) 375π, (29) $320\pi/7$, (30) $64\pi/3$, (31) $5\pi/6$, (32) $369\pi/2$

Hallar, en los Problemas 33-39, el volumen generado en la rotación del área plana dada alrededor del eje indicado, aplicando el método que sea más idóneo.

33. $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$; eje y — *Sol.* $\pi(1 - 1/e)$ unidades de volumen

34. Un arco de $y = \text{sen}\,2x$; eje x — *Sol.* $\frac{1}{2}\pi^2$ unidades de volumen

35. Primer arco de $y = e^x\,\text{sen}\,x$; eje x — *Sol.* $\pi(e^{2\pi} - 1)/8$ unidades de volumen

36. Primer arco de $y = e^x\,\text{sen}\,x$; eje y — *Sol.* $\pi[(\pi - 1)e^{\pi} - 1]$ unidades de volumen

37. Primer arco de $x = \theta - \text{sen}\,\theta$, $y = 1 - \cos\theta$; eje x — *Sol.* $5\pi^2$ unidades de volumen

38. La cardioide $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta - 1$, $y = 2\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,2\theta$; eje x — *Sol.* $64\pi/3$ unidades de volumen

39. $y = 2x^2$, $2x - y + 4 = 0$; $x = 2$ — *Sol.* 27π unidades de volumen

40. Hallar el volumen de un tronco de cono cuya base inferior es de radio R, la superior de radio r y de altura h.
Sol. $\frac{1}{3}\pi h(r^2 + Rr + R^2)$ unidades cúbicas.

Capítulo 36

Volúmenes de sólidos de sección conocida

EL VOLUMEN DE UN SOLIDO DE REVOLUCION generado en la rotación alrededor del eje x de un área plana limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ viene dado por $\int_a^b \pi y^2\,dx$. El integrando, $\pi y^2 = \pi\{f(x)\}^2$, se puede interpretar como el área de la sección determinada por un plano perpendicular al eje x situado a una distancia del origen igual a x unidades.

Recíprocamente, si el área de la sección ABC determinada en un sólido por un plano perpendicular al eje x situado a una distancia del origen igual a x unidades, se puede expresar como función, $A(x)$, de x, el volumen del sólido viene dado por $V = \int_a^\beta A(x)\,dx$.

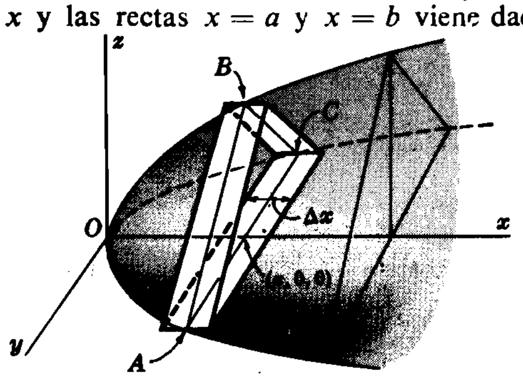

Fig. 36-1

Problemas resueltos

1. Hallar el volumen de un sólido de base circular de 4 unidades de radio sabiendo que toda sección plana perpendicular a un diámetro fijo es un triángulo equilátero.

Tomando el círculo, como en la Fig. 36-2, con el eje x sobre el diámetro fijo, la ecuación del círculo será $x^2 + y^2 = 16$. La sección ABC del sólido es un triángulo equilátero de lado $2y$ y área $A(x) = \sqrt{3}\,y^2 = \sqrt{3}\,(16 - x^2)$.

$$V = \int_a^\beta A(x)\,dx = \sqrt{3}\int_{-4}^{4} (16 - x^2)\,dx$$

$$= \sqrt{3}\left[16x - \frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{4} = \frac{256}{3}\sqrt{3} \text{ unidades de volumen}$$

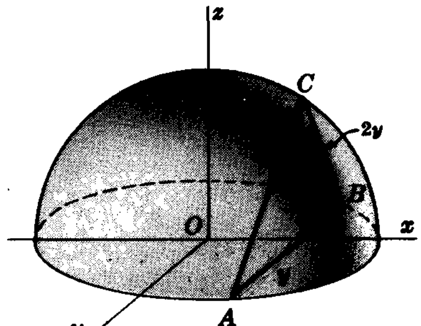

Fig. 36-2

2. Un sólido tiene una base en forma de elipse cuyos ejes mayor y menor miden 10 y 8, respectivamente. Hallar su volumen sabiendo que toda sección del mismo perpendicular al eje mayor es un triángulo isósceles de altura igual a 6.

Situemos la elipse como indica la Fig. 36-3, siendo su ecuación $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. La sección ABC es un triángulo isósceles de base $2y$, altura 6 y área $A(x) = 6y = 6 \cdot {}^4/_5\sqrt{25 - x^2}$.

$$V = \frac{24}{5}\int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\,dx = 60\pi \text{ unidades de volumen}$$

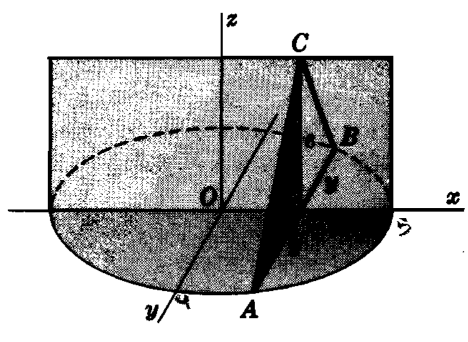

Fig. 36-3

3. Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = z$ y el plano $z = 10$. (Ver Fig. 36-4.)

La sección determinada en el sólido por un plano paralelo al xOy situado a una distancia z del origen es una elipse de área $\pi xy = \pi(4\sqrt{z})(5\sqrt{z}) = 20\pi z$. En consecuencia,

$$V = 20\pi\int_0^{10} z\,dz = 1000\pi \text{ unidades de volumen}$$

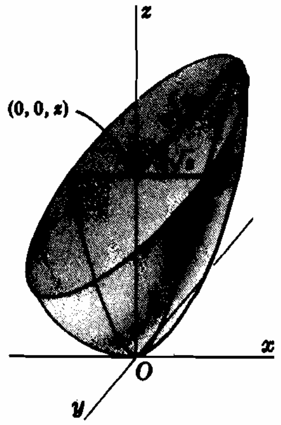

Fig. 36-4

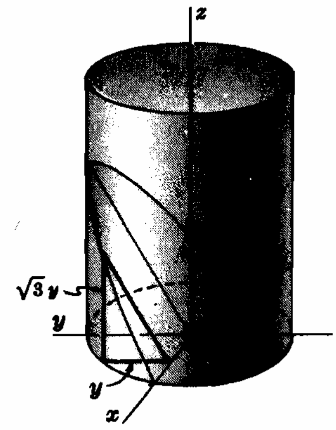

Fig. 36-5

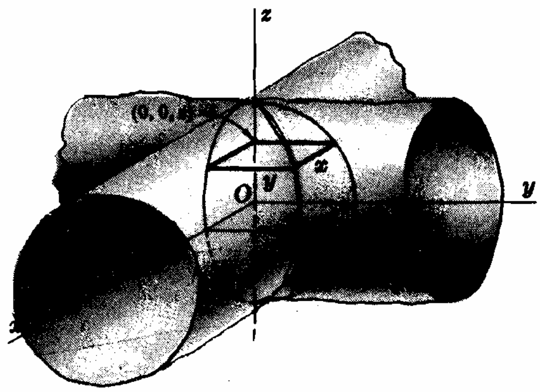

Fig. 36-6

4. En un cilindro recto circular de madera, de 8 centímetros de radio, se efectúa un corte por un plano que pasa por un diámetro de la base y forma con ella un ángulo de 60°. Hallar el volumen de la madera eliminada. (Ver Fig. 36-5.)

Tomando los ejes coordenados que se indican en la figura, la sección determinada por un plano perpendicular al eje x es un triángulo rectángulo en el cual el ángulo agudo adyacente al cateto y es de 60°. La longitud del otro cateto es $\sqrt{3}\,y$ y el área de la sección es $\frac{1}{2}\sqrt{3}\,y^2 = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(64 - x^2)$. Por tanto,

NOTA ACLARATORIA, esto sale de la ecuación de la circunf.

$$V = \frac{1}{2}\sqrt{3}\int_{-8}^{8}(64 - x^2)\,dx = \frac{1024}{3}\sqrt{3}\text{ cm}^3$$

5. Hallar el volumen de la intersección de dos cilindros circulares de igual radio r que se cortan ortogonalmente. (Fig. 36-6.)

Tomando los ejes coordenados que se indica en la figura, las ecuaciones de los cilindros son $x^2 + z^2 = r^2$ e $y^2 + z^2 = r^2$. La sección determinada en el volumen que se trata de calcular, por un plano perpendicular al eje z, es un cuadrado de lado $2x = 2y = 2\sqrt{r^2 - z^2}$ y área $4(r^2 - z^2)$. Por tanto,

$$V = 4\int_{-r}^{r}(r^2 - z^2)\,dz = \frac{16r^3}{3} \text{ unidades de volumen}$$

6. Hallar el volumen de un cono recto de altura h, cuya base es una elipse de eje mayor $2a$ y eje menor $2b$. (Fig. 36-7.)

La sección determinada en el cono por un plano paralelo a la base es una elipse de eje mayor $2x$ y eje menor $2y$.

De los triángulos semejantes de la figura, se deduce:

$$\frac{PC}{OA} = \frac{PM}{OM} \text{ ó } \frac{x}{a} = \frac{h-z}{h}; \text{ también, } \frac{PD}{OB} = \frac{PM}{OM} \text{ ó } \frac{y}{b} = \frac{h-z}{h}$$

El área de la sección es $\pi xy = \frac{\pi ab(h-z)^2}{h^2}$. Luego

$$V = \frac{\pi ab}{h^2}\int_0^h (h-z)^2\,dz = \frac{1}{3}\pi abh \text{ unidades de volumen}$$

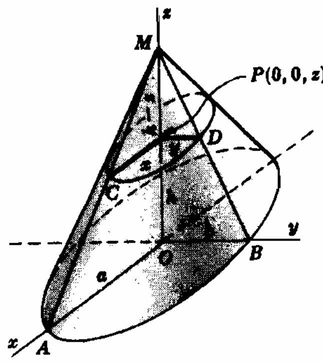

Fig. 36-7

Problemas propuestos

7. Hallar el volumen de un sólido de base circular de 4 unidades de radio sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular a un diámetro fijo (eje x de la figura del Problema 1) es (*a*) un semicírculo, (*b*) un cuadrado, (*c*) un triángulo rectángulo isósceles con su hipotenusa en el plano de base.
Sol. (*a*) $128\pi/3$, (*b*) 1 024/3, (*c*) 256/3 unidades de volumen.

8. Hallar el volumen de un sólido de base elíptica de ejes mayor y menor iguales a 10 y 8, respectivamente, sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al eje mayor es un triángulo rectángulo con un cateto en el plano de la base. *Sol.* 640/3 unidades de volumen.

9. Hallar el volumen de un sólido cuya base es el área limitada por la parábola $y^2 = 12x$ y su ordenada correspondiente al punto $x = 3$, sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al eje x de la parábola es un cuadrado. *Sol.* 216 unidades de volumen.

10. Hallar el volumen de un sólido cuya base es el área del primer cuadrante limitada por la recta $4x + 5y = 20$ y los ejes coordenados, sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al eje x es un semicírculo.
Sol. $10\pi/3$ unidades de volumen.

11. Hallar el volumen de un sólido cuya base es el círculo $x^2 + y^2 = 16x$, sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al eje x es un rectángulo de altura igual al doble de la distancia del origen al plano de la sección
Sol. $1\,024\pi$ unidades de volumen.

12. Hallar el volumen del sólido engendrado por un círculo cuyos extremos de un diámetro se apoyan en las parábolas $y^2 + 8x = 64$ e $y^2 + 16x = 64$, cuando se le desplaza paralelamente al plano xz.
Sol. $256\pi/15$ unidades de volumen.

13. Hallar el volumen de un cono cuya base es el círculo $y^2 + z^2 - 2by = 0$, $x = 0$, y su vértice, el punto $(a, 0, 0)$.
Sol. $\frac{1}{3}\pi ab^2$ unidades de volumen.

14. Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $y^2 + 4z^2 = x$ y el plano $x = 4$.
Sol. 4π unidades de volumen.

15. Hallar el volumen de un barril cuyo perfil es el de un elipsoide de revolución, sabiendo que su altura es 6, el radio de la sección media es igual a 3 y el radio de las bases igual a 2. *Sol.* 44π unidades de volumen.

16. Hallar el volumen de un sólido sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al eje x es un círculo cuyos extremos de un diámetro se apoyan en las parábolas $y^2 = 9x$ y $x^2 = 9y$.
Sol. $6\,561\pi/280$ unidades de volumen.

17. Hallar el volumen de un sólido sabiendo que la sección determinada en él por un plano perpendicular al eje x es un cuadrado cuyos extremos de una diagonal están situados sobre las parábolas $y^2 = 4x$ y $x^2 = 4y$.
Sol. 144/35 unidades de volumen.

18. En una esfera de 3 centímetros de radio se efectúa un taladro de 1 centímetro de radio, siendo el eje de éste uno de los diámetros de aquélla. Hallar el volumen de la esfera que resulta. *Sol.* $64\pi\sqrt{2}/3$ cm^3.

Capítulo 37

Centro geométrico

Areas planas y sólidos de revolución

LA MASA DE UN SOLIDO es una medida de la materia que contiene y su volumen es una medida del espacio que ocupa. Si la masa por unidad de volumen es la misma en todo el cuerpo se dice que éste es *homogéneo* o que tiene *densidad constante.*

En mecánica se simplifican mucho los cálculos cuando se puede considerar a la masa del cuerpo concentrada en un punto que se denomina centro de masas. En un cuerpo homogéneo este punto coincide con el *centro geométrico* o centroide. Por ejemplo, el centro de masas de una pelota de goma homogénea coincide con el centro geométrico de la pelota considerada como una esfera.

El centro geométrico de una hoja de papel rectangular estará situado entre las dos superficies en la mitad del espesor pero, en este caso, se puede considerar situado sobre una de las superficies en el punto de intersección de las diagonales. Así, pues, el centro de masas de una hoja delgada coincide con el centro geométrico de la hoja considerada como un área plana.

En este Capítulo, y en el siguiente, nos limitaremos a considerar áreas planas y sólidos de revolución. En capítulos posteriores trataremos de otros sólidos, arcos de curvas y cuerpos heterogéneos.

EL MOMENTO (DE PRIMER ORDEN) M_L **DE UN AREA PLANA** con respecto a una recta L es el producto del área por la distancia de su centro geométrico a dicha recta. El momento de un área compuesta de otras varias con respecto a una recta es igual a la suma de los momentos de las áreas individuales con respecto a dicha recta.

Para hallar el momento de un área plana con respecto a un eje coordenado se procede de la manera siguiente:

(1) Se dibuja el área y se traza una franja representativa y su rectángulo genérico correspondiente.

(2) Se efectúa el producto del área del rectángulo por la distancia de su centro geométrico o centroide al eje, y se escribe la suma correspondiente a todos los rectángulos.

(3) Se aplica la regla de Barrow o teorema fundamental del cálculo integral (ver Problema 2) suponiendo que el número de rectángulos crece indefinidamente.

Para un área plana A cuyo centro geométrico es el punto $(\bar{x}, \bar{y})$ y cuyos momentos con respecto a los ejes x e y son M_x y M_y, respectivamente, se tiene:

$$A\bar{x} = M_y \quad \text{y} \quad A\bar{y} = M_x$$

(Ver Problemas 1-8.)

EL MOMENTO (DE PRIMER ORDEN) DE UN SOLIDO de volumen V, engendrado en la rotación de un área plana alrededor de un eje coordenado, con respecto a un plano que pase por el origen y sea perpendicular a dicho eje, se halla de la manera siguiente:

(1) Se dibuja el área y se traza una franja representativa y su rectángulo genérico.

(2) Se efectúa el producto del volumen del disco o anillo, generado en la rotación del rectángulo con respecto al eje, por la distancia del centro geométrico del rectángulo al plano, y se escribe la suma correspondiente a todos los rectángulos.

(3) Se aplica la regla de Barrow o teorema fundamental del cálculo integral suponiendo que el número de rectángulos crece indefinidamente.

El centro geométrico $(\bar{x}, \bar{y})$ está situado en el eje x si el área gira en torno a dicho eje. Llamando M_{yz} al momento del sólido con respecto al plano que pasa por el origen y es perpendicular al eje x, se tiene

$$V\bar{x} = M_{yz}, \quad \bar{y} = 0$$

Análogamente, si la rotación del área tiene lugar en torno del eje y, el centro geométrico $(\bar{x}, \bar{y})$ está situado en dicho eje. Llamando M_{xz} al momento del sólido con respecto al plano que pase por el origen y sea perpendicular al eje y, se tiene

$$V\bar{y} = M_{xz}, \quad \bar{x} = 0$$

(Ver Problemas 9-12.)

PRIMER TEOREMA DE PAPPUS. El volumen engendrado por un área plana en rotación alrededor de un eje de su plano que no la corte es igual al producto del área por la longitud de la trayectoria descrita por su centro geométrico.

(Ver Problemas 13-15.)

Problemas resueltos

1. Dada el área plana de la figura, hallar (*a*) su momento con respecto a los ejes coordenados y (*b*) las coordenadas de su centro geométrico $(\bar{x}, \bar{y})$.

(*a*) El área del rectángulo superior es $5 \times 2 = 10$ unidades, y su centro geométrico es el punto $A(2{,}5,\ 9)$. Análogamente, las áreas y centros de los otros rectángulos son: 12 unidades, $B(1, 5)$; 2 unidades, $C(2{,}5,\ 5)$; 10 unidades, $D(2{,}5,\ 1)$.

Los momentos de los rectángulos con respecto al eje x son 10(9), 12(5) y 10(1). Por tanto, el momento del área de la figura, con respecto al eje x, es

$$M_x = 10(9) + 12(5) + 2(5) + 10(1) = 170$$

Análogamente, el momento del área de la figura con respecto al eje y es

$$M_y = 10(2{,}5) + 12(1) + 2(2{,}5) + 10(2{,}5) = 67$$

(*b*) El área de la figura es $A = 10 + 12 + 2 + 10 = 34$.

Luego $A\bar{x} = M_y$, $34\bar{x} = 67$ y $\bar{x} = 67/34$,

y $A\bar{y} = M_x$, $34\bar{y} = 170$ e $\bar{y} = 5$.

El punto (67/34, 5) es el centro geométrico.

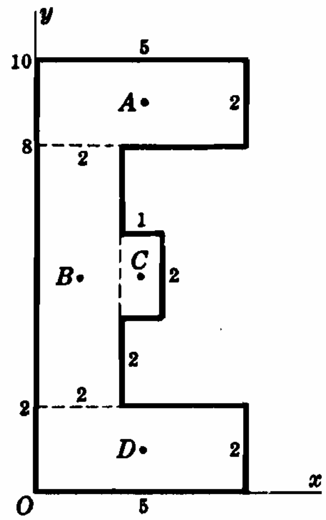

Fig. 37-1

2. Hallar el momento con respecto a los ejes coordenados del área plana del segundo cuadrante limitada por la curva $x = y^2 - 9$.

El área del rectángulo genérico de la figura es $-x \cdot \Delta y$, su centro geométrico es $(\frac{1}{2}x, y)$, y su momento con respecto al eje x vale $y(-x \cdot \Delta y)$. Por tanto,

$$M_x = -\int_0^3 y \cdot x\, dy = -\int_0^3 y(y^2 - 9)\, dy = \frac{81}{4}$$

Análogamente, el momento del rectángulo genérico con respecto al eje y es $\frac{1}{2}x(-x \cdot \Delta y)$. En consecuencia,

$$M_y = -\frac{1}{2}\int_0^3 x^2\, dy = -\frac{1}{2}\int_0^3 (y^2 - 9)^2\, dy = -\frac{324}{5}$$

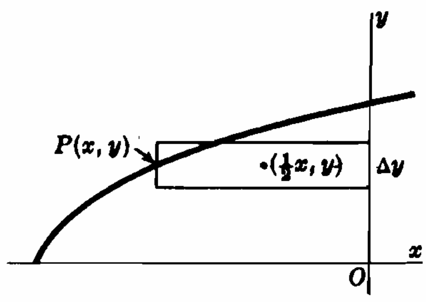

Fig. 37-2

3. Hallar el centro geométrico del área del primer cuadrante limitada por la parábola $y = 4 - x^2$.

El centro geométrico del rectángulo genérico es $(x, \frac{1}{2}y)$.

$$A = \int_0^2 y\,dx = \int_0^2 (4 - x^2)\,dx = 16/3$$

$$M_x = \int_0^2 \tfrac{1}{2}y \cdot y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (4-x^2)^2\,dx = 128/15$$

$$M_y = \int_0^2 x \cdot y\,dx = \int_0^2 x(4-x^2)\,dx = 4$$

Por tanto $\bar{x} = M_y/A = 3/4$, $\bar{y} = M_x/A = 8/5$, y las coordenadas del centro geométrico son $(3/4, 8/5)$.

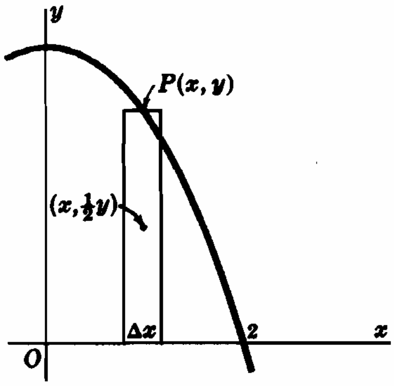

Fig. 37-3

4. Hallar el centro geométrico del área del primer cuadrante limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$.

El centro geométrico del rectángulo genérico es $[x, \frac{1}{2}(x + x^2)]$.

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = 1/6$$

$$M_x = \int_0^1 \tfrac{1}{2}(x + x^2)(x - x^2)\,dx = 1/15$$

$$M_y = \int_0^1 x(x - x^2)\,dx = 1/12$$

Por tanto $\bar{x} = M_y/A = 1/2$, $\bar{y} = M_x/A = 2/5$, y las coordenadas del centro geométrico son $(1/2, 2/5)$.

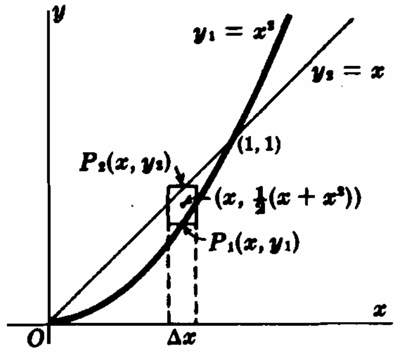

Fig. 37-4

5. Determinar el centro geométrico del área limitada por las parábolas $x = y^2$ y $x^2 = -8y$.

El centro geométrico del rectángulo genérico es $[x, \frac{1}{2}(-x^2/8 - \sqrt{x})]$.

$$A = \int_0^4 \left(-\frac{x^2}{8} + \sqrt{x}\right)dx = \frac{8}{3}$$

$$M_x = \int_0^4 \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{8} - \sqrt{x}\right)\left(-\frac{x^2}{8} + \sqrt{x}\right)dx = -\frac{12}{5}$$

$$M_y = \int_0^4 x\left(-\frac{x^2}{8} + \sqrt{x}\right)dx = \frac{24}{5}$$

y el centro es $(\bar{x}, \bar{y}) = (9/5, -9/10)$.

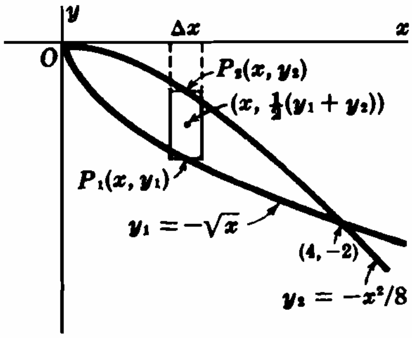

Fig. 37-5

6. Hallar el centro geométrico del área limitada por la curva $y = 2 \operatorname{sen} 3x$, desde $x = 0$ hasta $x = \pi/3$. (Ver Fig. 37-6.)

Empleando el rectángulo genérico de la figura cuyo centro geométrico es $(x, \frac{1}{2}y)$,

$$A = \int_0^{\pi/3} y\,dx = \int_0^{\pi/3} 2 \operatorname{sen} 3x\,dx = -\frac{2}{3}\cos 3x\Big]_0^{\pi/3} = \frac{4}{3}$$

$$M_x = \int_0^{\pi/3} \tfrac{1}{2}y \cdot y\,dx = 2\int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}^2 3x\,dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\operatorname{sen} 6x\right]_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{3}$$

$$M_y = \int_0^{\pi/3} x \cdot y\,dx = 2\int_0^{\pi/3} x \operatorname{sen} 3x\,dx$$

$$= \frac{2}{9}\left[\operatorname{sen} 3x - 3x\cos 3x\right]_0^{\pi/3} = \frac{2}{9}\pi$$

Las coordenadas del centro son $(M_y/A, M_x/A) = (\pi/6, \pi/4)$.

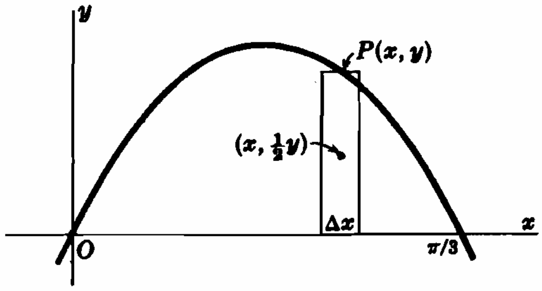

Fig. 37-6

7. Hallar el centro geométrico del área del primer cuadrante de la hipocicloide $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\text{sen}^3\,\theta$. (Ver Fig. 37-7.)

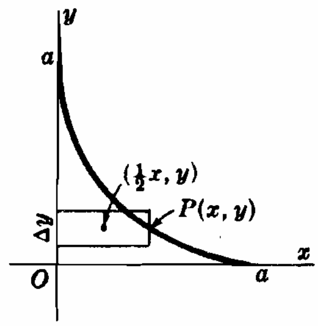

Fig. 37-7

Por simetría, $\bar{x}=\bar{y}$.

$$A = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} x\,dy = \int_0^{\pi/2} a\cos^3\theta\cdot 3a\,\text{sen}^2\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{3}{4}a^2\int_0^{\pi/2}\text{sen}^2 2\theta\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= \frac{3}{8}a^2\left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{8}\,\text{sen}\,4\theta + \frac{1}{6}\,\text{sen}^3 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{3}{32}\pi a^2$$

$$M_x = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} y\cdot x\,dy = 3a^3\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,\text{sen}^5\theta\,d\theta = 3a^3\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,(1-\cos^2\theta)^2\,\text{sen}\,\theta\,d\theta$$

$$= -3a^3\left[\frac{\cos^5\theta}{5} - \frac{2\cos^7\theta}{7} + \frac{\cos^9\theta}{9}\right]_0^{\pi/2} = \frac{24a^3}{315}$$

Por tanto, $\bar{y} = M_x/A = 256a/315\pi$ y las coordenadas del centro son $(256a/315\pi, 256a/315\pi)$.

8. Demostrar que el centro geométrico del área de un sector circular de radio r y ángulo 2θ está situado a una distancia $\dfrac{2r\,\text{sen}\,\theta}{3\theta}$ del centro del círculo.

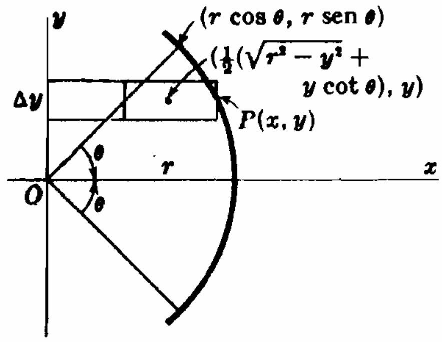

Fig. 37-8

Situemos el sector de forma que su centro geométrico esté situado sobre el eje x. Por simetría, la abscisa de dicho centro será igual a la del área situada por encima del eje x, limitada por la circunferencia y la recta $y = x\,\text{tag}\,\theta$. Para este último sector:

$$A = \int_0^{r\,\text{sen}\,\theta}(\sqrt{r^2-y^2} - y\cot\theta)\,dy$$

$$= \left[\frac{1}{2}y\sqrt{r^2-y^2} + \frac{1}{2}r^2\,\text{arc sen}\,\frac{y}{r} - \frac{1}{2}y^2\cot\theta\right]_0^{r\,\text{sen}\,\theta} = \frac{1}{2}r^2\theta$$

$$M_y = \int_0^{r\,\text{sen}\,\theta}\frac{1}{2}(\sqrt{r^2-y^2} + y\cot\theta)(\sqrt{r^2-y^2} - y\cot\theta)\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{r\,\text{sen}\,\theta}(r^2 - y^2 - y^2\cot^2\theta)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[r^2y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}y^3\cot^2\theta\right]_0^{r\,\text{sen}\,\theta} = \frac{1}{3}r^3\,\text{sen}\,\theta, \quad \text{y} \quad \bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{2r\,\text{sen}\,\theta}{3\theta}$$

9. Hallar el centro geométrico $(\bar{x}, 0)$ del sólido generado en la rotación del área del Problema 3 alrededor del eje x.

Aplicando el método del disco al rectángulo genérico del Problema 3,

$$V = \pi\int_0^2 y^2\,dx = \pi\int_0^2(4-x^2)^2\,dx = 256\pi/15,$$

$$M_{yz} = \pi\int_0^2 x\cdot y^2\,dx = \pi\int_0^2 x(4-x^2)^2\,dx = 32\pi/3, \quad \text{y} \quad \bar{x} = M_{yz}/V = 5/8$$

10. Hallar el centro geométrico $(0, \bar{y})$ del sólido generado en la rotación del área del Problema 3 alrededor del eje y.

Aplicando el método del anillo al rectángulo genérico del Problema 3,

$$V = 2\pi\int_0^2 xy\,dx = 2\pi\int_0^2 x(4-x^2)\,dx = 8\pi,$$

$$M_{xz} = 2\pi\int_0^2 \tfrac{1}{2}y\cdot xy\,dx = \pi\int_0^2 x(4-x^2)^2\,dx = 32\pi/3, \text{de donde } \bar{y} = M_{xz}/V = 4/3$$

11. Hallar el centro geométrico $(\bar{x}, 0)$ del sólido generado en la rotación del área del Problema 4 alrededor del eje x.

Aplicando el método del disco al rectángulo genérico del Problema 4,

$$V = \pi\int_0^1(x^2-x^4)\,dx = 2\pi/15, \quad M_{yz} = \pi\int_0^1 x(x^2-x^4)\,dx = \pi/12, \quad \text{y} \quad \bar{x} = M_{yz}/V = 5/8.$$

12. Hallar el centro geométrico $(0, \bar{y})$ del sólido generado en la rotación del área del Problema 4 alrededor del eje y.

Aplicando el método del anillo al rectángulo genérico del Problema 4,

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x - x^2)\,dx = \pi/6,$$

$$M_{xz} = 2\pi \int_0^1 \tfrac{1}{2}(x + x^2) \cdot x(x - x^2)\,dx = \pi/12, \text{ de donde } \bar{y} = M_{xz}/V = 1/2$$

13. Hallar el centro geométrico del área de un semicírculo de radio r.

Tomando el semicírculo como en la figura, $\bar{x} = 0$.

El área del semicírculo es $\frac{1}{2}\pi r^2$; el sólido generado en la rotación alrededor del eje x es una esfera de volumen $^4/_3\pi r^3$, y el centro geométrico $(0, \bar{y})$ del área describe una circunferencia de radio y. Aplicando el teorema de Pappus, $\frac{1}{2}\pi r^2 \cdot 2\pi\bar{y} = {^4/_3}\pi r^3$ e $\bar{y} = 4r/3\pi$. El centro geométrico es, pues, el punto $(0, 4r/3\pi)$.

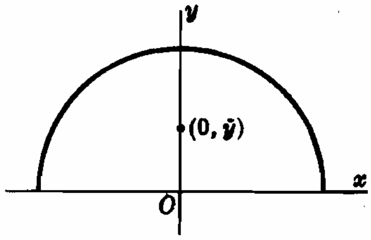

Fig. 37-9

14. Hallar el volumen del toro generado en la rotación del círculo $x^2 + y^2 = 4$ alrededor de la recta $x = 3$. (Fig. 37-10).

El centro geométrico del círculo describe una circunferencia de radio 3.

Por tanto, $V = 4\pi(6\pi) = 24\pi^2$ unidades de volumen.

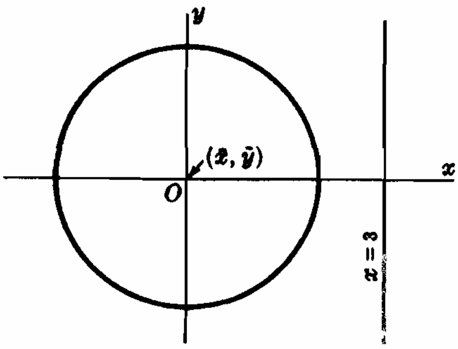

Fig. 37-10

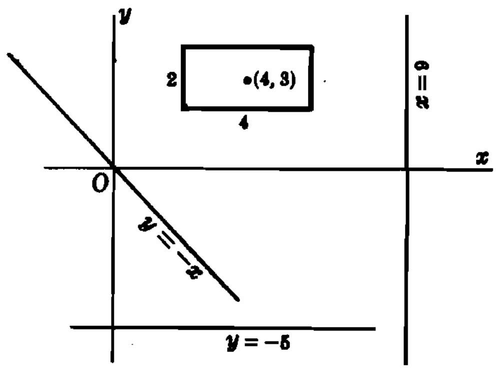

Fig. 37-11

15. Hallar el volumen generado en la rotación del rectángulo de la Fig. 37-11 alrededor de (1) la recta $x = 9$, (2) la recta $y = -5$ y (3) la recta $y = -x$.

(1) El centro (4, 3) del rectángulo describe una circunferencia de radio 5. Luego, $V = 8(10\pi) = 80\pi$ unidades de volumen.

(2) El centro describe una circunferencia de radio 8. Luego, $V = 8(16\pi) = 128\pi$ unidades de volumen.

(3) El centro describe una circunferencia de radio $(4 + 3)/\sqrt{2}$. Luego, $V = 56\sqrt{2}\,\pi$ unidades de volumen.

Problemas propuestos

Calcular el centroide de las áreas dadas en los problemas 16-26.

16. $y = x^2$, $y = 9$ *Sol.* (0,27/5)

17. $y = 4x - x^2$, $y = 0$ *Sol.* (2, 8/5)

18. $y = 4x - x^2$, $y = x$ *Sol.* (3/2, 12/5)

19. $3y^2 = 4(3 - x)$, $x = 0$ *Sol.* (6/5, 0)

20. $x^2 = 8y$, $y = 0$, $x = 4$ *Sol.* (3, 3/5)

21. $y = x^2$, $4y = x^3$ *Sol.* (12/5, 192/35)

22. $x^2 - 8y + 4 = 0$, $x^2 = 4y$, primer cuadrante. *Sol.* $(3/4, 2/5)$

23. Area del primer cuadrante de $x^2 + y^2 = a^2$. *Sol.* $(4a/3\pi, 4a/3\pi)$

24. Area del primer cuadrante de $9x^2 + 16y^2 = 144$. *Sol.* $(16/3\pi, 4/\pi)$

25. Lazo derecho de $y^2 = x^4(1 - x^2)$. *Sol.* $(32/15\pi, 0)$

26. Primer arco de $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$. *Sol.* $(\pi, 5/6)$

27. Demostrar que la distancia del centro geométrico de un triángulo a la base es 1/3 de la altura.

Hallar el centro geométrico del sólido generado en la rotación de las áreas planas dadas alrededor de los ejes indicados en los Problemas 28-38.

28. $y = x^2$, $y = 9$, $x = 0$; eje y *Sol.* $\bar{y} = 6$

29. $y = x^2$, $y = 9$, $x = 0$; eje x *Sol.* $\bar{x} = 5/4$

30. $y = 4x - x^2$, $y = x$; eje x *Sol.* $\bar{x} = 27/16$

31. $y = 4x - x^2$, $y = x$; eje y *Sol.* $\bar{y} = 27/10$

32. $x^2 - y^2 = 16$, $y = 0$, $x = 8$; eje x *Sol.* $\bar{x} = 27/4$

33. $x^2 - y^2 = 16$, $y = 0$, $x = 8$; eje y *Sol.* $\bar{y} = 3\sqrt{3}/2$

34. $(x - 2)y^2 = 4$, $y = 0$, $x = 3$, $x = 5$; eje x *Sol.* $\bar{x} \doteq (2 + 2 \ln 3)/(\ln 3)$

35. $x^2y = 16(4 - y)$, $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$; eje y *Sol.* $\bar{y} = 1/(\ln 2)$

36. Area del primer cuadrante limitada por $y^2 = 12x$ y la ordenada en $x = 3$; eje x *Sol.* $\bar{x} = 2$

37. Area del Problema 36; eje y *Sol.* $\bar{y} = 5/2$

38. Area del Problema 36; directriz. *Sol.* $\bar{y} = 75/32$

39. Demostrar el teorema de Pappus de este capítulo.

40. Aplicando el teorema de Pappus, hallar:

(*a*) el volumen de un cono recto circular de altura a y radio de la base b.

(*b*) el volumen del sólido obtenido al girar la elipse $4(x - 6)^2 + 9(y - 5)^2 = 36$ alrededor del eje x.

Sol. (*a*) $\frac{1}{3}\pi ab^2$ u.v. (*b*) $60\pi^2$ u.v.

41. Dada el área A, limitada por $y = -x^2 - 3x + 6$ y $x + y - 3 = 0$, hallar (*a*) su centro geométrico, (*b*) el volumen generado en la rotación de A alrededor de la recta dada.

Sol. (*a*) $(-1, 28/5)$, (*b*) $2\pi\left(\dfrac{\bar{x} + \bar{y} - 3}{\sqrt{2}}\right) \cdot A = \dfrac{256\sqrt{2}}{15}\pi$ cen. vol.

42. Dado el volumen generado en la rotación del área A (rayada en la Fig. 37-12) alrededor de la recta L, obtener:

$$V = 2\pi\left(\frac{a\bar{x} + \bar{y} - b}{\sqrt{a^2+1}}\right) \cdot A = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2+1}}(aM_y + M_x - bA)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}} \int_r^s (y_C - y_L)^2\, dx$$

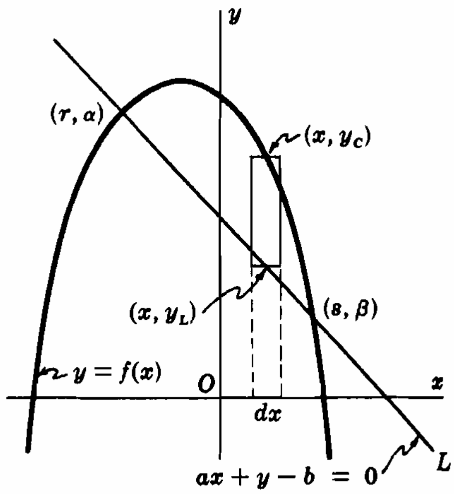

Fig. 37-12

43. Aplicando la fórmula del Problema 42, obtener el volumen generado en la rotación del área alrededor de la recta.

(*a*) $y = -x^2 - 3x + 6$, $x + y - 3 = 0$

(*b*) $y = 2x^2$, $2x - y + 4 = 0$

Sol. (*a*) Ver Problema 41, (*b*) $162\sqrt{5}\,\pi/25$ un. vol.

Capítulo 38

Momentos de Inercia

Areas planas y sólidos de revolución

EL MOMENTO DE INERCIA I_L DE UN AREA PLANA A con respecto a una recta L situada en su plano se halla de la forma siguiente:

(1) Se dibuja el área, trazando una franja representativa paralela a la recta y su rectángulo genérico correspondiente.

(2) Se calcula el producto del área del rectángulo por el cuadrado de la distancia de su centro geométrico a la recta, y se escribe la suma correspondiente a todos los rectángulos.

(3) Se aplica la regla de Barrow o teorema fundamental del cálculo integral suponiendo que el número de rectángulos crece indefinidamente. (Ver Problemas 1-4.)

EL MOMENTO DE INERCIA I_L DE UN SOLIDO de volumen V, generado en la rotación de un área plana alrededor de una recta L de su plano con respecto a esta recta (eje del sólido), se halla de la forma siguiente:

(1) Se dibuja el área, trazando una franja representativa paralela al eje y su rectángulo genérico correspondiente.

(2) Se calcula el producto del volumen generado en la rotación del rectángulo alrededor del eje (anillo) por el cuadrado de la distancia del centro geométrico del rectángulo a dicho eje, y se escribe la suma correspondiente a todos los rectángulos.

(3) Se aplica la regla de Barrow o teorema fundamental de cálculo integral suponiendo que el número de rectángulos crece indefinidamente. (Ver Problemas 5-8.)

RADIO DE GIRO. El número positivo R definido por la relación $I_L = AR^2$ en el caso de un área plana A, y por $I_L = VR^2$ en el caso de un sólido de revolución, recibe el nombre de radio de giro del área o volumen, respectivamente, con respecto a L.

TEOREMA DE STEINER. El momento de inercia de un área, arco, o volumen, con respecto a un eje cualquiera es igual al momento de inercia con respecto a un eje paralelo a él que pase por el centro geométrico más el producto del área, longitud del arco, o volumen, por el cuadrado de la distancia entre dichos ejes. (Ver Problemas 9-10.)

Problemas resueltos

1. Hallar el momento de inercia de un área rectangular A de dimensiones a y b con respecto a un lado.

Consideremos el área como se representa en la figura, y supongamos que el lado en cuestión es el eje y.

El área del rectángulo genérico es $= b \cdot \Delta x$, y su centro geométrico está situado en $(x, \frac{1}{2}b)$. Por tanto, su movimiento vale $x^2 b\ \Delta x$. En consecuencia,

$$I_y = \int_0^a x^2 b\, dx = b\frac{x^3}{3}\Big]_0^a = \frac{ba^3}{3} = \frac{1}{3}Aa^2$$

Así, pues, el momento de inercia de un área rectangular con respecto a uno de sus lados es igual a $\frac{1}{3}$ del producto del área por el cuadrado de la longitud del otro lado.

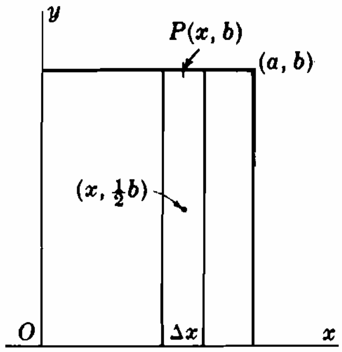

Fig. 38-1

2. Hallar el momento de inercia, con respecto al eje y, del área plana limitada por la parábola $y = 9 - x^2$ y el eje x.

Primera solución. Para el rectángulo genérico de la Fig. 38-2, tenemos, $A = y \cdot \Delta x$, y el centro geométrico está en $(x, \frac{1}{2}y)$. Luego,

$$I_y = \int_{-3}^{3} x^2 y \, dx = 2\int_0^3 (9x^2 - x^4)\, dx = \frac{324}{5}$$

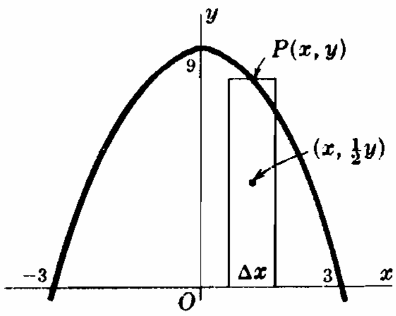

Fig. 38-2

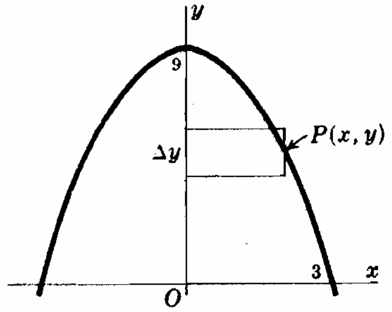

Fig. 38-3

Segunda solución. El área del rectángulo genérico de la Fig. 38-3 es $x \cdot \Delta y$, siendo x la dimensión perpendicular al eje y. Por tanto (ver Problema 1), el momento elemental vale $\frac{1}{3}(x\,\Delta y)x^2$. Así pues, teniendo en cuenta la simetría de la figura,

$$I_y = 2 \cdot \frac{1}{3}\int_0^9 x^3\, dy = \frac{2}{3}\int_0^9 (9 - y)^{3/2}\, dy = \frac{324}{5}$$

Luego $A = 2\int_0^9 x\, dy = 2\int_0^9 \sqrt{9 - y}\, dy = 36$, $I_y = 324/5 = AR^2$ y el radio de giro es $R = 3/\sqrt{5}$.

3. Hallar el momento de inercia, con respecto al eje y, del área limitada por la parábola $x^2 = 4y$ y la recta $y = x$ (ver Fig. 38-4).

Considerando el rectángulo genérico de la Fig. 38-4, de área $(x - \frac{1}{4}x^2)\,\Delta x$ y cuyo centro geométrico está en $[x, \frac{1}{2}(x + \frac{1}{4}x^2)]$, tendremos,

$$A = \int_0^4 (x - \tfrac{1}{4}x^2)\, dx = \frac{8}{3} \quad \text{e} \quad I_y = \int_0^4 x^2(x - \tfrac{1}{4}x^2)\, dx = \frac{64}{5} = \frac{24}{5}A$$

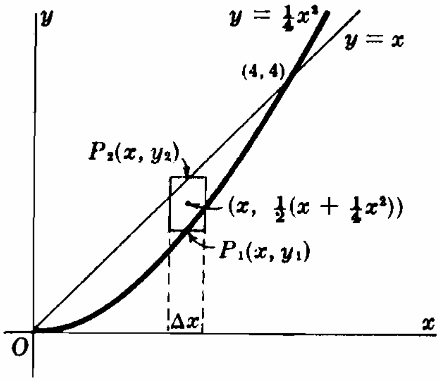

Fig. 38-4

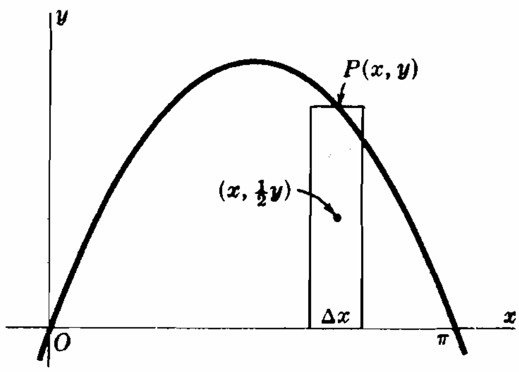

Fig. 38-5

4. Hallar el momento de inercia, con respecto a cada uno de los ejes coordenados, del área limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x$ desde $x = 0$ hasta $x = \pi$. (Ver Fig. 38-5.)

$$A = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x\Big]_0^{\pi} = 2$$

$$I_x = \int_0^{\pi} y^2 \cdot \frac{1}{3}\operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3 x\, dx = \frac{1}{3}\Big[-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x\Big]_0^{\pi} = \frac{4}{9} = \frac{2}{9}A$$

$$I_y = \int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen} x\, dx = \Big[2\cos x + 2x \operatorname{sen} x - x^2 \cos x\Big]_0^{\pi} = (\pi^2 - 4) = \frac{1}{2}(\pi^2 - 4)A$$

5. Hallar el momento de inercia de un cilindro circular recto de altura b y radio de la base a. (Ver Fig. 38-6.)

Consideremos que el cilindro se genera en la rotación, alrededor del eje y, de un rectángulo de dimensiones a y b, como se representa en la figura. El centro geométrico del rectángulo genérico es $(x, \frac{1}{2}b)$, y el volumen del anillo generado en dicha rotación alrededor del eje y es, $\Delta V = 2\pi bx \cdot \Delta x$. Por tanto, como $V = \pi ba^2$,

$$I_y = 2\pi \int_0^a x^2 \cdot bx\,dx = \tfrac{1}{2}\pi ba^4 = \tfrac{1}{2}\pi ba^2 \cdot a^2 = \tfrac{1}{2}Va^2$$

Así, pues, el momento de inercia de un cilindro circular recto con respecto a su eje es igual a la mitad de su volumen multiplicado por el cuadrado de su radio.

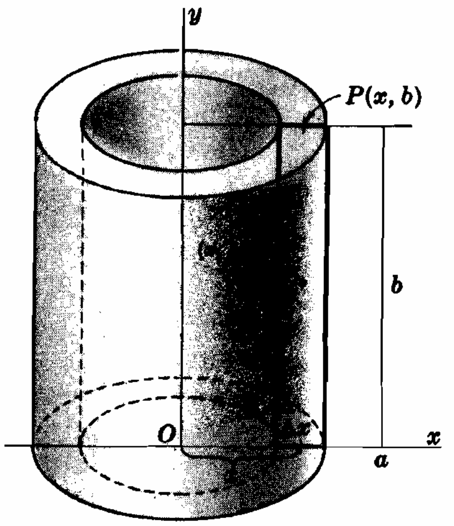

Fig. 38-6

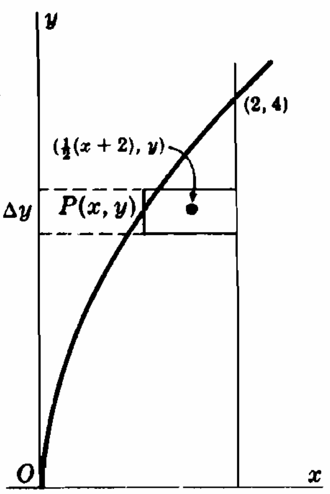

Fig. 38-7

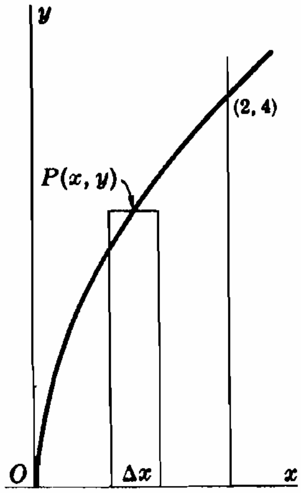

Fig. 38-8

6. Hallar el momento de inercia con respecto a su eje, del sólido generado al girar en la rotación alrededor del eje x, de área del primer cuadrante limitada por la parábola $y^2 = 8x$, el eje x y la recta $x = 2$.

Primera solución. El centro geométrico del rectángulo genérico (Fig. 38-7) es $[\frac{1}{2}(x + 2), y]$, y el volumen generado en la rotación del rectángulo alrededor del eje x es $2\pi y(2 - x)\,\Delta y = 2\pi y(2 - y^2/8)\,\Delta y$. Por tanto,

$$V = 2\pi \int_0^4 y(2 - y^2/8)\,dy = 16\pi \qquad \text{e} \qquad I_x = 2\pi \int_0^4 y^2 \cdot y(2 - y^2/8)\,dy = \frac{256}{3}\pi = \frac{16}{3}V$$

Segunda solución. El volumen generado (Fig. 38-8) en la rotación del rectángulo genérico con respecto al eje x es $\pi y^2\,\Delta x$, y teniendo en cuenta el resultado del Problema 5, su momento de inercia con respecto al eje x vale $\frac{1}{2}y^2(\pi y^2\,\Delta x) = \frac{1}{2}\pi y^4\,\Delta x$. Por tanto,

$$V = \pi \int_0^2 y^2\,dx = 8\pi \int_0^2 x\,dx = 16\pi$$

e

$$I_x = \frac{1}{2}\pi \int_0^2 y^4\,dx = 32\pi \int_0^2 x^2\,dx = \frac{256}{3}\pi = \frac{16}{3}V$$

7. Hallar el momento de inercia, con respecto a su eje, del sólido generado en la rotación del área del Problema 6 con respecto al eje y (Fig. 38-8).

El volumen generado en la rotación del rectángulo genérico con respecto al eje y es $2\pi xy\,\Delta x$. Por consiguiente,

$$V = 2\pi \int_0^2 xy\,dx = 4\sqrt{2}\,\pi \int_0^2 x^{3/2}\,dx = \frac{64}{5}\pi$$

e

$$I_y = 2\pi \int_0^2 x^2 \cdot xy\,dx = 4\sqrt{2}\,\pi \int_0^2 x^{7/2}\,dx = \frac{256}{9}\pi = \frac{20}{9}V$$

8. Hallar el momento de inercia, con respecto a su eje, del volumen de la esfera generada por un círculo de radio r alrededor de un diámetro fijo.

Tomemos el círculo con el diámetro fijo según el eje x, como se representa en la figura. Aplicando el método del anillo,

$$V = 2\pi\int_0^r 2x \cdot y\, dy = \tfrac{4}{3}\pi r^3$$

e

$$I_x = 4\pi\int_0^r y^2 \cdot xy\, dy = 4\pi\int_0^r y^3\sqrt{r^2 - y^2}\, dy$$

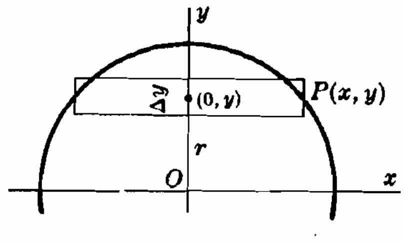

Fig. 38-9

Haciendo $y = r \operatorname{sen} z$, tendremos $\sqrt{r^2 - y^2} = r\cos z$, $dy = r \cos z\, dz$.

Para pasar de los límites de integración de y a los correspondientes de z, tendremos: para $y = 0$, $0 = r \operatorname{sen} z$, $0 = \operatorname{sen} z$, luego, $z = 0$; para $y = r$, $r = r \operatorname{sen} z$, $1 = \operatorname{sen} z$, luego, $z = \frac{1}{2}\pi$. Por tanto:

$$I_x = 4\pi r^5\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 z \cos^2 z\, dz = 4\pi r^5\int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 z)\cos^2 z \operatorname{sen} z\, dz = \tfrac{8}{15}\pi r^5 = \tfrac{2}{5}r^2 V$$

9. Hallar el momento de inercia del área de un círculo de radio r con respecto a una recta situada a s unidades de su centro.

Tomando el centro del círculo como origen, calculemos en primer lugar el momento de inercia del círculo con respecto al diámetro paralelo a la recta dada:

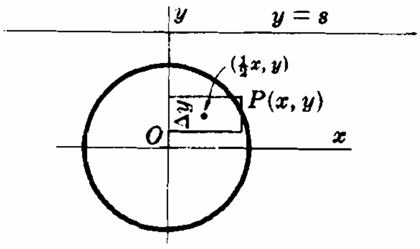

Fig. 38-10

$$I_x = 4\int_0^r y^2 \cdot x\, dy = 4\int_0^r y^2\sqrt{r^2 - y^2}\, dy = \tfrac{1}{4}r^4\pi = \tfrac{1}{4}r^2 A$$

De donde $\quad I_s = I_x + A \cdot s^2 = (\tfrac{1}{4}r^2 + s^2)A$

10. El momento de inercia con respecto a su eje, del sólido generado en la rotación de un arco de la curva $y = \operatorname{sen} x$ alrededor del eje x es $I_x = \pi^2/16 = 3V/8$. Hallar el momento de inercia del sólido con respecto a la recta $y = 2$.

$$I_{y=2} = I_x + 2^2 V = 3V/8 + 4V = 35V/8$$

Problemas propuestos

11. Hallar el momento de inercia del área plana dada con respecto a la recta indicada:

(a) $y = 4 - x^2$, $x = 0$, $y = 0$; eje x, eje y — *Sol.* $128A/35$, $4A/5$
(b) $y = 8x^3$, $y = 0$, $x = 1$; eje x, eje y — *Sol.* $128A/15$, $2A/3$
(c) $x^2 + y^2 = a^2$; un diámetro — *Sol.* $a^2A/4$
(d) $y^2 = 4x$, $x = 1$; eje x, eje y — *Sol.* $4A/5$, $3A/7$
(e) $4x^2 + 9y^2 = 36$; eje x, eje y — *Sol.* A, $9A/4$

12. Teniendo en cuenta los resultados del Problema 11 y el teorema de Steiner, obtener el momento de inercia del área dada con respecto a la recta que se indica.

(a) $y = 4 - x^2$; $y = 0$; $x = 4$ (b) $x^2 + y^2 = a^2$; una tangente (c) $y^2 = 4x$, $x = 1$; $x = 1$
Sol. (a) $84A/5$ (b) $5a^2A/4$ (c) $10A/7$

13. Hallar el momento de inercia, con respecto a su eje, del sólido generado en la rotación del área plana dada alrededor de la recta que se indica:

(a) $y = 4x - x^2$, $y = 0$; eje x, eje y (c) $4x^2 + 9y^2 = 36$; eje x, eje y
(b) $y^2 = 8x$, $x = 2$; eje x, eje y (d) $x^2 + y^2 = a^2$; $y = b$, $b > a$
Sol. (a) $128V/21$, $32V/5$ (b) $16V/3$, $20V/9$ (c) $8V/5$, $18V/5$ (d) $(b^2 + \frac{3}{4}a^2)V$

14. Aplicando el teorema de Steiner, obtener el momento de inercia de (a) una esfera de radio r con respecto a una tangente a ella, (b) un cilindro circular recto con respecto a una de sus generatrices.
Sol. (a) $7r^2V/5$, (b) $3r^2V/2$.

15. Demostrar que el momento de inercia de un área plana con respecto a una recta L perpendicular a su plano (o con respecto al pie de esta perpendicular) es igual a la suma de los momentos de inercia con respecto a dos rectas cualesquiera perpendiculares entre sí, situadas en el plano y que pasen por el pie de L.

16. Hallar el *momento de inercia polar* I_0 (momento de inercia con respecto al origen) del: (a) triángulo limitado por $y = 2x$, $y = 0$, $x = 4$, (b) círculo de radio r con su centro en el origen, (c) círculo $x^2 - 2rx + y^2 = 0$, (d) área limitada por la recta $y = x$ y la parábola $y^2 = 2x$.

Sol. (a) $I_0 = I_x + I_y = 56A/3$, (b) $\frac{1}{2}r^2A$, (c) $3r^2A/2$, (d) $72A/35$.

Capítulo 39

Presión de los fluidos

PRESION = fuerza por unidad de superficie = $\dfrac{\text{fuerza que actúa perpendicularmente a una superficie}}{\text{área sobre la que se distribuye la fuerza}}$

La presión p ejercida sobre una superficie horizontal de área A debida al peso de una columna de fluido de altura h es $p = \gamma h$, siendo γ el peso específico del fluido o peso por unidad de volumen. La fuerza ejercida sobre esta superficie es: presión $\times$ área de la superficie $= \gamma hA$.

La presión ejercida por un fluido en un punto cualquiera de su interior es igual en todas las direcciones.

FUERZA SOBRE UNA SUPERFICIE PLANA SUMERGIDA EN UN FLUIDO. La Fig. 39-1 representa una superficie plana sumergida verticalmente en un líquido de peso específico γ. Tomemos los ejes coordenados de forma que la superficie esté en el plano xy, con el eje x en la superficie libre del líquido y el sentido positivo del eje y hacia arriba. Dividamos el área en franjas (siempre paralelas a la superficie libre del líquido) y aproximemos cada una de ellas a un rectángulo (como se hizo en el Capítulo 34).

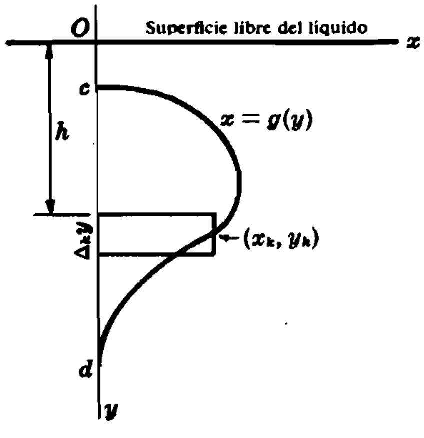

Fig. 39-1

Si llamamos h a la profundidad del lado superior del rectángulo genérico de la figura, la fuerza ejercida sobre este rectángulo, de altura $\Delta_k y$ y base $x_k = g(y_k')$ es $\gamma \cdot y_k' \cdot g(y_k) \cdot \Delta_k y$, siendo y_k' un valor de y comprendido entre h y $h + \Delta_k y$. La fuerza total sobre la superficie plana es, según el teorema de Bliss,

$$F = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \gamma \cdot y_k' \cdot g(y_k)\,\Delta_k y = \gamma \int_c^d y \cdot g(y)\,dy = \gamma \int_c^d yx\,dy$$

La fuerza ejercida sobre una superficie plana sumergida verticalmente en un líquido es igual al producto del peso específico del líquido por el área sumergida y por la distancia a la superficie libre del líquido del centro geométrico del área sumergida. Esto, más que una fórmula, es un enunciado que se deberá utilizar en el planteamiento de la integral correspondiente en cada caso.

Problemas resueltos

1. Hallar la fuerza ejercida sobre una de las caras de un rectángulo sumergido en agua, como indica la Fig. 39-2. El peso específico del agua es 1 000 kilopondios por metro cúbico.

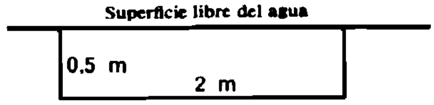

Fig. 39-2

El área sumergida es $0{,}5 \times 2 = 1$ m², y su centro geométrico está 0,25 m por debajo de la superficie libre. Por tanto,

F = peso específico $\times$ área $\times$ profundidad del centroide
$= 1\,000$ kp/m³ $\times$ 1 m² $\times$ 0,25 m $= 250$ kp

2. Hallar la fuerza ejercida sobre una de las caras del rectángulo sumergido en agua que indica la Fig. 39-3.

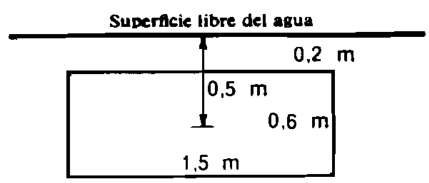

Fig. 39-3

El área sumergida es de 9 m², y su centro geométrico está 0,5 m por debajo de la superficie libre.

$F = 1\,000$ kp/m³ $\times$ 9 m² $\times$ 0,5 m $= 4\,500$ kp

3. Hallar la fuerza ejercida sobre una de las caras del triángulo representado en la Fig. 39-4, siendo la unidad de longitud el metro, y el peso específico del líquido 800 kilopondios por metro cúbico.

Primera solución. El área sumergida está limitada por las rectas $x = 0$, $y = 2$ y $3x + 2y = 10$. La fuerza ejercida sobre el rectángulo genérico de área $x \cdot \Delta y$ y profundidad y es $\gamma \cdot y \cdot x \cdot \Delta y = \gamma y \left(\frac{10 - 2y}{3}\right) \Delta y$. Por tanto,

$$F = \gamma \int_2^5 y \left(\frac{10 - 2y}{3}\right) dy = 9\gamma = 7\,200 \text{ kp}$$

Segunda solución. El área sumergida es 3 m² y su centro geométrico está $2 + \frac{1}{3}(3) = 3$ m por debajo de la superficie libre del líquido. Por tanto, $F = 800 \times 3 \times 3 = 7\,200$ kp.

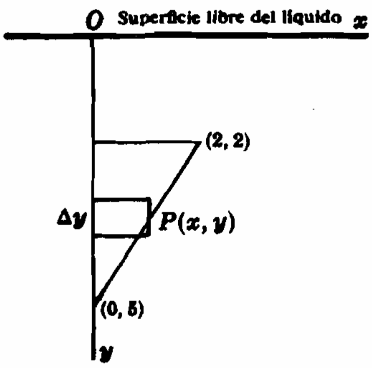

Fig. 39-4

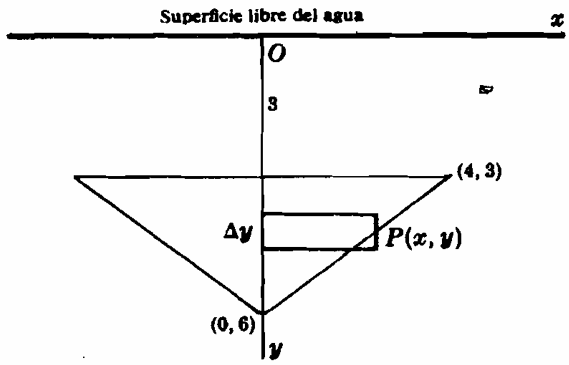

Fig. 39-5

4. Una superficie triangular, de lados 5, 5, y 8 metros, está sumergida verticalmente en agua con su lado mayor horizontal, como representa la Fig. 39-5, situado 3 metros por debajo de la superficie libre. Hallar la fuerza ejercida sobre una de las caras de la superficie.

Primera solución. Eligiendo los ejes que se indican en la figura, se observa que la fuerza pedida es el doble de la ejercida sobre el área limitada por las rectas $y = 3$, $x = 0$ y $3x + 4y = 24$. El área del triángulo genérico es $x \cdot \Delta y$, y la profundidad de su centro geométrico es y. Por consiguiente, $\Delta F = \gamma y x \cdot \Delta y = \gamma y(8 - 4y/3)\,\Delta y$, y

$$F = 2\gamma \int_3^6 y(8 - {}^4/_3 y)\, dy = 48\gamma = 48\,000 \text{ kp}$$

Segunda solución. El área sumergida vale 12 m², y su centro geométrico está $3 + \frac{1}{3}(3) = 4$ m por debajo de la superficie libre. Por tanto, $F = 1\,000(12)(4) = 4\,800$ kp.

5. Hallar la fuerza ejercida sobre el fondo de un recipiente de forma semicircular de 2 metros de radio cuando está lleno de un líquido de peso específico 900 kilopondios por metro cúbico.

Eligiendo los ejes coordenados que se indican en la Fig. 39-6, la fuerza ejercida sobre el rectángulo genérico es $\gamma y x \cdot \Delta y = \gamma y \sqrt{4 - y^2} \cdot \Delta y$. Por tanto,

$$F = 2\gamma \int_0^2 y\sqrt{4 - y^2}\, dy = \frac{16}{3}\gamma = 4\,800 \text{ kp}$$

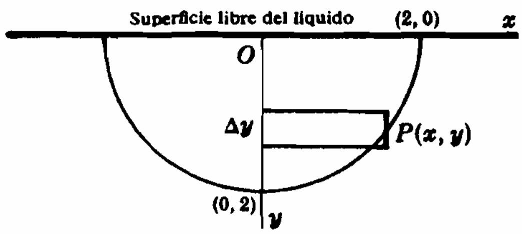

Fig. 39-6

6. Una superficie plana, cuya forma es la de un segmento parabólico de 12 metros de base y 4 metros de altura, está sumergida en el agua de manera que su base se encuentra en la superficie libre del líquido. Hallar la fuerza ejercida sobre una de las caras de la superficie.

Elegido un sistema de coordenadas como indica la Fig. 39-7, la ecuación de la parábola es $x^2 = 9y$. El área del rectángulo genérico es $2x \cdot \Delta y$, y la profundidad de su centro geométrico es $4 - y$. Por tanto,

$$\Delta F = 2\gamma(4 - y)x \cdot \Delta y = 2\gamma(4 - y) \cdot 3\sqrt{y}\,\Delta y$$

y $F = 6\gamma \int_0^4 (4 - y)\sqrt{y}\, dy = \frac{256}{5}\gamma = 51\,000$ kp

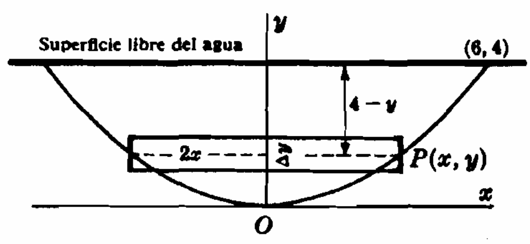

Fig. 39-7

7. Hallar la fuerza ejercida sobre la superficie de Problema 6, cuando esta se encuentra parcialmente sumergida en un líquido de peso específico 800 kilopondios por metro cúbico, de manera que su eje es paralelo a la superficie libre y situado 3 metros por debajo de ella.

Eligiendo los ejes coordenados que se indican en la Fig. 39-8, la ecuación de la parábola es $y^2 = 9x$.

El área del rectángulo genérico es $(4-x)\Delta y$, la profundidad de su centro geométrico es $3-y$, y la fuerza ejercida sobre él vale

$$\Delta F = \gamma(3-y)(4-x)\Delta y = \gamma(3-y)(4-y^2/9)\Delta y$$

Por tanto, $F = \gamma\int_{-6}^{3}(3-y)\left(4-\frac{y^2}{9}\right)dy$

$$= \frac{405}{4}\gamma = 101\,000 \text{ kp}$$

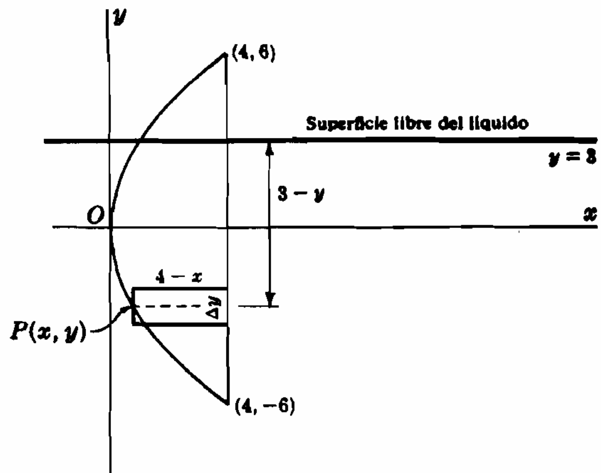

Fig. 39-8

Problemas propuestos

8. Una superficie rectangular de 6 × 8 metros está sumergida verticalmente en un líquido de peso específico γ (kilopondios por metro cúbico). Hallar la fuerza ejercida sobre una de las caras:

(*a*) Si el lado más pequeño está situado en la superficie libre.

(*b*) Si el lado más pequeño es el más próximo a la superficie libre y está situado 2 metros por debajo de ella.

(*c*) Si el lado mayor está situado en la superficie libre.

(*d*) Si la superficie se mantiene, por medio de una cuerda atada a un vértice, 2 metros por debajo de la superficie libre.

Sol. (*a*) 192γ kp, (*b*) 288γ kp, (*c*) 144γ kp, (*d*) 336γ kp.

9. Suponiendo el eje x horizontal y el eje y vertical, con el sentido positivo hacia abajo, hallar la fuerza ejercida sobre una cara de cada una de las superficies siguientes, suponiendo que las dimensiones se expresan en metros y que el peso específico del fluido es γ (kilopondios por metro cúbico).

(*a*) $y = x^2, y = 4$; superficie del fluido en $y = 0$. *Sol.* $128\gamma/5$ kp

(*b*) $y = x^2, y = 4$; superficie del fluido en $y = -2$. *Sol.* $704\gamma/15$ kp

(*c*) $y = 4-x^2, y = 0$; superficie del fluido en $y = 0$. *Sol.* $256\gamma/15$ kp

(*d*) $y = 4-x^2, y = 0$; superficie del fluido en $y = -3$. *Sol.* $736\gamma/15$ kp

(*e*) $y = 4-x^2, y = 2$; superficie del fluido en $y = -1$. *Sol.* $152\sqrt{2}\gamma/15$ kp

10. Un recipiente de sección trapezoidal, tiene 2 metros de base inferior, 4 metros de base superior y 3 metros de altura. Hallar la fuerza ejercida sobre el fondo (*a*) cuando está lleno de agua, (*b*) cuando contiene 2 metros de agua.
Sol. (*a*) 1 200 kp, (*b*) 4 900 kp.

11. Una superficie plana circular de 2 metros de radio está sumergida verticalmente en un líquido (γ kilopondios por metro cúbico) de forma que su centro queda 4 metros por debajo de la superficie libre. Hallar la fuerza ejercida sobre la mitad inferior y sobre la mitad superior de la superficie en cuestión. *Sol.* $(8\pi + 16/3)\gamma$ kp, $(8\pi - 16/3)\gamma$ kp.

12. Un depósito cilíndrico apoyado sobre una de sus generatrices, de 6 metros de radio, contiene un aceite de peso específico γ (kilopondios por metro cúbico) con una profundidad de 9 metros. Hallar la fuerza ejercida sobre cada una de las bases. *Sol.* $(72\pi + 81\sqrt{3})\gamma$ kp.

13. Se llama centro de presión de una superficie (Fig. 39-1) sumergida en un fluido, a un punto $(\bar{x}, \bar{y})$, en el que se debe aplicar una fuerza F para que produzca el mismo momento, con respecto a un eje cualquiera horizontal (vertical), que las fuerzas aplicadas sobre ella.

(*a*) Demostrar que $$F\bar{x} = \tfrac{1}{2}\gamma\int_c^d yx^2\,dy \text{ y } F\bar{y} = \gamma\int_c^d y^2x\,dy$$

(*b*) Demostrar que la profundidad del centro de presión es igual al momento de inercia de la superficie dividido por el momento del área de la misma, ambos con respecto a una recta situada en la superficie libre del líquido.

14. Teniendo en cuenta el apartado (*b*) del Problema 13, hallar la profundidad del centro de presión con respecto a la superficie libre del líquido en el (*a*) Problema 5, (*b*) Problema 6, (*c*) Problema 7, (*d*) Problema 9(*a*), (*e*) Problema 9(*b*).

Sol. (*a*) $3\pi/8$, (*b*) 16/7, (*c*) 126/25, (*d*) 20/7, (*e*) 358/77.

Capítulo 40

Trabajo mecánico

FUERZA CONSTANTE. El trabajo W realizado por una fuerza constante F a lo largo de un espacio s, en línea recta, es $F \cdot s$ unidades.

FUERZA VARIABLE. Consideremos una fuerza que varíe constantemente a lo largo de un espacio rectilíneo. Llamando x a la distancia del punto de aplicación de la fuerza a un punto fijo de la recta, la fuerza vendrá dada por una función, $F(x)$, de x.

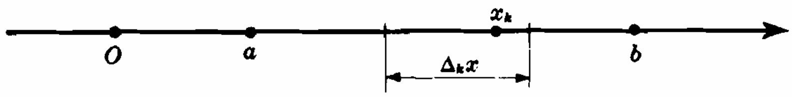

Fig. 40-1

Para hallar el trabajo realizado cuando el punto de aplicación se desplaza desde $x = a$ hasta $x = b$,

(*a*) Se divide el intervalo $a \leq x \leq b$ en n subintervalos de longitud $\Delta_k x$ y sea x_k un punto cualquiera del k-ésimo subintervalo.

(*b*) Se supone que durante el desplazamiento a lo largo del k-ésimo subintervalo la fuerza es constante e igual a $F(x_k)$; el trabajo realizado es igual a $F(x_k)\Delta_k x$, y el trabajo total debido al conjunto de las n fuerzas, vendrá dado por

$$\sum_{k=1}^{n} F(x_k)\,\Delta_k x.$$

(*c*) Se aplica la regla de Barrow o teorema fundamental del cálculo integral suponiendo que el número de subintervalos crece indefinidamente de manera que $\Delta_k x \to 0$; en estas condiciones tendremos

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F(x_k)\,\Delta_k x = \int_a^b F(x)\,dx$$

Problemas resueltos

1. Entre ciertos límites, la fuerza necesaria para estirar (comprimir) un resorte es proporcional al alargamiento (acortamiento), en donde la constante de proporcionalidad se denomina *constante de rigidez* del resorte. Suponiendo que para producir en un resorte, cuya longitud natural es de 10 centímetros, un alargamiento de 2,5 milímetros se necesita aplicar una fuerza de 25 kilopondios, calcular el trabajo realizado para alargarlo desde 11 a 22 centímetros.

Sea x el alargamiento: en estas condiciones, $F(x) = kx$.

Para $x = \frac{1}{4}$, $F(x) = 25$; luego $25 = \frac{1}{4}k$, $k = 100$, y $F(x) = 100x$.

El trabajo correspondiente a un alargamiento Δx es $100x \cdot \Delta x$, y el trabajo pedido será

$$W = \int_1^2 100x\,dx = 150 \text{ kp} \cdot \text{cm}$$

2. La constante de rigidez de un resorte vale 400 000 kilopondios por metro. Hallar el trabajo necesario para comprimirlo 1 centímetro.

Sea x el desplazamiento, en metros, del extremo libre del muelle. En estas condiciones, $F(x) = 400\,000x$ y el trabajo correspondiente al desplazamiento Δx vale $400\,000x \cdot \Delta x$. Por consiguiente,

$$W = \int_0^{1/100} 400\,000x\,dx = 20 \text{ kpm}$$

3. De un tambor cilíndrico se han desenrollado 50 metros de un cable que pesa 3 kilopondios por metro. Hallar el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad para desenrollar 250 metros más.

Sea x = longitud desenrollada en un instante dado. Entonces, $F(x) = 3x$ y

$$W = \int_{50}^{300} 3x\,dx = 131\,250 \text{ kpm}$$

4. Un cable de 100 metros y 5 kilopondios por metro de peso, está unido a un cuerpo de 500 kilopondios. Hallar el trabajo realizado al enrollar 80 metros de cable sobre un tambor.

Sea x la longitud de cable que se ha enrollado en el tambor.

El peso total (cable y cuerpo) es $500 + 5(100 - x) = 1\,000 - 5x$, y el trabajo realizado para elevar el cuerpo una distancia Δx es $(1\,000 - 5x)\,\Delta x$. Por tanto, el trabajo pedido será:

$$W = \int_0^{80} (1\,000 - 5x)\,dx = 64\,000 \text{ kpm}$$

5. Un depósito cilíndrico circular, de 2 metros de radio y 8 metros de altura, está lleno de agua. Hallar el trabajo realizado al bombear todo el agua hasta la base superior del depósito. El peso específico γ del agua igual a 1 000 kilopondios por metro cúbico.

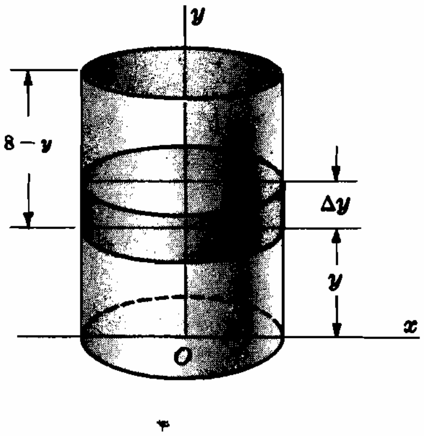

Fig. 40-2

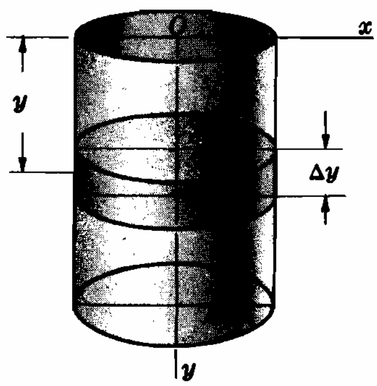

Fig. 40-3

Primera solución. Supongamos (Fig. 40-2) que el agua es impulsada por medio de un pistón que empuja al agua desde el fondo del depósito. En la figura, se representa al pistón situado a una distancia y metros del fondo. La fuerza necesaria para elevar el agua es igual al peso del agua que gravita sobre el pistón, es decir, $F(y) = \pi r^2 \gamma(8 - y) = 4\pi\gamma(8 - y)$ con lo que el trabajo correspondiente a un desplazamiento Δy del pistón será $4\pi\gamma(8 - y) \cdot \Delta y$. El trabajo necesario para vaciar el depósito es, en consecuencia,

$$W = 4\pi\gamma \int_0^8 (8 - y)\,dy = 128\,\pi\gamma = 128\pi(1\,000) = 128\,000\pi \text{ kpm}$$

Segunda solución. Imaginamos (Fig. 40-3) que el agua del depósito se divide en n discos de espesor Δy; para vaciar el depósito, habrá que elevar cada uno de estos discos hasta la base superior. El trabajo necesario para elevar el disco genérico de la figura, situado a una distancia y de la superficie libre y cuyo peso es de $4\pi\gamma \cdot \Delta y$, es igual a $4\pi\gamma y \cdot \Delta y$. Teniendo en cuenta el teorema fundamental, cuando el número de discos crece indefinidamente,

$$W = 4\pi\gamma \int_0^8 y\,dy = 128\pi\gamma = 128\,000\pi \text{ kpm}$$

6. La dilatación del gas contenido en un depósito cilíndrico desplaza un émbolo de forma que el volumen del gas aumenta de 15 a 25 centímetros cúbicos. Suponiendo que la relación entre la presión (p kilopondios por centímetro cuadrado) y el volumen (v centímetros cúbicos) viene dada por $pv^{1,4} = 60$, hallar el trabajo realizado en la expansión.

Sea A el área de la sección del cilindro; en estas condiciones, la fuerza ejercida por el gas es pA. Un aumento de volumen Δv supone una elevación del pistón de $\Delta v/A$, y el trabajo correspondiente a este desplazamiento es

$$pA \cdot \frac{\Delta v}{A} = \frac{60}{v^{1,4}}\,\Delta v \text{ Luego,}$$

$$W = 60 \int_{15}^{25} \frac{dv}{v^{1,4}} = -\frac{60}{0,4}\,v^{-0,4}\Big]_{15}^{25} = -150\left(\frac{1}{25^{0,4}} - \frac{1}{15^{0,4}}\right) = 9,39 \text{ kp} \cdot \text{cm}$$

7. Un depósito cónico (Fig. 40-4) cuya base tiene un diámetro de 4 metros y cuya altura mide 5 metros, contiene un líquido de peso específico γ kilopondios por metro cúbico. Sabiendo que la profundidad del líquido del depósito es de 3 metros, hallar el trabajo necesario para bombear todo el líquido hasta una altura de 1 metro por encima de la parte superior del depósito.

Consideremos un disco genérico cuyo radio sea x, de espesor Δy y distante del fondo del depósito y. El peso de este disco será $\pi\gamma x^2 \cdot \Delta y$, y el trabajo necesario para elevarlo hasta la altura indicada será $\pi\gamma x^2(6-y)\,\Delta y$.

De los triángulos semejantes, $x/y = 2/5$ ó $x = 2/5y$. Luego

$$W = \frac{4}{25}\pi\gamma \int_0^3 y^2(6-y)\,dy = 5{,}4\pi\gamma \text{ kpm}$$

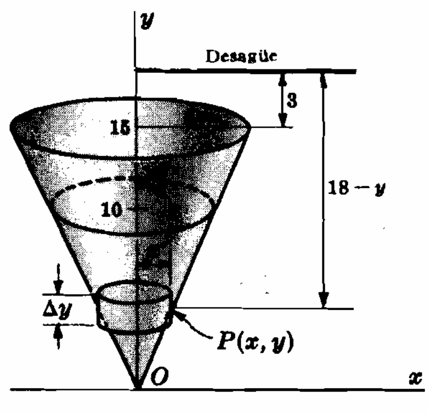

Fig. 40-4

Problemas propuestos

8. Sabiendo que para producir un alargamiento de 1 centímetro en un resorte de 12 centímetros de longitud natural hay que aplicar una fuerza de 80 kilopondios, calcular el trabajo necesario para alargarlo (*a*) desde 12 a 15 centímetros, (*b*) desde 15 a 16 centímetros. *Sol.* (*a*) 360 kp cm, (*b*) 280 kp. cm.

9. Dos partículas se repelen mutuamente con una fuerza inversamente proporcional a la distancia que las separa. Suponiendo que una de ellas permanece fija en un punto del eje x a 2 unidades a la derecha del origen, hallar el trabajo necesario para desplazar a la otra desde un punto situado 3 unidades a la izquierda del origen hasta el origen. *Sol.* $3k/10$.

10. La fuerza con que la tierra atrae a un cuerpo de peso γ kilopondios situado a una distancia s kilómetros de su centro es igual a $F = (4\,000)^2\gamma/2{,}2s^2$. Suponiendo que el radio de la tierra es de 6 400 kilómetros, hallar el trabajo realizado contra la fuerza de la gravedad para mover un cuerpo de 1 kilopondio desde la superficie de la tierra hasta un punto situado a 1 000 kilómetros de dicha superficie. *Sol.* $15{,}4 \times 10^3$ kpm.

11. Hallar el trabajo realizado contra la fuerza de la gravedad para elevar un cohete de 8 toneladas métricas de peso hasta una altura de 200 kilómetros sobre la superficie terrestre. *Sol.* $34{,}5 \times 10^6$ kpm.

12. Hallar el trabajo realizado en una mina al elevar 500 kilopondios de cal una altura de 500 metros por medio de un cable que pesa 3 kilopondios por metro. *Sol.* $6{,}25 \times 10^5$ kpm.

13. Un depósito tiene una base cuadrada de 3 metros de lado y una altura de 2 metros. Hallar el trabajo realizado para vaciarlo por su parte superior (*a*) si está totalmente lleno de agua, (*b*) si el agua ocupa las 3/4 partes del depósito. *Sol.* (*a*) 18 000 kpm, (*b*) 16 875 kpm.

14. Un depósito semiesférico de 1 metro de radio está totalmente lleno de agua. Hallar (*a*) el trabajo necesario para bombear el agua por la parte superior del depósito, (*b*) para vaciarlo a través de un tubo situado a una altura de 60 centímetros con respecto a dicha parte superior. *Sol.* (*a*) 786 kpm, (*b*) 2 040 kpm.

15. Hallar el trabajo necesario para llenar un depósito cilíndrico de 3 metros de radio y 10 metros de altura de un líquido de peso específico γ kilopondios por metro cúbico a través de un orificio practicado en su fondo. Idem, suponiendo que el depósito está horizontal. *Sol.* $450\pi\gamma$ kpm, $270\pi\gamma$ kpm.

16. Demostrar que el trabajo necesario para bombear el agua de un depósito a través de su parte superior es igual al necesario para elevar su contenido desde el centro geométrico del líquido hasta el orificio de salida.

17. Un peso de 100 kilopondios se arrastra hacia arriba por un plano inclinado de 20 metros de longitud que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Sabiendo que la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento es μN, siendo $\mu = 1/\sqrt{3}$ el coeficiente de rozamiento y $N = 100 \cos 30°$ la fuerza normal entre el peso y la rampa, hallar el trabajo realizado. *Sol.* 2 000 kpm.

18. Resolver el Problema 17 suponiendo que el ángulo de inclinación de la rampa es de 45° y que el coeficiente de rozamiento vale $\mu = 1/\sqrt{2}$. *Sol.* $1\,000(1 + \sqrt{2})$ kpm.

19. Un cilindro contiene un volumen de aire sobre el que se apoya un émbolo. Sabiendo que cuando la presión es de 20 kilopondios por metro cuadrado el volumen ès de 100 metros cúbicos, hallar el trabajo realizado por el émbolo para comprimir el aire hasta 2 metros cúbicos (*a*) suponiendo pv = constante, (*b*) suponiendo $pv^{1,4}$ = constante. *Sol.* (*a*) 7 824 kpm, (*b*) 18 910 kpm.

Capítulo 41

Longitud de un arco

LA LONGITUD DE UN ARCO AB de una curva es, por definición, el límite de la suma de las longitudes de las distintas cuerdas AP_1, P_1P_2, . . ., $P_{n-1}B$, que unen los distintos puntos del arco, cuando el número de estos crece indefinidamente, de manera que la longitud de cada una de las cuerdas tiende a cero.

Sean $A(a, c)$ y $B(b, d)$ dos puntos de una curva $y = f(x)$, con $f(x)$ y su derivada, $f'(x)$, continua en el intervalo $a \leq x \leq b$; en estas condiciones, la longitud del arco AB viene dada por

$$s = \int_{AB} ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

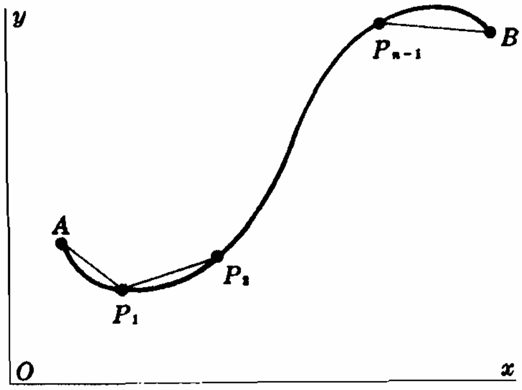

Fig. 41-1

Análogamente, si $A(a, c)$ y $B(b, d)$ son dos puntos de la curva $x = g(y)$, siendo $g(y)$ y su derivada con respecto a y continua en el intervalo $c \leq y \leq d$, la longitud del arco AB viene dada por

$$s = \int_{AB} ds = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

Si $A(u = u_1)$ y $B(u = u_2)$ son dos puntos de una curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = f(u)$, y $y = g(u)$ que cumplen las condiciones de continuidad, la longitud del arco AB viene dada por

$$s = \int_{AB} ds = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2}\, du$$

(Véase la deducción en el Problema 1.)

Problemas resueltos

1. Deducir la fórmula de la longitud de un arco

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Dividamos el intervalo $a \leq x \leq b$ en subintervalos mediante los puntos $\xi_0 = a, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n = b$, y levantemos en ellos rectas perpendiculares; sobre la curva se determinan los puntos $P_0 = A, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}, P_n = B$ como indica la Fig. 41-2. En una cuerda representativa se verifica,

$$P_{k-1}P_k = \sqrt{(\Delta_k x)^2 + (\Delta_k y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_k y}{\Delta_k x}\right)^2}\, \Delta_k x$$

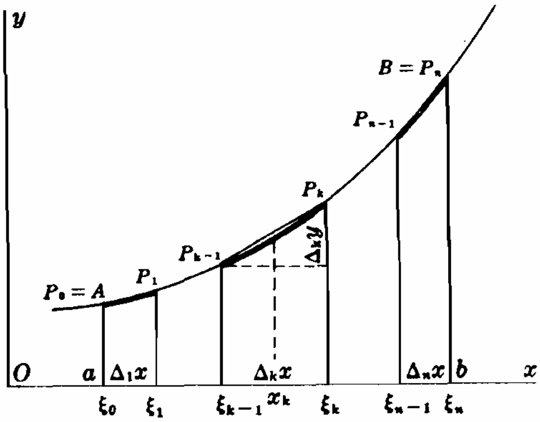

Fig. 41-2

Según el teorema del valor medio (Capítulo 21) existirá al menos un punto, $x = x_k$, sobre el arco $P_{k-1}P_k$ en la que la pendiente de la tangente, $f'(x_k)$, es igual a la pendiente, $\dfrac{\Delta_k y}{\Delta_k x}$ de la cuerda $P_{k-1}P_k$. Así, pues,

$$P_{k-1}P_k = \sqrt{1 + \{f'(x_k)\}^2}\,\Delta_k x, \qquad \xi_{k-1} < x_k < \xi_k$$

y, aplicando el teorema fundamental,

$$AB = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \{f'(x_k)\}^2}\,\Delta_k x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

2. Hallar la longitud del arco de la curva $y = x^{3/2}$ desde $x = 0$ e $x = 5$.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$ y

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{3/2}\Bigg]_0^5 = \frac{335}{27} \text{ unidades}$$

3. Hallar la longitud del arco de la curva $x = 3y^{3/2} - 1$ desde $y = 0$ a $y = 4$.

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{9}{2}y^{1/2}$ y

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{81}{4}y}\,dy = \frac{8}{243}(82\sqrt{82} - 1) \text{ unidades}$$

4. Hallar la longitud del arco de $24xy = x^4 + 48$ desde $x = 2$ a $x = 4$.

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^4 - 16}{8x^2}$ y $1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = \dfrac{1}{64}\left(\dfrac{x^4 + 16}{x^2}\right)^2$. De donde $s = \dfrac{1}{8}\displaystyle\int_2^4 \left(x^2 + \frac{16}{x^2}\right)dx = \frac{17}{6}$ unidades

5. Hallar la longitud del arco de la catenaria $y = \frac{1}{2}a(e^{x/a} + e^{-x/a})$ desde $x = 0$ a $x = a$.

$\dfrac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(e^{x/a} - e^{-x/a})$ y $1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}(e^{2x/a} - 2 + e^{-2x/a}) = \frac{1}{4}(e^{x/a} + e^{-x/a})^2$. Por tanto,

$$s = \frac{1}{2}\int_0^a (e^{x/a} + e^{-x/a})\,dx = \frac{1}{2}a\left[e^{x/a} - e^{-x/a}\right]_0^a = \frac{1}{2}a\left(e - \frac{1}{e}\right) \text{ unidades}$$

6. Hallar la longitud del arco de la parábola $y^2 = 12x$ limitado por la ordenada correspondiente a $x = 3$.

La longitud pedida es el doble de la que hay desde el punto (0, 0) al punto (3, 6).

$\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y}{6}$ y $1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2 = \dfrac{36 + y^2}{36}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} s &= 2\left(\frac{1}{6}\right)\int_0^6 \sqrt{36 + y^2}\,dy = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}y\sqrt{36 + y^2} + 18\ln\left(y + \sqrt{36 + y^2}\right)\right]_0^6 \\ &= 6\{\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\} \text{ unidades} \end{aligned}$$

7. Hallar la longitud del arco de la curva $x = t^2$, $y = t^3$ desde $t = 0$ a $t = 4$.

$\dfrac{dx}{dt} = 2t$, $\dfrac{dy}{dt} = 3t^2$, y $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = 4t^2 + 9t^4 = 4t^2\left(1 + \dfrac{9}{4}t^2\right)$. Por tanto

$$s = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t^2} \cdot 2t\,dt = \frac{8}{27}(37\sqrt{37} - 1) \text{ unidades}$$

8. Hallar la longitud de un arco de la cicloide $x = \theta - \operatorname{sen}\theta$, $y = 1 - \cos\theta$.

Se describe un arco cuando θ varía desde $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$.

$\dfrac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta} = \operatorname{sen}\theta$, y $\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2 = 2(1 - \cos\theta) = 4\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\theta$. Por tanto

$$s = 2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta\,d\theta = -4\cos\frac{1}{2}\theta\Bigg]_0^{2\pi} = 8 \text{ unidades}$$

Problemas propuestos

Hallar, en los problemas 9-20, la longitud de la curva entera ó del arco indicado.

9. $y^3 = 8x^2$ desde $x = 1$ a $x = 8$. *Sol.* $(104\sqrt{13} - 125)/27$ unidades.

10. $6xy = x^4 + 3$ desde $x = 1$ a $x = 2$. *Sol.* 17/12 unidades.

11. $y = \ln x$ desde $x = 1$ a $x = 2\sqrt{2}$. *Sol.* $3 - \sqrt{2} + \ln \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})$ unidades.

12. $27y^2 = 4(x - 2)^3$ desde $(2, 0)$ a $(11, 6\sqrt{3})$. *Sol.* 14 unidades.

13. $y = \ln (e^x - 1)/(e^x + 1)$ desde $x = 2$ a $x = 4$. *Sol.* $\ln (e^4 + 1) - 2$ unidades.

14. $y = \ln (1 - x^2)$ desde $x = 1/4$ a $x = 3/4$. *Sol.* $\ln 21/5 - 1/2$ unidades.

15. $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4} \ln x$ desde $x = 1$ a $x = e$. *Sol.* $\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}$ unidades.

16. $y = \ln \cos x$ desde $x = \pi/6$ a $x = \frac{1}{4}\pi$. *Sol.* $\ln (1 + \sqrt{2})/\sqrt{3}$ unidades.

17. $x = a \cos \theta$, $y = a \operatorname{sen} \theta$. *Sol.* $2\pi a$ unidades.

18. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \operatorname{sen} t$ desde $t = 0$ a $t = 4$. *Sol.* $\sqrt{2}(e^4 - 1)$ unidades.

19. $x = \ln\sqrt{1 + t^2}$, $y = \operatorname{arc\,tag} t$ desde $t = 0$ a $t = 1$. *Sol.* $\frac{1}{4}\pi$ unidades.

20. $x = 2 \cos \theta + \cos 2\theta + 1$, $y = 2 \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} 2\theta$. *Sol.* 16 unidades.

21. La posición de un punto en el instante t viene dada por $x = \frac{1}{2}t^2$, $y = \frac{1}{9}(6t + 9)^{3/2}$. Hallar el espacio recorrido por el punto desde $t = 0$ hasta $t = 4$. *Sol.* 20 unidades.

22. Sea $P(x, y)$ un punto fijo y $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ un punto variable de la curva $y = f(x)$ (ver Fig. 17-1, Capítulo 17). Demostrar que

$$\lim_{Q \to P} \frac{\text{arco } PQ}{\text{cuerda } PQ} = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta s}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \frac{ds/dx}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} = 1$$

23. (*a*) Demostrar que la longitud del arco en el primer cuadrante de $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \operatorname{sen}^3 \theta$ es $3a/2$.

(*b*) Demostrar que la longitud del arco en el primer cuadrante de $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ es igual a $a^{1/3} \int_0^a \frac{dx}{x^{1/3}}$ en la que el integrando se hace infinito para el límite inferior de integración. En el Capítulo 46 se estudian las integrales definidas de este tipo.

24. Un perro situado en el punto $A(1, 0)$, ve a su dueño en el origen $O(0, 0)$ que pasea a lo largo del eje y y echa a correr hacia él. Hallar la trayectoria que recorre el perro suponiendo que se dirige constantemente hacia su dueño y que, ambos, se mueven a una velocidad constante, siendo p la del dueño y $q > p$ la del perro. El problema se resuelve, por ejemplo, aplicando la teoría expuesta en el Capítulo 70. Sin embargo, aquí se trata de demostrar que la ecuación $y = f(x)$ de la trayectoria se puede hallar integrando

$$y' = \tfrac{1}{2}(x^{p/q} - x^{-p/q})$$

Ind. Sea $P(a, b)$, $0 < a < 1$, la posición del perro y sea Q la intersección del eje y con la tangente a $y = f(x)$ en P. Hay que hallar el tiempo que tarda el perro en alcanzar el punto P y demostrar que, en ese momento, el dueño está en Q.

Capítulo 42

Area de la superficie de revolución

EL AREA DE LA SUPERFICIE generada en la rotación del arco AB de una curva continua alrededor de una recta situada en su plano es, por definición, el límite de la suma de las áreas generadas por las n cuerdas, AP_1, P_1P_2, . . ., $P_{n-1}B$, en la rotación en torno a dicha recta, cuando el número de cuerdas crece indefinidamente de manera que la longitud de cada una de las cuerdas tiende a cero.

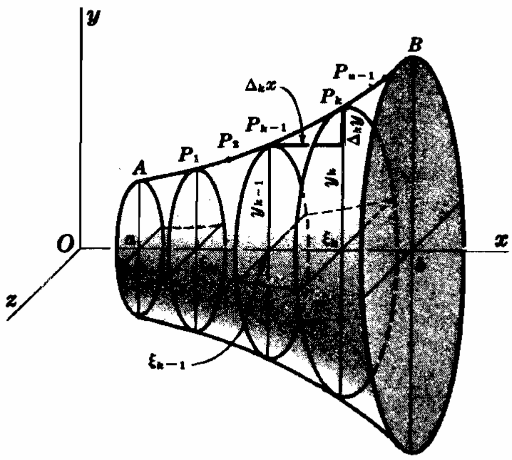

Fig. 42-1

Si $A(a, c)$ y $B(b, d)$ son dos puntos de la curva $y = f(x)$, siendo $f(x)$ y $f'(x)$ continuas y, además, $f(x)$ no cambia de signo en el intervalo $a \le x \le b$, el área de la superficie generada en la rotación del arco AB alrededor del eje x viene dada por

$$S_x = 2\pi\int_{AB} y\,ds = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Cuando, además, $f'(x) \neq 0$ en el citado intervalo, se tiene

$$S_x = 2\pi\int_{AB} y\,ds = 2\pi\int_c^d y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

Si $A(a, c)$ y $B(b, d)$ son dos puntos de la curva $x = g(y)$, siendo $g(y)$ y su derivada con respecto a y dos funciones que satisfacen las condiciones de continuidad, el área de la superficie generada en la rotación del arco AB con respecto al eje x viene dada por

$$S_y = 2\pi\int_{AB} x\,ds = 2\pi\int_a^b x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$$

Si $A(u = u_1)$ y $B(u = u_2)$ son dos puntos de la curva definida por las ecuaciones paramétricas $x = f(u)$, $y = g(u)$, funciones que satisfacen las ecuaciones de continuidad, el área de la superficie generada en la rotación del arco AB alrededor del eje x, viene dada por

$$S_x = 2\pi\int_{AB} y\,ds = 2\pi\int_{u_1}^{u_2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}\,du$$

y el área generada en la rotación del arco AB alrededor del eje y viene dada por

$$S_y = 2\pi\int_{AB} x\,ds = 2\pi\int_{u_1}^{u_2} x\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\left(\frac{dy}{du}\right)^2}\,du$$

Problemas resueltos

1. Hallar el área de la superficie de revolución generada en la rotación alrededor del eje x, del arco de parábola $y^2 = 12x$ desde $x = 0$ hasta $x = 3$.

(*a*) Aplicando la fórmula $S_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$.

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2+36}{y^2}$$

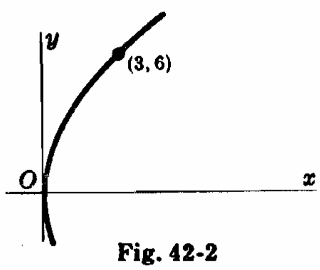

Fig. 42-2

y $\quad S_x = 2\pi\int_0^3 y\frac{\sqrt{y^2+36}}{y}\,dx = 2\pi\int_0^3 \sqrt{12x+36}\,dx = 24(2\sqrt{2}-1)\pi$ unidades de superficie

(*b*) Aplicando la fórmula $S_x = 2\pi\int_c^d y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy$. $\quad \frac{dx}{dy}=\frac{y}{6}$, $1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{36+y^2}{36}$, y

$$S_x = 2\pi\int_0^6 y\frac{\sqrt{36+y^2}}{6}\,dy = \frac{\pi}{9}(36+y^2)^{3/2}\Big]_0^6 = 24(2\sqrt{2}-1)\pi \text{ unidades de superficie}$$

2. Hallar el área de la superficie de revolución generada en la rotación alrededor del eje y, del arco de la curva $x = y^3$ desde $y = 0$ hasta $y = 1$.

$$S_y = 2\pi\int_c^d x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = 2\pi\int_0^1 y^3\sqrt{1+9y^4}\,dy$$

$$= \frac{\pi}{27}(1+9y^4)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1) \text{ unidades de superficie}$$

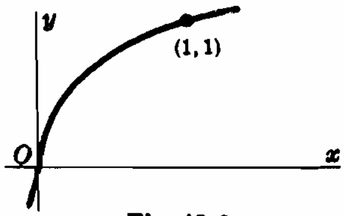

Fig. 42-3

3. Hallar el área de la superficie de revolución generada en la rotación, alrededor del eje x, del arco de curva $y^2 + 4x = 2\ln y$ desde $y = 1$ hasta $y = 3$.

$$S_x = 2\pi\int_c^d y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = 2\pi\int_1^3 y\frac{1+y^2}{2y}\,dy = \pi\int_1^3 (1+y^2)\,dy = \frac{32}{3}\pi \text{ unidades de superficie}$$

4. Hallar el área de la superficie de revolución generada en la rotación alrededor del eje x de un lazo de la curva $8a^2y^2 = a^2x^2 - x^4$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2x-2x^3}{8a^2y} \quad \text{y} \quad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\frac{(a^2-2x^2)^2}{8a^2(a^2-x^2)} = \frac{(3a^2-2x^2)^2}{8a^2(a^2-x^2)}$$

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_0^a \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2a\sqrt{2}}\cdot\frac{3a^2-2x^2}{2a\sqrt{2}\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4a^2}\int_0^a (3a^2-2x^2)x\,dx = \tfrac{1}{4}\pi a^2 \text{ unidades de superficie.}$$

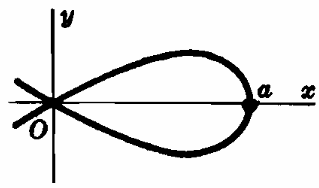

Fig. 42-4

5. Hallar el área de la superficie de revolución generada en la rotación alrededor del eje x de la elipse $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

$$S_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_{-4}^4 y\frac{\sqrt{16y^2+x^2}}{4y}\,dx = \frac{1}{2}\pi\int_{-4}^4\sqrt{64-3x^2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\left[\frac{x\sqrt{3}}{2}\sqrt{64-3x^2} + 32\,\text{arc sen}\,\frac{x\sqrt{3}}{8}\right]_{-4}^4 = 8\pi\left(1+\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi\right) \text{unidades de superficie.}$$

6. Hallar el área de la superficie de revolución generada en la rotación, alrededor del eje x de la hipocicloide $x = a\cos^3\theta$, $y = a\,\text{sen}^3\,\theta$.

La superficie pedida se genera en la rotación del arco desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$.

$$\frac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\,\text{sen}\,\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 3a\,\text{sen}^2\theta\cos\theta, \quad \text{y} \quad \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 9a^2\cos^2\theta\,\text{sen}^2\theta.$$

$$S_x = 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2} y\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/2}(a\,\text{sen}^3\theta)3a\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta = \frac{12a^2\pi}{5} \text{ un. sup.}$$

Nota. Sería lógico escribir $2\pi\int_0^\pi (a\,\text{sen}^3\,\theta)3a\cos\theta\,\text{sen}\,\theta\,d\theta$, pero este valor es igual a cero. Debe recordarse que si bien un área, un volumen, etc., se pueden expresar por medio de una integral definida, no toda integral definida representa siempre un área, etc.

7. Hallar el área de la superficie de revolución generada en la rotación, alrededor del eje x, de la cardioide $x = 2\cos\theta - \cos 2\theta$, $y = 2\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,2\theta$.

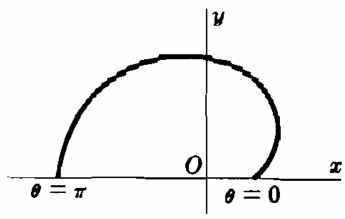

Fig. 42-5

La superficie pedida se genera en la rotación del arco desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi$.

$$dx/d\theta = -2\,\text{sen}\,\theta + 2\,\text{sen}\,2\theta, \quad dy/d\theta = 2\cos\theta - 2\cos 2\theta, \quad \text{y}$$
$$(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2 = 8(1 - \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,2\theta - \cos\theta\cos 2\theta) = 8(1-\cos\theta).$$

$$S_x = 2\pi\int_0^{\pi}(2\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,2\theta)\cdot 2\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$$

$$= 8\sqrt{2}\,\pi\int_0^{\pi}\text{sen}\,\theta(1-\cos\theta)^{3/2}\,d\theta = \frac{16\sqrt{2}}{5}\pi(1-\cos\theta)^{5/2}\Big]_0^{\pi} = \frac{128\pi}{5} \text{ unidades de superficie.}$$

8. Demostrar: $S_x = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$

Supongamos dividido el arco en n cuerdas, como se observa en la Fig. 42-1. En la rotación de la cuerda $P_{k-1}P_k$ alrededor del eje x se genera un tronco de cono cuyos radios de las bases son y_{k-1} e y_k, respectivamente, de altura

$$P_{k-1}P_k = \sqrt{(\Delta_k x)^2 + (\Delta_k y)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta_k y}{\Delta_k x}\right)^2}\,\Delta_k x = \sqrt{1+\{f'(x_k)\}^2}\,\Delta_k x$$

(ver Problema 1, Capítulo 41) y cuya área lateral (circunferencia de la sección media x altura) es

$$S_k = 2\pi\left(\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\right)\sqrt{1+\{f'(x_k)\}^2}\,\Delta_k x$$

Como $f(x)$ es continua, existirá al menos un punto, x'_k, del arco $P_{k-1}P_k$ tal que

$$f(x'_k) = \tfrac{1}{2}(y_{k-1}+y_k) = \tfrac{1}{2}\{f(\xi_{k-1}) + f(\xi_k)\}$$

Luego $$S_k = 2\pi\,f(x'_k)\sqrt{1+\{f'(x_k)\}^2}\,\Delta_k x$$

y, por el teorema de Bliss,

$$S_x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} 2\pi\,f(x'_k)\sqrt{1+\{f'(x_k)\}^2}\,\Delta_k x$$

$$= 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

Problemas propuestos

Hallar en los problemas 9-18, el área de la superficie generada en la rotación del arco dado alrededor del eje que se indica.

9. $y = mx$ desde $x = 0$ a $x = 2$; eje x. *Sol.* $4m\pi\sqrt{1+m^2}$ unidades de superficie

10. $y = \frac{1}{3}x^3$ desde $x = 0$ a $x = 3$; eje x. *Sol.* $\pi(82\sqrt{82} - 1)/9$ unidades de superficie.

11. $y = \frac{1}{3}x^3$ desde $x = 0$ a $x = 3$; eje y. *Sol.* $\frac{1}{2}\pi[9\sqrt{82} + \ln(9+\sqrt{82})]$ unidades de superficie.

12. $8y^2 = x^2(1 - x^2)$, un lazo; eje x. *Sol.* $\frac{1}{4}\pi$ unidades de superficie.

13. $y = x^3/6 + 1/2x$ desde $x = 1$ a $x = 2$; eje y. *Sol.* $(15/4 + \ln 2)\pi$ unidades de superficie.

14. $y = \ln x$ desde $x = 1$ a $x = 7$; eje y *Sol.* $[34\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2})]\pi$ unidades de superficie.

15. $9y^2 = x(3 - x)^2$ un lazo; eje y. *Sol.* $28\pi\sqrt{3}/5$ unidades de superficie.

16. $y = a\cosh x/a$ desde $x = -a$ a $x = a$; eje x. *Sol.* $\frac{1}{2}\pi a^2(e^2 - e^{-2} + 4)$ unidades de superficie.

17. Un arco de $x = a(\theta - \text{sen}\,\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$; eje x. *Sol.* $64\pi a^2/3$ unidades de superficie.

18. $x = e^t\cos t$, $y = e^t\,\text{sen}\,t$ desde $t = 0$ a $t = \frac{1}{2}\pi$; eje x. *Sol.* $2\pi\sqrt{2}(2e^{\pi} + 1)/5$ unidades de superficie.

19. Hallar la superficie de la zona determinada en una esfera de radio r por dos planos paralelos cada uno de ellos distante del centro $\frac{1}{2}a$. *Sol.* $2\pi ar$.

20. Hallar la superficie de esfera de radio r cortada por un cono circular de ángulo 2α con el vértice en el centro de la esfera. *Sol.* $2\pi r^2(1 - \cos\alpha)$ unidades de superficie.

Capítulo 43

Centro geométrico y momento de inercia

Arcos y superficies de revolución

CENTRO GEOMETRICO DE UN ARCO. Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro geométrico de un arco AB de una curva plana, de ecuación $F(x, y) = 0$ o $x = f(u)$, $y = g(u)$, satisface las relaciones

$$\bar{x}\cdot s \;=\; \bar{x}\int_{AB} ds \;=\; \int_{AB} x\,ds \qquad \text{y} \qquad \bar{y}\cdot s \;=\; \bar{y}\int_{AB} ds \;=\; \int_{AB} y\,ds$$

(Ver Problemas 1-2)

SEGUNDO TEOREMA DE PAPPUS. El área de una superficie generada en la rotación de un arco de curva alrededor de un eje situado en su mismo plano y que no corta el arco es igual al producto de la longitud de dicho arco por la longitud de la trayectoria descrita por el centro geométrico del mismo. (Ver Problemas 3)

MOMENTOS DE INERCIA DE UN ARCO. Los momentos de inercia de un arco AB correspondiente a una curva dada con respecto a los ejes coordenados vienen dados por

$$I_x \;=\; \int_{AB} y^2\,ds \qquad \text{e} \qquad I_y \;=\; \int_{AB} x^2\,ds$$

(Ver Problemas 4-5)

CENTRO GEOMETRICO DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCION. La coordenada $\bar{x}$ del centro geométrico de una superficie generada en la rotación de un arco AB de una curva alrededor del eje x satisface la relación

$$\bar{x}\cdot S_x \;=\; 2\pi\int_{AB} x\cdot y\,ds$$

MOMENTO DE INERCIA DE UNA SUPERFICIE DE REVOLUCION. El momento de inercia, con respecto al eje de giro de la superficie generada en la rotación de un arco AB de una curva alrededor del eje x viene dado por

$$I_x \;=\; 2\pi\int_{AB} y^2\cdot y\,ds$$

Problemas resueltos

1. Hallar el centro geométrico del arco del primer cuadrante de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{y} \quad 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\frac{x^2}{y^2} = \frac{25}{y^2}. \quad \text{Como } s = \frac{5}{2}\pi,$$

$$\frac{5}{2}\pi\bar{y} \;=\; \int_0^5 y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx \;=\; \int_0^5 5\,dx \;=\; 25 \quad \text{o} \quad \bar{y} = 10/\pi$$

Por simetría, $\bar{x} = \bar{y}$, con lo que las coordenadas del centro geométrico son $(10/\pi, 10/\pi)$.

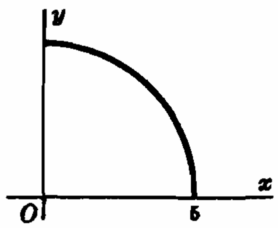

Fig. 43-1

2. Determinar el centro geométrico de un arco circular de radio r y ángulo en el centro 2θ.

Tomando el arco, como se representa en la Fig. 43-2, de forma que $\bar{x}$ coincida con la abscisa del centro geométrico de su mitad superior e $\bar{y} = 0$, tendremos:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x} \quad \text{y} \quad 1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{r^2}{x^2}. \quad \text{Para la mitad superior del arco, } s = r\theta,$$

$$r\theta\cdot\bar{x} \;=\; \int_0^{r\,\text{sen}\,\theta} x\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \;=\; r\int_0^{r\,\text{sen}\,\theta} dy \;=\; r^2\,\text{sen}\,\theta$$

y $\bar{x} = (r\,\text{sen}\,\theta)/\theta$. Por tanto, el centro geométrico está sobre la bisectriz a una distancia $(r\,\text{sen}\,\theta)/\theta$ del centro de la circunferencia.

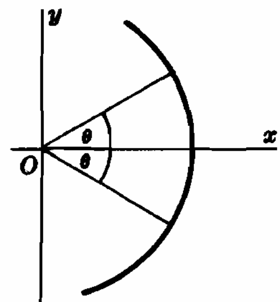

Fig. 43-2

3. Hallar el área de la superficie generada en la rotación del rectángulo de dimensiones a por b alrededor del eje situado a c unidades ($c > a, b$) del centro geométrico.

El perímetro del rectángulo es $2(a + b)$ y su centro geométrico describe una circunferencia de radio c. Por tanto,

$$S = 2(a + b) \cdot 2\pi c = 4\pi(a + b)c \text{ unidades de superficie}$$

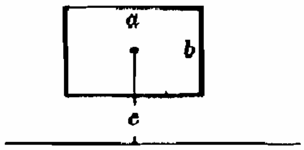

Fig. 43-3

4. Hallar el momento de inercia de un arco de circunferencia con respecto a un diámetro fijo.

Tomando la circunferencia, como se representa en la Fig. 43-4, con el diámetro fijo sobre el eje x, el momento pedido será 4 veces el del arco del primer cuadrante.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{y} \quad \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{r}{y}. \quad \text{También, } s = 2\pi r. \quad \text{Luego}$$

$$I_x = 4\int_0^r y^2\,ds = 4\int_0^r y^2 \cdot \frac{r}{y}\,dx = 4r\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

$$= 4r\left[\frac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{2}r^2 \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{r}\right]_0^r = \pi r^3 = \frac{1}{2}r^2 s$$

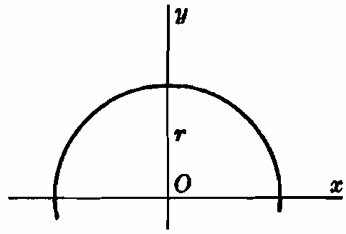

Fig. 43-4

5. Hallar el momento de inercia, con respecto al eje x, del arco de hipocicloide $x = a \operatorname{sen}^3 \theta$, $y = a \cos^3 \theta$.

El momento pedido es cuatro veces el del arco del primer cuadrante.

$$\frac{dx}{d\theta} = 3a \operatorname{sen}^2 \theta \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = -3a \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta, \quad y$$

$$s = 4\int ds = 4\int_0^{\pi/2} 3a \operatorname{sen} \theta \cos \theta\,d\theta = 6a$$

$$I_x = 4\int_0^s y^2\,ds = 12a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^6 \theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta\,d\theta = \tfrac{3}{2}a^3 = \tfrac{1}{4}a^2 s$$

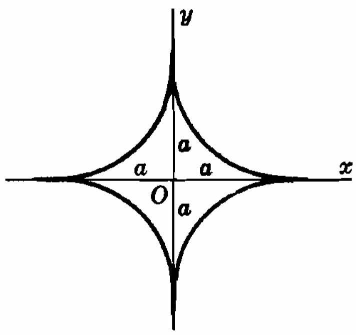

Fig. 43-5

Problemas propuestos

6. Determinar el centro geométrico de

(*a*) el arco del primer cuadrante de $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, Aplicar $s = 3a/2$. *Sol.* $(2a/5, 2a/5)$

(*b*) el arco del primer cuadrante del lazo de $9y^2 = x(3 - x)^2$. Aplicar $s = 2\sqrt{3}$. *Sol.* $(7/5, \sqrt{3}/4)$

(*c*) el primer arco de $x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$. *Sol.* $(\pi a, 4a/3)$

(*d*) el arco del primer cuadrante de $x = a \cos^3 \theta$, $y = a \operatorname{sen}^3 \theta$. *Sol.* Ver (*a*).

7. Hallar el momento de inercia del arco dado con respecto al eje indicado:

(*a*) un lazo $9y^2 = x(3 - x)^2$; eje x, eje y. Aplicar $s = 4\sqrt{3}$. *Sol.* $I_x = 8s/35$, $I_y = 99s/95$

(*b*) $y = a \cosh x/a$ desde $x = 0$ a $x = a$; eje x. *Sol.* $(a^2 + \frac{1}{3}s^2)s$

8. Determinar el centro geométrico de la superficie de una semiesfera. *Sol.* $\bar{y} = \frac{1}{2}r$

9. Determinar el centro geométrico de la superficie generada al girar:

(*a*) $4y + 3x = 8$ desde $x = 0$ a $x = 2$ alrededor del eje x. *Sol.* $\bar{x} = 4/5$

(*b*) un arco de $x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ alrededor del eje y. *Sol.* $\bar{y} = 4a/3$

10. Aplicar el segundo teorema del Pappus para determinar:

(*a*) el centro geométrico del arco del primer cuadrante de una circunferencia de radio r. *Sol.* $(2r/\pi, 2r/\pi)$

(*b*) el área de la superficie generada en la rotación de un triángulo equilátero de lado a alrededor de un eje situado a c unidades de su centro geométrico. *Sol.* $6\pi ac$ unidades de superficie.

11. Hallar el momento de inercia con respecto al eje de rotación de:

(*a*) la superficie esférica de radio r. *Sol.* $\frac{2}{3}Sr^2$

(*b*) la superficie lateral de un cono generado al girar la recta $y = 2x$ desde $x = 0$ a $x = 2$ alrededor del eje x. *Sol.* $8S$.

12. Deducir las fórmulas de este capítulo.

Capítulo 44

Area plana y centro geométrico de un área

Coordenadas polares

EL AREA PLANA limitada por la curva $\varrho = f(\theta)$ y los radios vectores $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$ viene dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2\, d\theta$$

Al manejar las coordenadas polares se debe tener sumo cuidado en la determinación correcta de los límites de integración. Conviene aprovechar todo tipo de simetría para tomar estos límites tan próximos como sea posible.

(Ver Problemas 1-7.)

CENTRO GEOMETRICO DE UN AREA PLANA. Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro geométrico de un área plana limitada por la curva $\varrho = f(\theta)$ y los radios vectores $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$ vienen dadas por

$$A\bar{x} = \bar{x}\cdot\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2\, d\theta = \frac{1}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \cos\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2}{3}x\cdot\rho^2\, d\theta$$

y

$$A\bar{y} = \bar{y}\cdot\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2\, d\theta = \frac{1}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^3 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{2}{3}y\cdot\rho^2\, d\theta$$

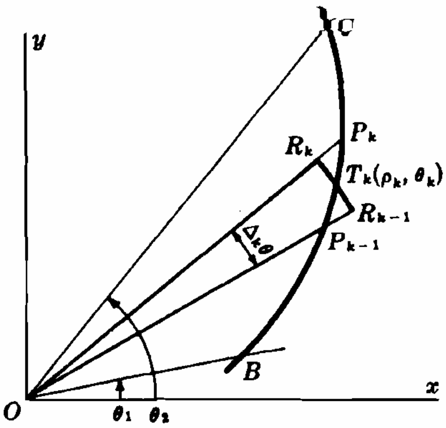

Fig. 44-1

(Ver Problemas 8-10)

Problemas resueltos

1. Demostrar que $A = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho^2\, d\theta$.

Dividamos el ángulo BOC de la figura superior en n partes mediante los radios $OP_0 = OB$, OP_1, $OP_2, \ldots, OP_{n-1}$, $OP_n = OC$. La figura muestra una franja representativa, $P_{k-1}OP_k$, de ángulo en el centro $\Delta_k\theta$, así como su sector genérico, $R_{k-1}OR_k$, de radio ϱ_k, ángulo en el centro $\Delta_k\theta$ y (ver Problema 15(r), Capítulo 34) área $\frac{1}{2}\varrho_k^2\Delta_k\theta = \frac{1}{2}\{f(\theta_k)\}^2\Delta_k\theta$. En estas condiciones, teniendo en cuenta el teorema fundamental,

$$A = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\{f(\theta_k)\}^2\Delta_k\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\{f(\theta)\}^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2\, d\theta$$

2. Hallar el área limitada por la curva $\varrho^2 = a^2\cos 2\theta$.

En la Fig. 44-2 se puede observar que el área pedida consta de cuatro partes iguales, cada una de las cuales es barrida por el radio vector al variar el ángulo θ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{1}{4}\pi$. Por tanto,

$$A = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\rho^2\, d\theta = 2a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta\, d\theta = a^2\operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{\pi/4} = a^2 \text{ unidades de superficie}$$

Como cada una de las partes está situada en un cuadrante, parecería lógico escribir:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \rho^2\,d\theta \;=\; \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi} \cos 2\theta\,d\theta \;=\; \frac{1}{4}a^2 \operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{2\pi} \;=\; 0$$

es decir, $\quad 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho^2\,d\theta \;=\; a^2\int_0^{\pi} \cos 2\theta\,d\theta \;=\; 0$

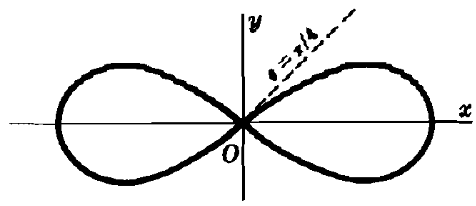

Fig. 44-2

La razón de este resultado incorrecto estriba en lo siguiente:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \rho^2\,d\theta \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \rho^2\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \rho^2\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{3\pi/4}^{\pi} \rho^2\,d\theta \;=\; \tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{4}a^2$$

En los intervalos $[0, \pi/4]$ y $[3\pi/4, \pi]$, ϱ es real; así pues, la primera y tercera de las integrales proporcionan las áreas barridas al variar θ entre dichos intervalos. En el intervalo $[\pi/4, 3\pi/4]$, $\varrho^2 < 0$ y ϱ es imaginario. Por tanto, aunque $\frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} a^2 \cos 2\theta\,d\theta$ es una integral perfectamente válida, aquí no se puede interpretar como un área.

3. Hallar el área limitada por los tres lazos de la curva $\varrho = a\cos 3\theta$.

El área pedida es igual a 6 veces el área rayada en la Fig. 44-3, es decir, el área barrida al variar el ángulo θ desde 0 hasta $\pi/6$. Por tanto,

$$A \;=\; 6\cdot\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho^2\,d\theta \;=\; 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/6} a^2\cos^2 3\theta\,d\theta \;=\; 3a^2\int_0^{\pi/6}(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 6\theta)\,d\theta \;=\; \tfrac{1}{4}\pi a^2 \text{ unidades de superficie.}$$

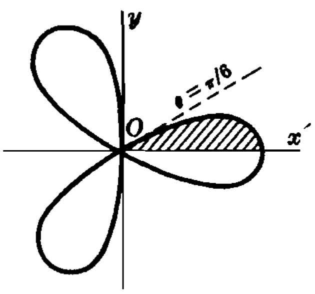

Fig. 44-3

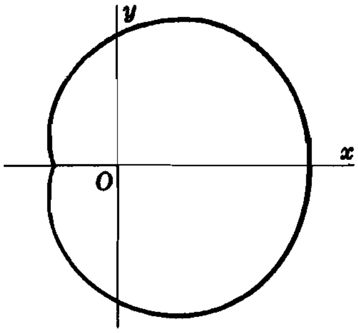

Fig. 44-4

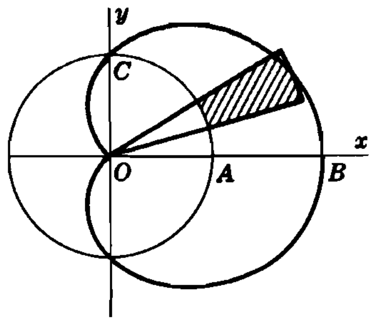

Fig. 44-5

4. Hallar el área limitada por la curva $\varrho = 2 + \cos\theta$ (Fig. 44-4).

El área buscada es el doble del área barrida al variar θ desde 0 hasta π.

$$A \;=\; 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(2+\cos\theta)^2\,d\theta \;=\; \int_0^{\pi}(4 + 4\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \;\Big[4\theta + 4\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\Big]_0^{\pi} \;=\; 9\pi/2 \text{ unidades de superficie}$$

5. Hallar el área interior a la cardioide $\varrho = 1 + \cos\theta$ y exterior al círculo $\varrho = 1$.

En la Fig. 44,5, área ABC = área OBC — área OAC es igual a la mitad del área que se pide. Por tanto,

$$A \;=\; 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos\theta)^2\,d\theta \;-\; 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1)^2\,d\theta \;=\; \int_0^{\pi/2}(2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \;=\; 2 + \tfrac{1}{4}\pi \text{ un. sup.}$$

6. Hallar el área de cada uno de los lazos de $\varrho = \frac{1}{2} + \cos\theta$.

Lazo mayor. El área pedida es igual al doble de la barrida al variar el ángulo θ desde 0 hasta $2\pi/3$. Por consiguiente,

$$A \;=\; 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\pi/3}(\tfrac{1}{2} + \cos\theta)^2\,d\theta \;=\; \int_0^{2\pi/3}(\tfrac{1}{4} + \cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \;\frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ unidades de superficie}$$

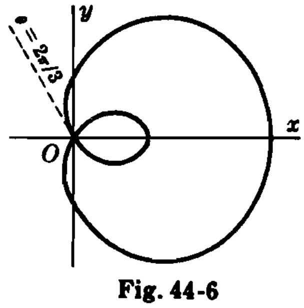

Fig. 44-6

Lazo menor. El área pedida es igual al doble de la barrida al variar θ desde $2\pi/3$ hasta π. Por tanto,

$$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_{2\pi/3}^{\pi}(\tfrac{1}{2}+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{\pi}{4}-\frac{3\sqrt{3}}{8} \text{ unidades de superficie.}$$

7. Hallar el área común del círculo $\varrho = 3\cos\theta$ y la cardioide $\varrho = 1+\cos\theta$.

El área OAB consta de dos partes: una barrida por el radio vector $\varrho = 1+\cos\theta$ al variar θ desde 0 hasta $\pi/3$, y la otra barrida por $\varrho = 3\cos\theta$ al variar θ desde $\pi/3$ hasta $\pi/2$.

$$A = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}(1+\cos\theta)^2\,d\theta + 2\cdot\frac{1}{2}\int_{\pi/3}^{\pi/2}9\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= 5\pi/4 \text{ unidades de superficie}$$

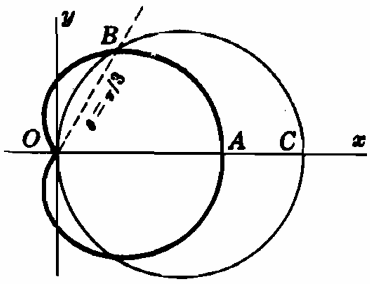

Fig. 44-7

8. Deducir las fórmulas $A\bar{x} = \frac{1}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\varrho^3\cos\theta\,d\theta$, $A\bar{y} = \frac{1}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\varrho^3\operatorname{sen}\theta\,d\theta$, siendo $(\bar{x}, \bar{y})$ las coordenadas del centro geométrico del área plana BOC de la Fig. 44-1.

Consideremos el sector genérico $R_{k-1}OR_k$ y supongamos, para mayor sencillez, que OT_k es la bisectriz del ángulo $P_{k-1}OP_k$. Para hallar el centro geométrico de este sector, supongamos se trata de un triángulo, con lo cual, dicho centro geométrico estará situado sobre OT_k a una distancia $\frac{2}{3}\varrho_k$ desde 0. Por tanto, aproximadamente, podremos escribir,

$$\bar{x}_k = \tfrac{2}{3}\varrho_k\cos\theta_k = \tfrac{2}{3}f(\theta_k)\cos\theta_k \quad \text{y} \quad \bar{y}_k = \tfrac{2}{3}f(\theta_k)\operatorname{sen}\theta_k$$

Ahora bien, el momento del sector con respecto al eje es

$$\bar{x}_k\cdot\tfrac{1}{2}\varrho_k^2\Delta_k\theta = \tfrac{2}{3}\varrho_k\cos\theta_k\cdot\tfrac{1}{2}\varrho_k^2\,\Delta_k\theta = \tfrac{1}{3}\{f(\theta_k)\}^3\cos\theta_k\,\Delta_k\theta$$

y, por el teorema fundamental,

$$A\bar{x} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\{f(\theta_k)\}^3\cos\theta_k\,\Delta_k\theta = \frac{1}{3}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\varrho^3\cos\theta\,d\theta$$

Se deja como ejercicio para el alumno el cálculo de $A\bar{y}$.

Nota. En el Problema 8, Capítulo 37, vimos que el centro geométrico del sector $R_{k-1}OR_k$ está situado sobre OT_k a una distancia $\dfrac{2\varrho_k\operatorname{sen}\frac{1}{2}\Delta_k\theta}{3\cdot\frac{1}{2}\Delta_k\theta}$ desde O. El alumno puede deducir las fórmulas a partir de esta relación.

9. Determinar el centro geométrico del área del lazo del primer cuadrante de la curva $\varrho = \operatorname{sen}2\theta$.

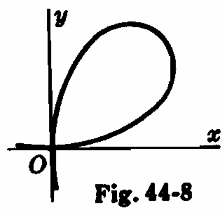

Fig. 44-8

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2 2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\left[\theta - \frac{1}{4}\operatorname{sen}4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{\pi}{8}\bar{x} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\varrho^3\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3 2\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^3\theta\cos^4\theta\,d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2\theta)\cos^4\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta = \frac{16}{105}, \text{ y } \bar{x} = \frac{128}{105\pi}$$

Por simetría, $\bar{y} = 128/105\pi$. Las coordenadas del centroide son $(128/105\pi,\ 128/105\pi)$.

10. Determinar el centro geométrico del área del primer cuadrante limitada por la parábola $\varrho = \dfrac{6}{1+\cos\theta}$ de la Fig. 44-9.

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{36}{(1+\cos\theta)^2}\,d\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}\sec^4\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\operatorname{tag}^2\tfrac{1}{2}\theta)\sec^2\tfrac{1}{2}\theta\,d\theta = 9\left[\operatorname{tag}\tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{3}\operatorname{tag}^3\tfrac{1}{2}\theta\right]_0^{\pi/2} = 12$$

$$12\bar{x} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{216\cos\theta}{(1+\cos\theta)^3}\,d\theta = 9\int_0^{\pi/2} \frac{2\cos^2\frac{1}{2}\theta - 1}{\cos^6\frac{1}{2}\theta}\,d\theta$$

$$= 9\int_0^{\pi/2} (2\sec^4\tfrac{1}{2}\theta - \sec^6\tfrac{1}{2}\theta)\,d\theta = 18\left[\operatorname{tag}\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{5}\operatorname{tag}^5\tfrac{1}{2}\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 72/5, \quad \text{y} \quad \bar{x} = 6/5.$$

$$12\bar{y} = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{216\,\text{sen}\,\theta}{(1+\cos\theta)^3}\,d\theta = 27, \quad \text{e} \quad \bar{y} = 9/4.$$

El centro geométrico es (6/5, 9/4).

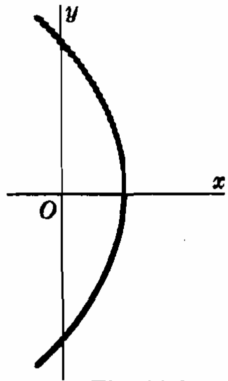

Fig. 44-9

Problemas propuestos

11. Hallar el área limitada por cada una de las curvas siguientes:

(*a*) $\varrho^2 = 1 + \cos 2\theta$ — *Sol.* π un. sup.
(*b*) $\varrho^2 = a^2 \,\text{sen}\,\theta\,(1 - \cos\theta)$ — *Sol.* a^2 un. sup.
(*c*) $\varrho = 4\cos\theta$ — *Sol.* 4π un. sup.
(*d*) $\varrho = a\cos 2\theta$ — *Sol.* $\frac{1}{2}\pi a^2$ un. sup.
(*e*) $\varrho = 4\,\text{sen}^2\,\theta$ — *Sol.* 6π un. sup.
(*f*) $\varrho = 4(1 - \text{sen}\,\theta)$ — *Sol.* 24π un. sup.

12. Hallar el área

(*a*) interior a $\varrho = \cos\theta$ y exterior a $\varrho = 1 - \cos\theta$ — *Sol.* $(\sqrt{3} - \pi/3)$ un. sup.
(*b*) interior $\varrho = \text{sen}\,\theta$ y exterior a $\varrho = 1 - \cos\theta$. — *Sol.* $(1 - \pi/4)$ un. sup.
(*c*) entre óvalos interno y externo de $\varrho^2 = a^2(1 + \text{sen}\,\theta)$. — *Sol.* $4a^2$ un. sup.
(*d*) entre los lazos de $\varrho = 2 - 4\,\text{sen}\,\theta$. — *Sol.* $4(\pi + 3\sqrt{3})$ un. sup.

13. (*a*) Dada la espiral de Arquímedes, $\varrho = a\theta$, demostrar que el área adicional barrida en la enésima revolución, $n > 2$, es $(n - 1)$ veces la añadida en la segunda revolución.

(*b*) Dada la espiral equiangular $\varrho = ae^{\theta}$, demostrar que el área adicional barrida en la enésima revolución, $n > 2$, es $e^{4\pi}$ veces la añadida en el barrido anterior.

14. determinar el centro geométrico de las siguientes áreas:

(*a*) Mitad derecha de $\varrho = a(1 - \text{sen}\,\theta)$. — *Sol.* $(16a/9\pi, -5a/6)$
(*b*) Area del primer cuadrante de $\varrho = 4\,\text{sen}^2\,\theta$. — *Sol.* $(128/63\pi, 2048/315\pi)$
(*c*) Mitad superior de $\varrho = 2 + \cos\theta$. — *Sol.* $(17/18, 80/27\pi)$
(*d*) Area del primer cuadrante de $\varrho = 1 + \cos\theta$. — *Sol.* $\left(\dfrac{16 + 5\pi}{16 + 6\pi}, \dfrac{10}{8 + 3\pi}\right)$
(*e*) Area del primer cuadrante del Problema 5. — *Sol.* $\left(\dfrac{32 + 15\pi}{48 + 6\pi}, \dfrac{22}{24 + 3\pi}\right)$

15. Aplicar el primer teorema de Pappus para obtener el volumen generado en la rotación de

(*a*) $\varrho = a(1 - \text{sen}\,\theta)$ alrededor del eje y. — *Sol.* $8\pi a^3/3$ un. vol.
(*b*) $\varrho = 2 + \cos\theta$ alrededor del eje polar. — *Sol.* $40\pi/3$ un. vol.

Capítulo 45

Longitud y centro geométrico de un arco. Area de una superficie de revolución

Coordenadas polares

LA LONGITUD DE UN ARCO de la curva $\varrho = f(\theta)$ desde $\theta = \theta_1$ a $\theta = \theta_2$ viene dada por

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

(Ver Problemas 1-4.)

CENTRO GEOMETRICO DE UN ARCO. Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro geométrico de un arco de la curva $\varrho = f(\theta)$ desde $\theta = \theta_1$ a $\theta = \theta_2$ satisface las relaciones

$$\bar{x} \cdot s = \bar{x} \int_{\theta_1}^{\theta_2} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho \cos \theta\, ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} x\, ds$$

$$\bar{y} \cdot s = \bar{y} \int_{\theta_1}^{\theta_2} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho \operatorname{sen} \theta\, ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} y\, ds$$

(Ver Problemas 5-6.)

EL AREA DE LA SUPERFICIE generada en la rotación del arco de la curva $\varrho = f(\theta)$ desde $\theta = \theta_1$ a $\theta = \theta_2$ alrededor de

el eje polar es $$S_x = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} y\, ds = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho \operatorname{sen} \theta\, ds$$

el eje transverso es $$S_y = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} x\, ds = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varrho \cos \theta\, ds$$

Los límites de integración se tomarán tan próximos como sea posible.

(Ver Problemas 7-10.)

Problemas resueltos

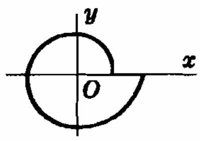

Fig. 45-1

1. Hallar la longitud de la espiral $\varrho = e^{2\theta}$ desde $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$.

$d\varrho/d\theta = 2e^{2\theta}$ y $\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2 = 5e^{4\theta}$.

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2}\, d\theta = \sqrt{5}\int_0^{2\pi} e^{2\theta}\, d\theta = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\,(e^{4\pi} - 1) \text{ unidades}$$

2. Hallar la longitud de la cardioide $\varrho = a(1 - \cos \theta)$.

La cardioide se describe cuando θ varía desde 0 a 2π.

$$\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2 = a^2(1 - \cos\theta)^2 + (a \operatorname{sen}\theta)^2 = 4a^2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}\theta$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2}\, d\theta = 2a\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\theta\, d\theta = 8a \text{ unidades}$$

En esta solución no se ha podido aplicar el criterio de tomar los límites de integración suficientemente próximos, porque la longitud a calcular es el doble de la descrita al variar el ángulo θ desde 0 hasta π. Sin embargo, el Problema 3 es un ejemplo de cómo se aplica dicho criterio.

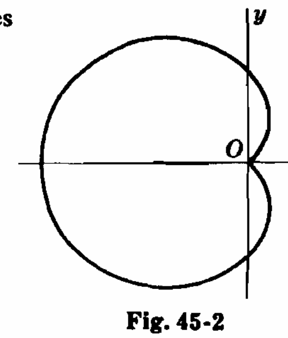

Fig. 45-2

3. Hallar la longitud de la cardioide $\varrho = a(1 - \text{sen}\ \theta)$.

$$\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\theta}\right)^2 = a^2(1 - \text{sen}\ \theta)^2 + (-a\cos\theta)^2 = 2a^2(\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\theta - \cos\tfrac{1}{2}\theta)^2$$

Según el problema 2, tendremos

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2}\, d\theta = \sqrt{2}\, a \int_0^{2\pi} (\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\theta - \cos\tfrac{1}{2}\theta)\, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\, a(-\cos\tfrac{1}{2}\theta - \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\theta)\Big]_0^{2\pi} = 4\sqrt{2}\, a \text{ unidades}$$

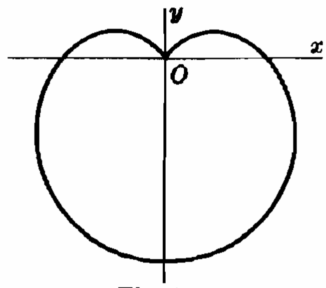

Fig. 45-3

Como podemos observar, las cardioides de los dos problemas solo difieren en sus posiciones en el plano; en estas condiciones, sus longitudes deberían coincidir. Para explicar la diferencia de resultados hemos de acudir a los dos integrandos, sen $\frac{1}{2}\theta$ y sen $\frac{1}{2}\theta - \cos\frac{1}{2}\theta$. El primero es siempre positivo, mientras que el segundo es negativo, al variar el ángulo θ desde 0 hasta $\frac{1}{2}\pi$, y positivo en los demás casos. Por simetría, la longitud pedida será igual al doble de la descrita al variar θ desde $\pi/2$ hasta $3\pi/2$. Por consiguiente,

$$s = 2\sqrt{2}\, a \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (\text{sen}\ \tfrac{1}{2}\theta - \cos\tfrac{1}{2}\theta)\, d\theta = 4\sqrt{2}\, a(-\cos\tfrac{1}{2}\theta - \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\theta)\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} = 8a \text{ unidades}$$

4. Hallar la longitud de la curva $\varrho = a\cos^4\frac{1}{4}\theta$.

La longitud pedida es el doble de la descrita cuando θ varía desde 0 a 2π.

$d\varrho/d\theta = -a\cos^3\frac{1}{4}\theta\ \text{sen}\ \frac{1}{4}\theta$ y $\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2 = a^2\cos^6\frac{1}{4}\theta$.

$$s = 2\cdot a\int_0^{2\pi} \cos^3\tfrac{1}{4}\theta\, d\theta = 8a\left[\text{sen}\ \tfrac{1}{4}\theta - \tfrac{1}{3}\text{sen}^3\tfrac{1}{4}\theta\right]_0^{2\pi}$$

$= 16a/3$ unidades.

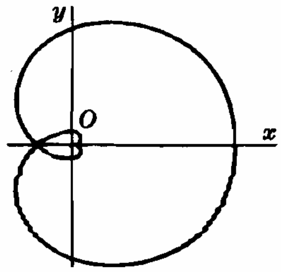

Fig. 45-4

5. Hallar el centro geométrico del arco de la cardioide $\varrho = a(1 - \cos\theta)$. (Ver Problema 2.)

Por simetría, $\bar{y} = 0$, y la abscisa del centro geométrico de todo el arco será igual a la del centro geométrico de la mitad superior. La mitad de la longitud del cardioide es, según el Problema 2, igual a $4a$. Por tanto,

$$4a\cdot\bar{x} = \int_0^{\pi} \varrho\cos\theta\sqrt{\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2}\, d\theta = 2a^2\int_0^{\pi}(1-\cos\theta)\cos\theta\ \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\theta\, d\theta$$

$$= 4a^2\int_0^{\pi}(-2\cos^4\tfrac{1}{2}\theta + 3\cos^2\tfrac{1}{2}\theta - 1)\ \text{sen}\ \tfrac{1}{2}\theta\, d\theta = 4a^2\left[\tfrac{4}{5}\cos^5\tfrac{1}{2}\theta - 2\cos^3\tfrac{1}{2}\theta + 2\cos\tfrac{1}{2}\theta\right]_0^{\pi}$$

$= -16a^2/5$, y $\bar{x} = -4a/5$. Las coordenadas del centroide son $(-4a/5, 0)$.

6. Hallar el centro geométrico del arco de circunferencia $\varrho = 2\ \text{sen}\ \theta + 4\cos\theta$ desde $\theta = 0$ a $\theta = \frac{1}{2}\pi$.

$d\varrho/d\theta = 2\cos\theta - 4\ \text{sen}\ \theta$ y $\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2 = 20$. Como el radio es $\sqrt{5}$, $s = \sqrt{5}\,\pi$.

$$\sqrt{5}\,\pi\cdot\bar{x} = \int_0^{\pi/2}\varrho\cos\theta\sqrt{\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2}\, d\theta$$

$$= 4\sqrt{5}\int_0^{\pi/2}(\text{sen}\ \theta\cos\theta + 2\cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= 4\sqrt{5}\left[\tfrac{1}{2}\text{sen}^2\theta + \theta + \tfrac{1}{2}\text{sen}\ 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 2\sqrt{5}(\pi + 1), \text{ y } \bar{x} = \frac{2(\pi + 1)}{\pi}.$$

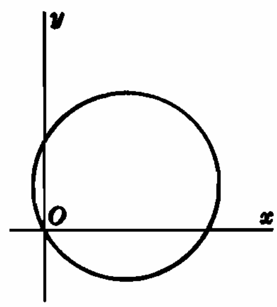

Fig. 45-5

$$\sqrt{5}\,\pi\cdot\bar{y} = \int_0^{\pi/2}\varrho\ \text{sen}\ \theta\sqrt{\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2}\, d\theta = 4\sqrt{5}\int_0^{\pi/2}(\text{sen}^2\theta + 2\ \text{sen}\ \theta\cos\theta)\, d\theta$$

$$= 4\sqrt{5}\left[\tfrac{1}{2}\theta - \tfrac{1}{4}\text{sen}\ 2\theta + \text{sen}^2\theta\right]_0^{\pi/2} = 4\sqrt{5}\,(\tfrac{1}{4}\pi + 1), \text{ e } \bar{y} = \frac{\pi + 4}{\pi}.$$

7. Hallar el área de la superficie generada en la rotación de la mitad superior de la cardioide $\varrho = a(1 - \cos\theta)$ alrededor del eje polar.

Del Problema 2, $\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2 = 4a^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta$.

$$S = 2\pi \int_0^\pi \varrho \operatorname{sen}\theta \sqrt{\varrho^2 + (d\varrho/d\theta)^2}\, d\theta = 4a^2\pi \int_0^\pi (1 - \cos\theta) \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}\theta\, d\theta$$

$$= 16a^2\pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^4 \tfrac{1}{2}\theta \cos\tfrac{1}{2}\theta\, d\theta = {}^{32}/_5 a^2\pi \text{ unidades de superficie.}$$

8. Hallar el área de la superficie generada en la rotación de la lemniscata $\varrho^2 = a^2 \cos 2\theta$ alrededor del eje polar.

El área pedida es igual al doble de la generada en la rotación del arco del primer cuadrante.

$$\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\theta}\right)^2 = a^2 \cos 2\theta + \left(-\frac{a^2 \operatorname{sen} 2\theta}{\varrho}\right)^2 = \frac{a^4}{\varrho^2}$$

$$S = 2\cdot 2\pi \int_0^{\pi/4} \varrho \operatorname{sen}\theta \frac{a^2}{\varrho}\, d\theta = 4a^2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$= 2a^2\pi(2 - \sqrt{2}) \text{ unidades de superficie}$$

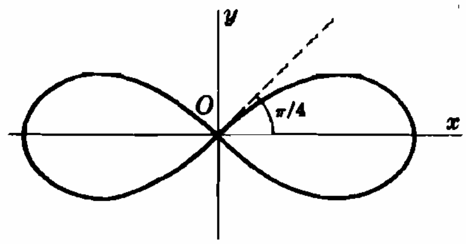

Fig. 45-6

9. Hallar el área de la superficie generada en la rotación, alrededor del eje transverso de un lazo de la lemniscata $\varrho^2 = a^2 \cos 2\theta$.

El área pedida es el doble de la generada en la rotación del arco del primer cuadrante.

$$S = 2\cdot 2\pi \int_0^{\pi/4} \varrho \cos\theta \frac{a^2}{\varrho}\, d\theta = 4a^2\pi \int_0^{\pi/4} \cos\theta\, d\theta = 2\sqrt{2}\ a^2\pi \text{ unidades de superficie.}$$

10. Aplicar el teorema de Pappus para determinar el centroide del arco de la cardioide $\varrho = a(1 - \cos\theta)$ desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi$.

Si el arco gira alrededor del eje polar, $S = 2\pi\bar{y}s$, o sea, según los Problemas 2 y 7, $32a^2\pi/5 = 2\pi\bar{y}\cdot 4a$ e $\bar{y} = 4a/5$.

Según el Problema 5, las coordenadas del centro geométrico son $(-4a/5, 4a/5)$.

Problemas propuestos

11. Hallar la longitud de

(a) $\varrho = \theta^2$ desde $\theta = 0$ a $\theta = 2\sqrt{3}$ *Sol.* 56/3 unidades

(b) $\varrho = e^{\theta/2}$ desde $\theta = 0$ a $\theta = 8$ *Sol.* $\sqrt{5}(e^4 - 1)$ unidades

(c) $\varrho = \cos^2 \frac{1}{2}\theta$ *Sol.* 4 unidades

(d) $\varrho = \operatorname{sen}^3\theta/3$ *Sol.* $3\pi/2$ unidades

(e) $\varrho = \cos^4\theta/4$ *Sol.* 16/3 unidades

(f) $\varrho = a/\theta$ desde (ϱ_1,θ_1) a (ϱ_2,θ_2) *Sol.* $\sqrt{a^2 + \varrho_1^2} - \sqrt{a^2 + \varrho_2^2} + a \ln \dfrac{\varrho_1(a + \sqrt{a^2 + \varrho_2^2})}{\varrho_2(a + \sqrt{a^2 + \varrho_1^2})}$ unidades

(g) $\varrho = 2a \operatorname{tag}\theta \operatorname{sen}\theta$ desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi/3$ *Sol.* $2a\sqrt{3}\left\{\dfrac{\sqrt{7} - 2}{\sqrt{3}} + \ln \dfrac{2(2 + \sqrt{3})}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}\right\}$ unidades.

12. Hallar el centro geométrico de la mitad superior de $\varrho = 8\cos\theta$. *Sol.* $(4, 8/\pi)$.

13. Siendo $\varrho = a \operatorname{sen}\theta + b\cos\theta$, demostrar que $s = \pi\sqrt{a^2 + b^2}$, $S_x = a\pi s$, y $S_y = b\pi s$.

14. Calcular el área de la superficie generada en la rotación de $\varrho = 4\cos\theta$ alrededor del eje polar. *Sol.* 16π un. sup.

15. Hallar el área de la superficie generada en la rotación de cada uno de los lazos de $\varrho = \operatorname{sen}^3\theta/3$ alrededor del eje transverso *Sol.* $\pi/256$ un. sup.; $513\pi/256$ un. sup.

16. Hallar el área de la superficie generada en la rotación de cada uno de los lazos de $\varrho^2 = \cos 2\theta$ alrededor del eje transverso. *Sol.* $2\sqrt{2}\,\pi$ un. sup.

17. Demostrar que cuando los dos lazos de $\varrho = \cos^4\theta/4$ giran alrededor del eje polar, generan superficies de igual área.

18. Determinar el centro geométrico de la superficie generada en la rotación del lazo de la derecha de $\varrho^2 = a^2\cos 2\theta$ alrededor del eje polar. *Sol.* $\bar{x} = \sqrt{2}a(\sqrt{2} + 1)/6$.

19. Hallar el área de la superficie generada en la rotación de $\varrho = \operatorname{sen}^2\theta/2$ alrededor de la recta $\varrho = \csc\theta$. *Sol.* 8π un. sup.

20. Deducir las fórmulas de este capítulo.

Capítulo 46

Integrales impropias

UNA INTEGRAL DEFINIDA, $\int_a^b f(x)\,dx$, se denomina *integral impropia* si

(*a*) el integrando, $f(x)$, tiene uno o más puntos de discontinuidad en el intervalo $a \leq x \leq b$;
(*b*) por lo menos uno de los límites de integración es infinito.

INTEGRANDO DISCONTINUO. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x < b$, pero es discontinua en $x = b$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx \quad \text{siempre que exista el límite}$$

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $a < x \leq b$, pero es discontinua en $x = a$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a+\epsilon}^{b} f(x)\,dx \quad \text{siempre que exista el límite}$$

Si $f(x)$ es continua para todos los valores de x del intervalo $a \leq x \leq b$ excepto para $x = c$, siendo $a < c < b$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_a^{c-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon' \to 0^+} \int_{c+\epsilon'}^{b} f(x)\,dx$$

siempre que existan *ambos* límites. (Ver Problemas 1-6.)

LIMITES DE INTEGRACION INFINITOS. Si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq u$,

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u \to +\infty} \int_a^{u} f(x)\,dx \quad \text{siempre que exista el límite}$$

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $u' \leq x \leq b$,

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{u' \to -\infty} \int_{u'}^{b} f(x)\,dx \quad \text{siempre que exista el límite}$$

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $u' \leq x \leq u$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u \to +\infty} \int_a^{u} f(x)\,dx + \lim_{u' \to +\infty} \int_{u'}^{a} f(x)\,dx$$

siempre que existan *ambos* límites. (Ver Problemas 7-13.)

Problemas resueltos

1. Calcular $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. El integrando presenta una discontinuidad en $x = 3$. Consideremos

$$\lim_{\epsilon \to 0+} \int_0^{3-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\epsilon \to 0+} \text{arc sen}\,\frac{x}{3}\Big]_0^{3-\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0+} \text{arc sen}\,\frac{3-\epsilon}{3} = \text{arc sen}\,1 = \frac{1}{2}\pi$$

Luego,

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{2}\pi$$

2. Demostrar que $\int_0^2 \frac{dx}{2-x}$ carece de sentido. El integrando presenta una discontinuidad en $x = 2$. Considerémos

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{2-\epsilon} \frac{dx}{2-x} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \ln \frac{1}{2-x}\Big]_0^{2-\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\ln \frac{1}{\epsilon} - \ln \frac{1}{2}\right)$$

No existe límite y la integral carece de sentido.

3. Demostrar que $\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$ carece de sentido.

El integrando presenta una discontinuidad en $x = 1$, valor comprendido entre los límites de integración 0 y 4. Consideremos

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{\epsilon' \to 0^+} \int_{1+\epsilon'}^4 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{-1}{x-1}\Big]_0^{1-\epsilon} + \lim_{\epsilon' \to 0^+} \frac{-1}{x-1}\Big]_{1+\epsilon'}^4 = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1\right) + \lim_{\epsilon' \to 0^+} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{\epsilon'}\right)$$

No existe límite.

Si no se tiene en cuenta el punto de discontinuidad $\int_0^4 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1}\Big]_0^4 = -\frac{4}{3}$, lo cual es un absurdo.

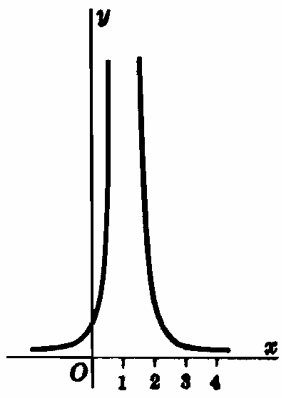

Fig. 46-1

4. Hallar $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$. El integrando presenta una discontinuidad en $x = 1$. Consideremos

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} + \lim_{\epsilon' \to 0^+} \int_{1+\epsilon'}^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\Big]_0^{1-\epsilon} + \lim_{\epsilon' \to 0^+} \frac{3}{2}(x-1)^{2/3}\Big]_{1+\epsilon'}^4$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{3}{2}\left((-\epsilon)^{2/3} - 1\right) + \lim_{\epsilon' \to 0^+} \frac{3}{2}(\sqrt[3]{9} - \epsilon'^{2/3}) = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{9} - 1)$$

Luego, $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} = \frac{3}{2}(\sqrt[3]{9} - 1)$.

5. Demostrar que $\int_0^{\pi/2} \sec x\, dx$ carece de sentido. El integrando presenta una discontinuidad en $x = \frac{1}{2}\pi$. Consideremos

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{1/2\pi - \epsilon} \sec x\, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \ln(\sec x + \operatorname{tag} x)\Big]_0^{1/2\pi - \epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \ln\{\sec(\tfrac{1}{2}\pi - \epsilon) + \operatorname{tag}(\tfrac{1}{2}\pi - \epsilon)\}$$

No existe límite y la integral carece de sentido.

6. Hallar $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}\, dx$. El integrando presenta una discontinuidad $x = \frac{1}{2}\pi$. Consideremos

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_0^{1/2\pi - \epsilon} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}\, dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} -2(1 - \operatorname{sen} x)^{1/2}\Big]_0^{1/2\pi - \epsilon} = 2 \lim_{\epsilon \to 0^+} \{-[1 - \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi - \epsilon)] + 1\}$$

$$= 2(0 + 1) = 2. \quad \text{Luego,} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}\, dx = 2.$$

7. Hallar $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4}$. El límite superior de integración es infinito. Consideremos

$$\lim_{u \to +\infty} \int_0^u \frac{dx}{x^2 + 4} = \lim_{u \to +\infty} \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tag} \frac{1}{2} x\Big]_0^u + \frac{1}{4}\pi. \quad \text{Luego,} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}\pi.$$

8. Hallar $\int_{-\infty}^0 e^{2x}\, dx$. El límite inferior de integración es infinito. Consideremos

$$\lim_{u \to -\infty} \int_u^0 e^{2x}\, dx = \lim_{u \to -\infty} \frac{1}{2} e^{2x}\Big]_u^0 = \frac{1}{2}(1) - \lim_{u \to -\infty} \frac{1}{2} e^{2u} = \frac{1}{2} - 0. \quad \text{Luego,} \int_{-\infty}^0 e^{2x}\, dx = \tfrac{1}{2}.$$

9. Demostrar que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ carece de sentido. El límite superior de integración es infinito. Consideremos

$$\lim_{u\to+\infty} \int_1^u \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{u\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big]_1^u = \lim_{u\to+\infty} (2\sqrt{u}-2).$$ El límite no existe.

10. Hallar $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1}$. Ambos límites de integración son infinitos. Consideremos

$$\lim_{u\to+\infty} \int_0^u \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} + \lim_{u'\to-\infty} \int_{u'}^0 \frac{e^x\,dx}{e^{2x}+1} = \lim_{u\to+\infty} \text{arc tag}\, e^x\Big]_0^u + \lim_{u'\to-\infty} \text{arc tag}\, e^x\Big]_{u'}^0$$
$$= \lim_{u\to+\infty} (\text{arc tag}\, e^u - \tfrac{1}{4}\pi) + \lim_{u'\to-\infty} (\tfrac{1}{4}\pi - \text{arc tag}\, e^{u'})$$
$$= \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}\pi - 0 = \tfrac{1}{2}\pi$$

11. Hallar $\int_0^{+\infty} e^{-x} \operatorname{sen} x\, dx$. El límite superior de integración es infinito. Consideremos

$$\lim_{u\to+\infty} \int_0^u e^{-x}\operatorname{sen} x\, dx = \lim_{u\to+\infty} -\tfrac{1}{2}e^{-x}(\operatorname{sen} x+\cos x)\Big]_0^u = \lim_{u\to+\infty} \{-\tfrac{1}{2}e^{-u}(\operatorname{sen} u+\cos u)\} + \tfrac{1}{2}$$

Cuando $u \to +\infty$, $e^{-u} \to 0$ mientras que sen u y cos u varían de 1 a -1. Luego, $\int_0^{+\infty} e^{-x}\operatorname{sen} x\, dx = \tfrac{1}{2}$.

12. Hallar el área limitada por la curva $y^2 = \frac{x^4}{1-x^2}$ y sus asíntotas. Ver Fig. 46-2.

$A = 4\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. El integrando presenta una discontinuidad en $x = 1$. Consideremos

$$\lim_{\epsilon\to0^+} \int_0^{1-\epsilon} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to0^+} -(1-x^2)^{1/2}\Big]_0^{1-\epsilon} = \lim_{\epsilon\to0^+} (1-\sqrt{2\epsilon-\epsilon^2}) = 1$$

El área pedida es $4(1) = 4$ unidades de superficie.

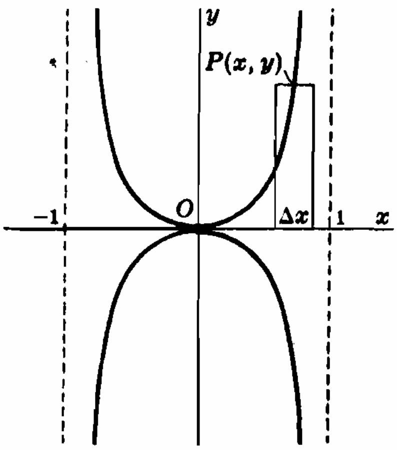

Fig. 46-2

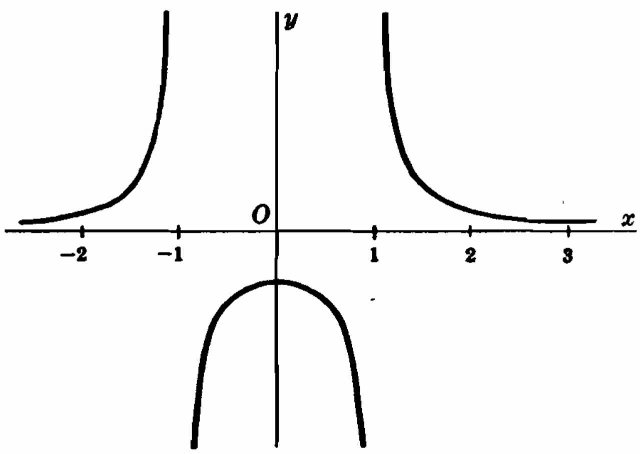

Fig. 46-3

13. Hallar el área situada a la derecha de $x = 3$ y limitada por la curva $y = \frac{1}{x^2-1}$ y el eje x. Ver Fig. 46-3.

$$A = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \lim_{u\to+\infty} \int_3^u \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\lim_{u\to+\infty} \ln\frac{x-1}{x-1}\Big]_3^u$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{u\to+\infty} \ln\frac{u-1}{u+1} - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\lim_{u\to+\infty} \ln\frac{1-1/u}{1+1/u} + \frac{1}{2}\ln 2$$
$$= \frac{1}{2}(\ln 2) \text{ unidades de superficie.}$$

Problemas propuestos

14. Hallar:

(*a*) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$

(*b*) $\int_0^4 \frac{dx}{4-x}$ (Carece de sentido)

(*c*) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = 4$

(*d*) $\int_0^4 \frac{dx}{(4-x)^{3/2}}$ (Carece de sentido)

(*e*) $\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \pi$

(*f*) $\int_{-1}^8 \frac{dx}{x^{1/3}} = 9/2$

(*g*) $\int_0^4 \frac{dx}{(x-2)^{2/3}} = 6\sqrt[3]{2}$

(*h*) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$ (Carece de sentido)

(*i*) $\int_0^1 \ln x\, dx = -1$

(*j*) $\int_0^1 x \ln x\, dx = -1/4$

15. Hallar el área limitada por la curva dada y sus asíntotas.

(*a*) $y^2 = \frac{x^4}{4-x^2}$, (*b*) $y^2 = \frac{4-x}{x}$, (*c*) $y^2 = \frac{1}{x(1-x)}$

Sol. (*a*) 4π un. sup., (*b*) 4π un. sup., (*c*) 2π un. sup.

16. Hallar:

(*a*) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$

(*b*) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(4-x)^2} = \frac{1}{4}$

(*c*) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$

(*d*) $\int_{-\infty}^6 \frac{dx}{(4-x)^2}$ (Carece de sentido)

(*e*) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \frac{1}{\ln 2}$

(*f*) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2/e$

(*g*) $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2}\, dx = 0$

(*h*) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2} = \pi/2$

(*i*) $\int_{-\infty}^0 x e^x\, dx = -1$

(*j*) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\, dx = 6$

17. Hallar el área limitada por la curva dada y su asíntota:

(*a*) $y = \frac{8}{x^2+4}$, (*b*) $y = \frac{x}{(4+x^2)^2}$, (*c*) $y = xe^{-x^2/2}$

Sol. (*a*) 4π un. sup., (*b*) $\frac{1}{4}$ un. sup., (*c*) 2 un. sup.

18. Hallar el área:

(*a*) limitada por $y = \frac{1}{x^2-4}$ y a la derecha de $x = 3$. *Sol.* $\frac{1}{4} \ln 5$ un. sup.

(*b*) limitada por $y = \frac{1}{x(x-1)^2}$ y a la derecha de $x = 2$. *Sol.* $1 - \ln 2$ un. sup.

19. Demostrar que las siguientes áreas carecen de sentido:

(*a*) área limitada por $y = \frac{1}{4-x^2}$ desde $x = 2$ hasta $x = -2$.

(*b*) área limitada por $xy = 9$ a la derecha de $x = 1$.

20. Demostrar que el área del primer cuadrante limitada por $y = e^{-2x}$ es igual a $\frac{1}{2}$ (unidades de superficie) y que el volumen generado en la rotación de dicha área alrededor del eje x es $\frac{1}{4}\pi$ (unidades de volumen).

21. Demostrar que en la rotación de la región R del plano limitada por $xy = 9$ y a la derecha de $x = 1$ alrededor del eje x, el volumen generado es igual a 81π (unidades de volumen) y que, sin embargo, el área de la superficie es infinita.

22. Hallar la longitud del arco indicado:

(*a*) $9y^2 = x(3-x)^2$, un lazo. (*b*) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, arco entero. (*c*) $9y^2 = x^2(2x+3)$, un lazo.

Sol. (*a*) $4\sqrt{3}$ unidades (*b*) $6a$ unidades (*c*) $2\sqrt{3}$ unidades

23. Hallar el momento de inercia de un círculo de radio r con respecto a una tangente. *Sol.* $3r^3s/2$.

24. Demostrar que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ diverge para todos los valores de p.

25. (*a*) Demostrar que $\int_a^b \frac{N\,dx}{(x-b)^p}$ existe para $p < 1$ y carece de sentido para $p \geq 1$.

(*b*) Demostrar que $\int_a^{+\infty} \frac{N\,dx}{x^p}$ existe para $p > 1$ y carece de sentido para $p \leq 1$.

26. Sea la función $f(x) \leq g(x)$ que está definida y es positiva en el intervalo $a \leq x < b$, siendo $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to b^-} g(x) = +\infty$. Según la Fig. 46-4, parece lógico suponer:

(1) Si $\int_a^b g(x)\,dx$ está definida, también estará $\int_a^b f(x)\,dx$.

(2) Si $\int_a^b f(x)\,dx$ no está definida, tampoco lo estará $\int_a^b g(x)\,dx$.

Determinar si están o no definidas las siguientes integrales:

(*a*) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^4}$. Para $0 \leq x < 1$, $1-x^4 = (1-x)(1+x)(1+x^2) < 4(1-x)$ y $\frac{\frac{1}{4}}{1-x} < \frac{1}{1-x^4}$.

Luego $\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ no está definida, ni tampoco la integral dada.

(*b*) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}$. Para $0 < x \leq 1$, $\frac{1}{x^2+\sqrt{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$. Luego $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ está definida igualmente que la integral dada.

(*c*) $\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{x^{1/3}}$ está definida. (*d*) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{x}\,dx$ no está definida. (*e*) $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$ está definida.

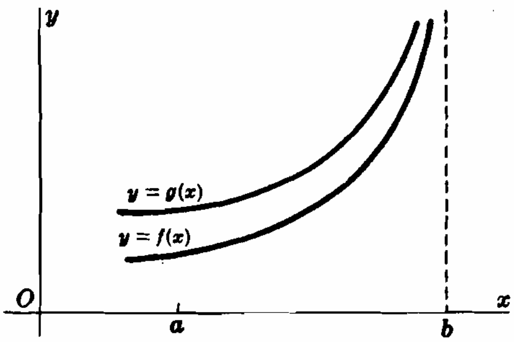

Fig. 46-4

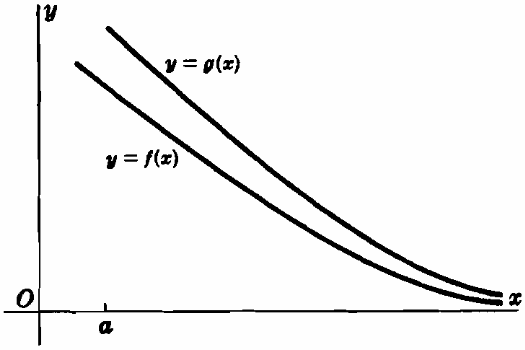

Fig. 46-5

27. Sea la función $f(x) \leq g(x)$ que está definida y es positiva en el intervalo $x \geq a$, siendo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Según la Fig. 46-5, parece lógico suponer:

(3) Si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ está definida, también estará $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

(4) Si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ no está definida, tampoco lo estará $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Determinar si están definidas o no las siguientes integrales.

(*a*) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4+2x+6}}$. Para $x \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{x^4+2x+6}} < \frac{1}{x^2}$. Luego $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ está definida igualmente que la integral dada.

(*b*) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+2x}}$ está definida. (*c*) $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ está definida. (*d*) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}$ está definida.

Capítulo 47

Sucesiones y series

UNA SUCESION, $\{s_n\} = s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$, es una función de n cuyo dominio de definición lo constituye el conjunto de los números positivos. (Ver Capítulo 1.)

Se dice que una sucesión $\{s_n\}$ está *acotada*, si existen dos números, P y Q, de manera que $P \leq s_n \leq Q$ para todos los valores de n. Por ejemplo, la sucesión $3/2, 5/4, 7/6, \ldots, \dfrac{2n+1}{2n} \ldots$, está acotada, ya que $1 \leq s_n \leq 2$ para todos los valores de n, sin embargo, la sucesión $2, 4, 6, \ldots, 2n$, no lo está.

Una sucesión $\{s_n\}$ es *creciente* si $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$, y *decreciente* cuando $s_1 \geq s_2 \geq s_3 \geq \cdots s_n \geq \cdots$ Por ejemplo, las sucesiones $\left\{\dfrac{n^2}{n+1}\right\} = 1/2,\ 4/3,\ 9/4,\ 16/5, \ldots$ y $\{2n - (-1)^n\} = 3, 3, 7, 7, \ldots$ son crecientes y las sucesiones $\{1/n\} = 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ y $-\{n\} = -1, -2, -3, -4, \ldots$, son decrecientes.

Una sucesión $\{s_n\}$ converge hacia un límite finito s, $\left[\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = s\right]$, cuando, dado un número ϵ tan pequeño como queramos, se puede encontrar un entero positivo m de manera que a partir de un n dado y para todos los siguientes, $n > m$, se verifica la desigualdad $|s - s_n| < \epsilon$. Si una sucesión tiene límite es *convergente*, y si no lo tiene recibe el nombre de *divergente*.

(Ver Problemas 1-2.)

Una sucesión $\{s_n\}$ diverge o tiende a ∞, $\left[\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \infty\right]$, cuando, dado un número positivo M tan grande como queramos, existe un entero positivo m de manera que a partir de un n dado y para todos los siguientes, $n > m$, se verifica la desigualdad $|s_n| > M$. Si $s_n > M$, $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = +\infty$; si $s_n < -M$, $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = -\infty$.

TEOREMA DE LAS SUCESIONES.

I. Toda sucesión acotada, creciente o decreciente, es convergente. La demostración cae fuera del propósito y alcance de este libro.

II. Toda sucesión no acotada es divergente. Véase la demostración en el Problema 3.
Muchos de los teoremas restantes son consecuencia inmediata de los teoremas expuestos en el Capítulo 2.

III. Una sucesión convergente (divergente) no modifica su carácter al cambiar de lugar uno o todos de sus n primeros términos.

IV. El límite de una sucesión convergente es único.

(Véase la demostración en el Problema 4.)

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = s$ y $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = t$:

V. $\lim\limits_{n \to +\infty} (k \cdot s_n) = k \lim\limits_{n \to +\infty} s_n = ks$, k siendo k una constante cualquiera.

VI. $\lim\limits_{n \to +\infty} (s_n \pm t_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} s_n \pm \lim\limits_{n \to +\infty} t_n = s \pm t$.

VII. $\lim\limits_{n \to +\infty} (s_n \cdot t_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} s_n \cdot \lim\limits_{n \to +\infty} t_n = s \cdot t$.

VIII. $\lim_{n \to +\infty} (s_n/t_n) = \lim_{n \to +\infty} s_n \,/ \lim_{n \to +\infty} t_n = s/t$, siempre que $t \neq 0$ y $t_n \neq 0$ para todos los valores de n.

IX. Sea $\{s_n\}$ una sucesión de términos no nulos; si $\lim_{n \to +\infty} s_n = \infty$, se verifica $\lim_{n \to +\infty} 1/s_n = 0$.

(Véase demostración en el Problema 5.)

X. Si $a > 1$, $\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty$.

(Véase la demostración en el Problema 6.)

XI. Si $|r| < 1$, se verifica $\lim_{n \to +\infty} r^n = 0$.

LA SUMA INDICADA

$$\sum s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n + \cdots \qquad (1)$$

de los términos de una sucesión $\{s_n\}$ recibe el nombre de *serie*. A toda serie se le asocia una sucesión de *sumas parciales*: $S_1 = s_1$, $S_2 = s_1 + s_2$, $S_3 = s_1 + s_2 + s_3, \cdots$, $S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n, \cdots$.

Si $\lim_{n \to +\infty} S_n = S$, siendo S un número finito, la serie (*1*) se denomina de *convergente* y S es su *suma*. Si no existe $\lim_{n \to +\infty} S_n$, la serie (*1*) se denomina *divergente*. Una serie también es divergente bien porque $\lim_{n \to +\infty} S_n = \infty$, o bien porque a medida que crece n, S_n va aumentando y disminuyendo sin aproximarse a un límite; en este último caso la serie recibe el nombre de *oscilante*. Por ejemplo, en la serie $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, $S_1 = 1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0, \ldots$

(Ver Problemas 7-8.)

De los teoremas anteriores se deducen las consecuencias siguientes:

XII. Una serie convergente (divergente) sigue siendo convergente (divergente) si se cambia el orden de uno o de todos sus n primeros términos. (Ver Problema 9.)

XIII. La suma de una serie convergente es única.

XIV. Si Σs_n converge hacia S, la serie $\Sigma k s_n$, siendo k una constante, converge hacia kS. Si Σs_n es divergente, también lo es $\Sigma k s_n$.

XV. Si Σs_n es convergente, se verifica: $\lim_{n \to +\infty} s_n = 0$.

(Véase la demostración en el Problema 10.)

El recíproco no es cierto. La serie armónica [Problema 7(*c*)] es divergente y, sin embargo, $\lim_{n \to +\infty} s_n = 0$.

XVI. Si $\lim_{n \to +\infty} s_n \neq 0$, la serie Σs_n es divergente.

El recíproco no es cierto; véase el Problema 7(*c*). (Ver Problema 11.)

Problemas resueltos

1. Sea la sucesión $\{s_n\}$ cuyo límite es s. Situemos sobre una escala numérica (Fig. 47-1) los puntos s, $s - \epsilon$, $s + \epsilon$, siendo ϵ un número positivo tan pequeño como queramos (infinitésimo) y vayamos colocando, ordenadamente, los puntos

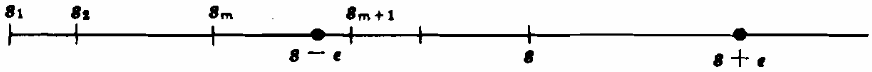

Fig. 47-1

$s_1, s_2, s_3, \ldots$ Según la definición de convergencia, los m primeros puntos están situados fuera del intervalo considerado, pero a partir del s_{m+1}, él y todos los siguientes están situados dentro de él.

En la Fig. 47-2 se puede observar una representación en un sistema de coordenadas rectangulares. En primer lugar, hemos trazado las rectas $y = s$, $y = s - \epsilon$ e $y = s + \epsilon$, determinando de esta forma, una banda de amplitud 2ϵ. Situando ahora los puntos $(1, s_1)$, $(2, s_2)$, $(3, s_3)\ldots$, el punto $(m + 1, s_{m+1})$ y todos los siguientes caerán dentro de la banda.

Es importante observar que fuera del intervalo o banda de amplitud 2ϵ, solamente habrá un número finito de puntos de una sucesión convergente,

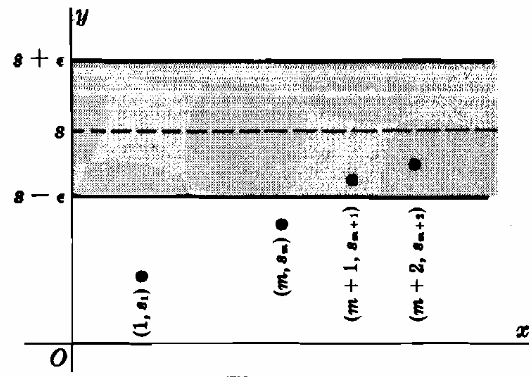

Fig. 47-2

2. Aplicar el teorema 1 para demostrar que las sucesiones (*a*) $\left\{1 - \dfrac{1}{n}\right\}$ y (*b*) $\left\{\dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2n)}\right\}$ son convergentes.

(*a*) La sucesión está acotada, ya que $0 \leq s_n \leq 1$, para todos los valores de n.

Como $s_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n(n+1)} = s_n + \dfrac{1}{n(n+1)}$, es decir $s_{n+1} \geq s_n$, la sucesión es creciente. Por tanto la sucesión converge hacia $s \leq 1$.

(*b*) La sucesión está acotada, ya que $0 \leq s_n \leq 1$, para todos los valores de n. Como $s_{n+1} = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots (2n+2)} = \dfrac{2n+1}{2n+2} s_n$, la sucesión es decreciente. Por tanto, la sucesión converge hacia $s \geq$ o.

3. Demostrar que toda sucesión no acotada $\{s_n\}$ es divergente.

Supongamos que $\{s_n\}$ es convergente (demostración por reducción al absurdo). Dado un número positivo ϵ, tan pequeño como queramos, existirá un entero positivo m de manera que a partir de él y para todos los siguientes, $n > m$, se verificará la desigualdad $|s_n - s| < \epsilon$. Luego en este intervalo estarán todos los términos de la sucesión menos un número finito de ellos con lo cual dicha sucesión deberá estar acotada. Como esto es contrario a la hipótesis, la sucesión será divergente.

4. Demostrar que el límite de una sucesión convergente es único.

Supongamos que la sucesión admitiese dos límites distintos, es decir, $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = s$ y $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = t$, siendo $|s - t| > 2\epsilon > 0$
En estas condiciones, en los intervalos, de amplitud 2ϵ, de s y t tendremos propiedades contradictorias: (i) por una parte no pueden tener puntos comunes, y (ii) cada uno contiene todos los términos de la sucesión menos un número finito de ellos. Así, pues, deberá ser $s = t$ y el límite será único.

5. Demostrar que si $\{s_n\}$ es una sucesión de términos no nulos y $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \infty$, se verifica: $\lim\limits_{n \to +\infty} 1/s_n = 0$.

Elegido un número muy pequeño $\epsilon > 0$, de $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = \infty$ se deduce que para todo $M > 1/\epsilon$, existirá un entero positivo m de manera que a partir de él y para todos los siguientes, $n > m$, se verificará la desigualdad $|s_n| > M > 1/\epsilon$. Para este valor de m, $|1/s_n| < 1/M < \epsilon$ siempre que $n > m$; por tanto, $\lim\limits_{n \to +\infty} 1/s_n = 0$.

6. Demostrar que $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = +\infty$ para $a > 1$.

Sea M número muy grande, $M > 0$; supongamos $a = 1 + b$ con $b > 0$; entonces

$$a^n = (1 + b)^n = 1 + nb + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} b^2 + \cdots > 1 + nb > M$$

para $n > M/b$. Es decir que m es el entero superior a M/b.

7. Demostrar que:

(*a*) La serie aritmética $a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n-1)d] + \cdots$ es divergente cuando $a^2 + d^2 > 0$.

(*b*) La serie geométrica $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$, siendo $a \neq 0$, converge hacia $\dfrac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$ y diverge si $|r| \geq 1$.

(*c*) La serie *armónica* $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots + 1/n + \cdots$ es divergente.

(*a*) Aquí $S_n = \frac{1}{2}n[2a + (n-1)d]$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \infty$ excepto para $a = d = 0$.

Por tanto es divergente cuando $a^2 + d^2 > 0$.

(*b*) En este caso $S_n = \dfrac{a - ar^n}{1-r} = \dfrac{a}{1-r} - \dfrac{a}{1-r}r^n$, $r \neq 1$.

Si $|r| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = 0$, y $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{a}{1-r}$.

Si $|r| > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n = \infty$, y S_n es divergente.

Si $|r| = 1$, la serie es o $a + a + a + \cdots$ o $a - a + a - a + \cdots$ y es divergente.

(*c*) Formando las sumas parciales, obtenemos

$$S_4 > 2,\ S_8 > 2{,}5\ S_{16} > 3,\ S_{32} > 3{,}5,\ S_{64} > 4,\ \ldots$$

Como la sucesión de sumas parciales no está acotada, la serie será divergente.

8. (*a*) Sumar la serie $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5^2} + \dfrac{1}{5^3} + \cdots$:

$$S_1 = \frac{1}{5} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5}\right),\ S_2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^2}\right),\ S_3 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^3}\right),\ \cdots,$$

$$S_n = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right), \text{ y } S = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) = \frac{1}{4}.$$

(*b*) Sumar la serie $\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + \cdots$:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \tfrac{1}{2},\quad S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = 1 - \tfrac{1}{3},$$

$$S_3 = S_2 + \frac{1}{3\cdot 4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} = 1 - \tfrac{1}{4},\quad \cdots,\quad S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{y } S = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

9. Sabiendo que la suma de la serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$ es igual a 2, hallar la suma de la serie que resulta cuando (*a*) se suprimen los cuatro primeros términos, (*b*) cuando se añaden a la dada los términos $8 + 4 + 2$.

(*a*) La serie $\frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$ es una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$. Converge hacia

$$S = 2 - (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}) = \tfrac{1}{8}$$

(*b*) La serie $8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$ es una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$. Converge hacia

$$2 + (8 + 4 + 2) = 16$$

10. Demostrar que si $\Sigma s_n = S$, se verifica $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0$.

Como $\Sigma s_n = S$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = S$. Ahora bien $s_n = S_n - S_{n-1}$; luego,

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

11. Demostrar que las series (*a*) $1/3 + 2/5 + 3/7 + 4/9 + \cdots$ y (*b*) $1/2 + 3/4 + 7/8 + 15/16 + \cdots$ son divergentes.

(*a*) $s_n = \dfrac{n}{2n+1}$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2+1/n} = \dfrac{1}{2} \neq 0$.

(*b*) $s_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n - 1}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) = 1 \neq 0$.

12. Una serie Σs_n converge hacia S, si la sucesión $\{s_n\}$ de las sumas parciales converge también hacia S, es decir, si dado un $\epsilon > 0$ tan pequeño como queramos, existe un entero m de manera que a partir de él y para todos los siguientes, $n > m$, se verifica la desigualdad $|S - S_n| < \epsilon$. Demostrar que las series del Problema 8 son convergentes.

(*a*) Si $|S - S_n| = \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) \right| = \frac{1}{4 \cdot 5^n} < \epsilon$, tendremos $5^n > \frac{1}{4\epsilon}$, $n \ln 5 > -\ln(4\epsilon)$, y $n > -\frac{\ln 4\epsilon}{\ln 5}$

Por tanto, basta con que m sea mayor que $-\frac{\ln 4\epsilon}{\ln 5}$.

(*b*) Si $|S - S_n| = \left| 1 - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \right| = \frac{1}{n+1} < \epsilon$, tendremos $n + 1 > \frac{1}{\epsilon}$ y $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$. Por tanto, basta con que m sea mayor que $\frac{1}{\epsilon} - 1$.

Problemas propuestos

13. Determinar si las sucesiones siguientes están o no acotadas, son decrecientes, crecientes o convergentes, divergentes u oscilantes.

(*a*) $\left\{n + \frac{2}{n}\right\}$ (*b*) $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ (*c*) $\{\operatorname{sen} \frac{1}{2}n\pi\}$ (*d*) $\{\sqrt[3]{n^2}\}$ (*e*) $\left\{\frac{n!}{10^n}\right\}$ (*f*) $\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$

14. Demostrar que $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{1/n^p} = 1$, $p > 0$. *Ind.* $n^{p/n} = e^{(p \ln n)/n}$.

15. Dada la sucesión $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, demostrar que: (*a*) en el intervalo $|1 - s_n| < 0{,}01$ están contenidos todos los términos de la sucesión menos los 99 primeros, (*b*) la sucesión está acotada, (*c*) $\lim_{n \to +\infty} s_n = 1$.

16. Demostrar que si: $|r| < 1$, se verifica $\lim_{n \to +\infty} r^n = 0$.

17. Hallar el carácter de las siguientes series geométricas. Calcular la suma de las que sean convergentes.

(*a*) $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$ (*b*) $4 - 1 + 1/4 - 1/16 + \cdots$ (*c*) $1 + 3/2 + 9/4 + 27/8 + \cdots$

Sol. (*a*) $S = 2$, (*b*) $S = 16/5$ (*c*) Divergente

18. Hallar la suma de las series siguientes:

(*a*) $\sum 3^{-n}$ (*d*) $\sum \frac{1}{n(n+2)}$ (*g*) $\sum \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$

(*b*) $\sum \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ (*e*) $\sum \frac{1}{n(n+3)}$ (*h*) $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(*c*) $\sum \left(\frac{1}{n^p} - \frac{1}{(n+1)^p}\right), p > 0$ (*f*) $\sum \frac{n}{(n+1)!}$

Sol. (*a*) 1/2, (*b*) 1/2, (*c*) 1, (*d*) 3/4, (*e*) 11/18, (*f*) 1, (*g*) 1/4, (*h*) 1/4

19. Demostrar que son divergentes, las series.

(*a*) $3 + 5/2 + 7/3 + 9/4 + \cdots$ (*c*) $e + e^2/8 + e^3/27 + e^4/64 + \cdots$

(*b*) $2 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[4]{2} + \cdots$ (*d*) $\sum \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$

20. Demostrar que si $\lim_{n \to +\infty} s_n \neq 0$, la serie Σs_n es divergente.

21. Demostrar que las series del Problema 18(*a*)-(*d*) son convergentes por existir un entero positivo m tal que para $\epsilon > 0$, $|S - S_n| < \epsilon$ siempre que $n > m$.

Sol. m = un entero mayor que en (*a*) $-\frac{\ln 2\epsilon}{\ln 3}$, (*b*) $\frac{1}{4\epsilon} - \frac{1}{2}$, (*c*) $\sqrt[p]{1/\epsilon} - 1$, (*d*) la raíz positiva de $2\epsilon m^2 - 2(1 - 3\epsilon)m - (3 - 4\epsilon) = 0$.

Capítulo 48

Criterios de convergencia y divergencia de las series de términos positivos

SERIES DE TERMINOS POSITIVOS. Son series Σs_n cuyos términos son todos positivos.

I. Una serie de términos positivos Σs_n es convergente, si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ está acotada.

Este teorema es consecuencia de que la sucesión de sumas parciales de una serie de términos positivos es siempre creciente.

II. **CRITERIO DE LA INTEGRAL.** Sea $f(n)$ el término general s_n de la serie Σs_n de términos positivos. Si $f(x) > 0$ y es decreciente en el intervalo $x > \xi$, siendo ξ un entero positivo, la serie Σs_n converge o diverge según que exista o no la integral $\int_{\xi}^{+\infty} f(x)\,dx$.

(Ver Problemas 1-5.)

III. **CRITERIO DE LA SERIE MAYORANTE.** Una serie de términos positivos Σs_n es convergente, si a partir de un determinado valor de n, y para todos los siguientes cada término es menor o igual que el correspondiente de una serie Σc_n convergente conocida de términos positivos.

IV. **CRITERIO DE LA SERIE MINORANTE.** Una serie de términos positivos Σs_n es divergente, si a partir de un determinado valor de n y para todos los siguientes, cada término es igual o mayor que el correspondiente de una serie Σd_n divergente conocida de términos positivos. (Ver Problemas 6-11.)

V. **CRITERIO DEL COCIENTE.** Una serie de términos positivos Σs_n es convergente si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_{n+1}}{s_n} < 1$, y divergente si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_{n+1}}{s_n} > 1$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_{n+1}}{s_n} = 1$, este criterio nada dice sobre la convergencia o divergencia. (Ver Problemas 12-18.)

Problemas resueltos

1. Demostrar el criterio de la integral: Sea $f(n)$ el término general s_n de la serie de términos positivos Σs_n. Si $f(x) > 0$ y es decreciente en el intervalo $x > \xi$, siendo ξ un entero positivo, la serie Σs_n es convergente o divergente según que exista o no la integral $\int_{\xi}^{+\infty} f(x)\,dx$.

En la figura, el área limitada por la curva $y = f(x)$ desde $x = \xi$ hasta $x = n$, se ha aproximado por medio de dos sistemas de rectángulos de base unidad. Expresando que el área limitada por la curva está comprendida entre la suma de las áreas de las series de rectángulos,

$$s_{\xi+1} + s_{\xi+2} + \cdots + s_n < \int_{\xi}^{n} f(x)\,dx < s_{\xi} + s_{\xi+1} + \cdots + s_{n-1}$$

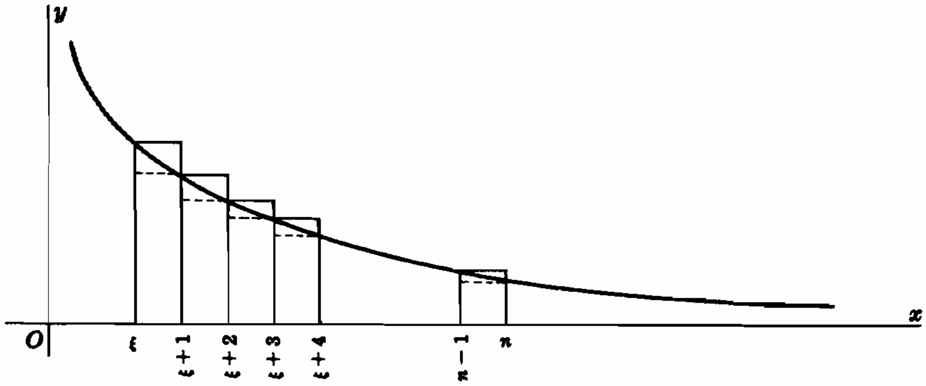

Fig. 48-1

(1) Supongamos que $\lim_{n\to+\infty}\int_\xi^n f(x)\,dx = \int_\xi^{+\infty} f(x)\,dx = A$. Por tanto,

$$s_{\xi+1} + s_{\xi+2} + \cdots + s_n < A$$

y
$$S_n = s_\xi + s_{\xi+1} + s_{\xi+2} + \cdots + s_n$$

está acotada y es creciente cuando n crece. Por tanto, por el Teorema I, Σs_n es convergente

(2) Supongamos que el $\lim_{n\to+\infty}\int_\xi^n f(x)\,dx = \int_\xi^{+\infty} f(x)\,dx$ no existe. Tendremos que

$S_n = s_\xi + s_{\xi+1} + \cdots + s_n$ no está acotada y Σs_n es divergente

Determinar el caracter de las series de los Problemas 2-5 por medio del criterio de la integral

2. $\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{7}} + \dfrac{1}{\sqrt{9}} + \cdots$ $\qquad f(n) = s_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$; hacemos $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

En el intervalo $x > 1, f(x) > 0$ y decrece cuando x aumenta. Tomamos $\xi = 1$ y consideramos

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty}\int_1^u \frac{dx}{\sqrt{2x+1}} = \lim_{u\to+\infty} \sqrt{2x+1}\Big]_1^u = \lim_{u\to+\infty} \sqrt{2u+1} - \sqrt{3} = \infty$$

Como la integral no está definida, la serie es divergente.

3. $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{36} + \dfrac{1}{64} + \cdots$ $\qquad f(n) = s_n = \dfrac{1}{4n^2}$; hacemos $f(x) = \dfrac{1}{4x^2}$.

En el intervalo $x > 1, f(x) > 0$ y decrece cuando x aumenta. Tomamos $\xi = 1$ y consideramos

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\lim_{u\to+\infty}\int_1^u \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{4}\lim_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big]_1^u = \frac{1}{4}\lim_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{u}+1\right) = \frac{1}{4}$$

Como la integral está definida, la serie es convergente.

4. $\operatorname{sen}\pi + \frac{1}{4}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{9}\operatorname{sen}\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{16}\operatorname{sen}\frac{1}{4}\pi + \cdots$ $\qquad f(n) = s_n = \dfrac{1}{n^2}\operatorname{sen}\dfrac{1}{n}\pi$; hacemos $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\pi$.

En el intervalo $x > 2, f(x) > 0$ y decrece cuando x aumenta. Tomamos $\xi = 2$ y consideramos

$$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty}\int_2^u \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\pi\,dx = \frac{1}{\pi}\lim_{u\to+\infty}\cos\frac{1}{x}\pi\Big]_2^u = \frac{1}{\pi}$$

La serie es convergente.

5. $1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \dfrac{1}{4^p} + \cdots\ (p>0)$. (La serie p.) $\qquad f(n) = s_n = \dfrac{1}{n^p}$; hacemos $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$.

En el intervalo $x > 1, f(x) > 0$ y decrece cuando x aumenta. Tomamos $\xi = 1$ y consideramos

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty}\int_1^u \frac{dx}{x^p} = \lim_{u\to+\infty}\left(\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^u = \frac{1}{1-p}\left\{\lim_{u\to+\infty} u^{1-p} - 1\right\},\ (p \neq 1)$$

Si $p > 1$, $\frac{1}{1-p}\left\{\lim_{u\to+\infty} u^{1-p} - 1\right\} = \frac{1}{1-p}\left\{\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{u^{p-1}} - 1\right\} = \frac{1}{p-1}$ la serie es convergente.

Si $p = 1$, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$ la serie es divergente.

Si $p < 1$, $\frac{1}{1-p}\left\{\lim_{u\to+\infty} u^{1-p} - 1\right\} = +\infty$ la serie es divergente.

Obsérvese en el segundo caso que la serie armónica es divergente.

CRITERIOS DE LAS SERIES MAYORANTE Y MINORANTE

Para aplicar estos criterios hay que comparar el término general de la serie cuyo carácter se quiere averiguar con el de una serie conocida, convergente o divergente. Entre éstas, las más utilizadas son:

(*a*) La serie geométrica $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots$, $a \neq 0$, que es convergente cuando la razón está comprendida entre cero y uno, $0 < r < 1$ y divergente cuando la razón es $r \geq 1$.

(*b*) La serie $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$, que es convergente cuando $p > 1$ y divergente cuando $p \leq 1$.

(*c*) Cada una de las nuevas series de carácter conocido.

Determinar el carácter de las series de los Problemas 6-11, aplicando los criterios de las series mayorante y minorante.

6. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{n^2+1} + \cdots$

El término general de la serie es $s_n = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$; luego la serie dada es término a término menor que la serie p $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$

La serie p es convergente por ser $p = 2$, por tanto, la serie dada es convergente. Aquí también se puede aplicar el criterio de la integral.

7. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$

El término general de la serie es $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Como $\frac{1}{\sqrt{n}} \geqq \frac{1}{n}$, la serie dada es término a término mayor que o igual a la serie armónica, por tanto es divergente. También se puede aplicar el criterio de la integral.

8. $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$

El término general de la serie es $\frac{1}{n!}$. Como $n! \geqq 2^{n-1}$ $\frac{1}{n!} \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$.

La serie dada es término a término menor que o igual a la serie geométrica convergente $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ y por tanto, es convergente. (El criterio de la integral no se puede aplicar en este caso.)

9. $2 + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{4^3} + \cdots$ El término general de la serie es $\frac{n+1}{n^3}$.

Como $\frac{n+1}{n^3} \leqq \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}$, la serie dada es término a término menor que o igual al doble de la serie p convergente $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$ por tanto, es convergente.

10. $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{4^4} + \cdots$

El término general de la serie es $\dfrac{1}{n^n}$. Como $\dfrac{1}{n^n} \leqq \dfrac{1}{2^{n-1}}$, la serie dada es término a término menor que o igual a la serie geométrica convergente $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \cdots$

También, la serie dada es término a término menor que o igual a la serie p convergente, con $p = 2$.

11. $1 + \dfrac{2^2+1}{2^3+1} + \dfrac{3^2+1}{3^3+1} + \dfrac{4^2+1}{4^3+1} + \cdots$

El término general es $\dfrac{n^2+1}{n^3+1} \geqq \dfrac{1}{n}$. Luego la serie dada es término a término mayor que o igual a la serie armónica y, por tanto, es divergente.

CRITERIO DEL COCIENTE

12. Demostrar el criterio del cociente:

Una serie de términos positivos Σs_n es convergente si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_{n+1}}{s_n} < 1$ y divergente si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_{n+1}}{s_n} > 1$.

Supongamos $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_{n+1}}{s_n} = L < 1$. Dado un r cualquiera, siendo $L < r < 1$, existirá un entero positivo m ta que siempre que $n > m$ se verificará $\dfrac{s_{n+1}}{s_n} < r$, es decir,

$$\frac{s_{m+2}}{s_{m+1}} < r \text{ ó } s_{m+2} < r \cdot s_{m+1}$$

$$\frac{s_{m+3}}{s_{m+2}} < r \text{ ó } s_{m+3} < r \cdot s_{m+2} < r^2 \cdot s_{m+1}$$

$$\frac{s_{m+4}}{s_{m+3}} < r \text{ ó } s_{m+4} < r \cdot s_{m+3} < r^3 \cdot s_{m+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Así pues, cada término de la serie $s_{m+1} + s_{m+2} + s_{m+3} + \cdots$ es $\leq$ que el correspondiente término de la serie geométrica $s_{m+1} + r \cdot s_{m+1} + r^2 \cdot s_{m+1} + \cdots$ que es convergente, ya que $r < 1$. Luego Σs_n es convergente según el Teorema III.

Supongamos $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_{n+1}}{s_n} = L > 1$ (o bien $= +\infty$). Entonces, existirá un entero positivo m tal que siempre que $n > m$, $\dfrac{s_{n+1}}{s_n} > 1$. Ahora bien, $s_{n+1} > s_n$, con lo que $\{s_n\}$ no tiende a 0. Luego Σs_n es divergente según el Teorema XVI (Capítulo 47).

Supongamos $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_{n+1}}{s_n} = 1$. Un ejemplo es la serie p $\sum \dfrac{1}{n^p}$, $p > 0$, para la cual

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^p = 1$$

Como la serie es convergente cuando $p > 1$ y divergente cuando $p \leq 1$, el criterio no sirve para dilucidar sobre la convergencia o divergencia.

Determinar el carácter de las series de los Problemas 13-23, aplicando el criterio de la raíz.

13. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{3}{3^3} + \dfrac{4}{3^4} + \cdots$ $\qquad s_n = \dfrac{n}{3^n}$, $s_{n+1} = \dfrac{n+1}{3^{n+1}}$, $\dfrac{s_{n+1}}{s_n} = \dfrac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \dfrac{3^n}{n} = \dfrac{n+1}{3n}$.

Luego $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{s_{n+1}}{s_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{3n} = \dfrac{1}{3}$ y la serie es convergente.

14. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2!}{3^2}+\dfrac{3!}{3^3}+\dfrac{4!}{3^4}+\cdots$ $\qquad s_n=\dfrac{n!}{3^n},\ s_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{3^{n+1}},\ \dfrac{s_{n+1}}{s_n}=\dfrac{n+1}{3}.$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{s_{n+1}}{s_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{3}=\infty$ y la serie es divergente.

15. $1+\dfrac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\cdots$

$$s_n=\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)},\quad s_{n+1}=\frac{(n+1)!}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)},\quad \frac{s_{n+1}}{s_n}=\frac{n+1}{2n+1}.$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n+1}{2n+1}=\dfrac{1}{2}$ la serie es convergente.

16. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 2^2}+\dfrac{1}{3\cdot 2^3}+\dfrac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots$ $\qquad s_n=\dfrac{1}{n\cdot 2^n},\ s_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}},\ \dfrac{s_{n+1}}{s_n}=\dfrac{n}{2(n+1)}.$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{2(n+1)}=\dfrac{1}{2}$ la serie es convergente.

17. $2+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{4}+\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{1}{4^3}+\cdots$ $\qquad s_n=\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{1}{4^{n-1}},\ s_{n+1}=\dfrac{n+2}{n+1}\cdot\dfrac{1}{4^n},\ \dfrac{s_{n+1}}{s_n}=\dfrac{n(n+2)}{4(n+1)^2}.$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n(n+2)}{4(n+1)^2}=\dfrac{1}{4}$ la serie es convergente.

18. $1+\dfrac{2^2+1}{2^3+1}+\dfrac{3^2+1}{3^3+1}+\dfrac{4^2+1}{4^3+1}+\cdots$

$$s_n=\frac{n^2+1}{n^3+1},\quad s_{n+1}=\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3+1},\quad \frac{s_{n+1}}{s_n}=\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^3+1}\cdot\frac{n^3+1}{n^2+1}.$$

Como $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{s_{n+1}}{s_n}=1$ es un caso de duda. Ver Problema 11.

Problemas propuestos

19. Demostrar que se puede aplicar el criterio de la integral en las series siguientes y aplicarlo para determinar su carácter.

(*a*) $\sum\dfrac{1}{n}$ (*c*) $\sum\dfrac{1}{n\ln n}$ (*e*) $\sum\dfrac{n}{n^2+1}$ (*g*) $\sum\dfrac{2n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

(*b*) $\sum\dfrac{50}{n(n+1)}$ (*d*) $\sum\dfrac{n}{(n+1)(n+2)}$ (*f*) $\sum\dfrac{n}{e^n}$ (*h*) $\sum\dfrac{1}{(2n+1)^2}$

Sol. (*a*), (*c*), (*d*), (*e*) divergente.

20. Determinar el carácter de las series aplicando los criterios de las series mayorante y minorante.

(*a*) $\sum\dfrac{1}{n^3-1}$ (*e*) $\sum\dfrac{n+2}{n(n+1)}$ (*i*) $\sum\dfrac{1}{3^n+1}$ (*m*) $\sum\dfrac{n}{3n^2-4}$

(*b*) $\sum\dfrac{n-2}{n^3}$ (*f*) $\sum\dfrac{1}{n^{n-1}}$ (*j*) $\sum\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ (*n*) $\sum\dfrac{1}{1+\ln n}$

(*c*) $\sum\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$ (*g*) $\sum\dfrac{1}{3n+1}$ (*k*) $\sum\dfrac{1}{3^n-1}$ (*o*) $\sum\dfrac{n^4-5}{n^5}$

(*d*) $\sum\dfrac{1}{n^2-5}$ (*h*) $\sum\dfrac{\ln n}{n}$ (*l*) $\sum\dfrac{\ln n}{n^p}$ (*p*) $\sum\dfrac{n+1}{n\sqrt{3n-2}}$

Sol. (*a*), (*b*), (*d*), (*f*), (*i*), (*k*), (*l*) para $p>2$ convergente.

21. Determinar el carácter de las series, aplicando el criterio del cociente.

(*a*) $\sum \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ (*d*) $\sum \frac{3^{2n-1}}{n^2-n}$ (*g*) $\sum \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$ (*j*) $\sum \frac{n^n}{n!}$

(*b*) $\sum \frac{5^n}{n!}$ (*e*) $\sum \frac{(n+1)2^n}{n!}$ (*h*) $\sum \frac{n^3}{(\ln 3)^n}$ (*k*) $\sum \frac{2^n}{2n-1}$

(*c*) $\sum \frac{n}{2^{2n}}$ (*f*) $\sum n\left(\frac{3}{4}\right)^n$ (*i*) $\sum \frac{2^n}{n(n+2)}$ (*l*) $\sum \frac{n^3}{3^n}$

Sol. (*a*), (*b*), (*c*), (*e*), (*f*), (*h*) convergente.

22. Determinar el carácter de las series.

(*a*) $\frac{1}{4^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{13^2}+\cdots$

(*b*) $3+\frac{3}{\sqrt[3]{2}}+\frac{3}{\sqrt[3]{3}}+\frac{3}{\sqrt[3]{4}}+\cdots$

(*c*) $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}+\cdots$

(*d*) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+\cdots$

(*e*) $3+\frac{3}{4}+\frac{11}{27}+\frac{9}{32}+\cdots$

(*f*) $\frac{2}{3}+\frac{3}{2\cdot 3^2}+\frac{4}{3\cdot 3^3}+\frac{5}{4\cdot 3^4}+\cdots$

(*g*) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\cdots$

(*h*) $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 4}+\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{5}{4\cdot 6}+\cdots$

(*i*) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{4^3}+\frac{4}{5^4}+\cdots$

(*j*) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^{5/2}}+\frac{1}{4^3}+\cdots$

(*k*) $2+\frac{3}{5}+\frac{4}{10}+\frac{5}{17}+\cdots$

(*l*) $\frac{2}{5}+\frac{2\cdot 4}{5\cdot 8}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{5\cdot 8\cdot 11}+\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{5\cdot 8\cdot 11\cdot 14}+\cdots$

Sol. (*a*), (*d*), (*f*), (*g*), (*i*), (*j*), (*l*) convergente.

23. Demostrar el criterio de la serie mayorante. *Ind.* Si $\Sigma c_n = C$, tendremos que $\{S_n\}$ está acotada.

24. Demostrar el criterio de la serie minorante. *Ind.* $\sum_{1}^{n} s_i \geq \sum_{1}^{n} d_i > M$ para $n > m$.

25. Demostrar que si $P(n)$ y $Q(n)$ son polinomios de grados p y q, respectivamente, la serie $\sum \frac{P(n)}{Q(n)}$ es convergente si $q > p+1$ y divergente si $q \leq p+1$. *Ind.* Compárese con $1/n^{q-p}$.

26. Determinar el carácter de las series aplicando el criterio del problema anterior.

(*a*) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$

(*b*) $\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{12}+\frac{1}{17}+\cdots$

(*c*) $\frac{3}{2}+\frac{5}{10}+\frac{7}{30}+\frac{9}{68}+\cdots$

(*d*) $\frac{3}{2}+\frac{5}{24}+\frac{7}{108}+\frac{9}{320}+\cdots$

(*e*) $\frac{1}{2^2-1}+\frac{2}{3^2-2}+\frac{3}{4^2-3}+\frac{4}{5^2-4}+\cdots$

(*f*) $\frac{1}{2^3-1^2}+\frac{1}{3^3-2^2}+\frac{1}{4^3-3^2}+\frac{1}{5^3-4^2}+\cdots$

(*g*) $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 4}+\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{5}{4\cdot 6}+\cdots$

Sol. (*a*), (*c*), (*d*), (*f*) convergente.

27. Demostrar el Criterio de la Raíz: Una serie de términos positivos Σs_n es convergente si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{s_n} < 1$ y divergente si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{s_n} > 1$. El criterio nada nos dice cuando $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{s_n} = 1$. *Ind.* Si $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{s_n} < 1$, tendremos $\sqrt[n]{s_n} < r < 1$, para $n > m$, y $s_n < r^n$.

28. Determinar el carácter de las series aplicando el criterio de la raíz.

(*a*) $\sum \frac{1}{n^n}$, (*b*) $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$, (*c*) $\sum \frac{2^{n-1}}{n^n}$, (*d*) $\sum \left(\frac{n}{n^2+2}\right)^n$ *Sol.* Todas convergentes.

Capítulo 49

Series de términos negativos

UNA SERIE cuyos términos son negativos se puede considerar como opuesta a una de términos positivos.

SERIES ALTERNADAS. Una serie cuyos términos son alternativamente positivos y negativos,

$$\sum (-1)^{n-1} s_n = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \cdots + (-1)^{n-1} s_n + \cdots \qquad (1)$$

en la que cada s_i es *positivo* se denomina *serie alternada.*

I. Una serie alternada (*1*) es convergente si (i) $s_n > s_{n+1}$, para todos los valores de n, y (ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0$.

(Ver Problemas 1-2.)

CONVERGENCIA ABSOLUTA. Una serie $\Sigma s_n = s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots$ de términos arbitrariamente positivos y negativos se denomina *absolutamente convergente* si la serie de valores absolutos $\Sigma|s_n| = |s_1| + |s_2| + |s_3| + \cdots + |s_n| + \cdots$ es convergente.

Toda serie de términos positivos es absolutamente convergente.

Toda serie absolutamente convergente es convergente. (Véase la demostración en el Problema 3.)

CONVERGENCIA CONDICIONAL. Si la serie Σs_n es convergente, siendo divergente la de valores absolutos $\Sigma|s_n|$, recibe el nombre de *condicionalmente convergente.*

Por ejemplo, la serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$, es condicionalmente convergente, ya que ella es convergente pero la serie de valores absolutos $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$ es divergente.

CRITERIO DEL COCIENTE PARA LA CONVERGENCIA ABSOLUTA. Una serie de términos arbitrariamente positivos y negativos es absolutamente convergente si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| < 1$, y divergente si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| > 1$. Si el límite es igual a 1, nada podemos saber sobre el carácter de la serie.

(Ver Problemas 4-12.)

Problemas resueltos

1. Demostrar que una serie alternada $s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \cdots$ es convergente si (i) $s_n > s_{n+1}$, para todos los valores de n, y (ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0$.

Consideremos la suma parcial

$$S_{2m} = s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \cdots + s_{2m-1} - s_{2m}$$

que la podemos ordenar como sigue:

$$(a)\ S_{2m} = (s_1 - s_2) + (s_3 - s_4) + \cdots + (s_{2m-1} - s_{2m})$$

$$(b)\ S_{2m} = s_1 - (s_2 - s_3) - \cdots - (s_{2m-2} - s_{2m-1}) - s_{2m}$$

Por hipótesis, $s_n > s_{n+1}$ y $s_n - s_{n+1} > 0$; luego, por (*a*), $S_{2m} > 0$, y por (*b*), $S_{2m} < s_1$. Así pues, la sucesión $\{S_{2m}\}$ está acotada y converge hacia el límite $L < s_1$.

Consideremos ahora la suma parcial $S_{2m+1} = S_{2m} + s_{2m+1}$; tendremos

$$\lim_{m\to+\infty} S_{2m+1} = \lim_{m\to+\infty} S_{2m} + \lim_{m\to+\infty} s_{2m+1} = L + 0 = L$$

Por tanto, $\lim_{n\to+\infty} S_n = L$ y la serie es convergente.

2. Demostrar que las siguientes series alternadas son convergentes:

(*a*) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots$

$s_n = \frac{1}{n^2}$ y $s_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$; Por tanto, $s_n > s_{n+1}$, $\lim_{n\to+\infty} s_n = 0$, y la serie es convergente.

(*b*) $1/2 - 1/5 + 1/10 - 1/17 + \cdots$

$s_n = \frac{1}{n^2+1}$ y $s_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1}$; por tanto, $s_n \geq s_{n+1}$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$, y la serie es convergente.

(*c*) $\frac{1}{e} - \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} - \frac{4}{e^4} + \cdots$

La serie es convergente, ya que $s_n \geq s_{n+1}$ y $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n} = 0$.

3. Demostrar que toda serie absolutamente convergente es convergente.

Sea $$(a) \quad \Sigma s_n = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + \cdots + s_n + \cdots,$$

cuyos términos son positivos y negativos y supongamos que la correspondiente serie de términos positivos

$$(b) \quad \Sigma\, |s_n| = |s_1| + |s_2| + |s_3| + \cdots + |s_n| + \cdots$$

converge hacia S'.

Supongamos que la enésima suma parcial $S_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n$ de (*a*) consta de r términos positivos cuya suma es P_r y $t = n = r$ términos negativos cuya suma es $-Q_t$. Es evidente que $S_n = P_r - Q_t$, mientras que la correspondiente suma parcial de (*b*) es $S'_n = P_r + Q_t$. Como $\lim_{n\to+\infty} S'_n = S'$, las sumas parciales S'_n están acotadas. Por consiguiente, las sucesiones $\{P_r\}$ y $\{Q_t\}$ están acotadas y son crecientes a medida que aumenta n. Si $\lim_{n\to+\infty} P_r = P$ y $\lim_{n\to+\infty} Q_t = Q$, tendremos:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} P_r - \lim_{n\to+\infty} Q_t = P - Q$$

y, por tanto, la serie Σs_n es convergente.

CONVERGENCIA ABSOLUTA Y CONDICIONAL

Determinar si las series siguientes son absoluta o condicionalmente convergentes.

4. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$

La serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$, obtenida tomando todos los términos positivos, es convergente, por ser una serie geométrica de $r = \frac{1}{2}$. Por tanto, la serie dada es absolutamente convergente.

5. $1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \cdots$

La serie $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \cdots$, obtenida tomando todos los términos positivos, es convergente, por el criterio del cociente. Así pues, la serie dada es absolutamente convergente.

6. $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$

La serie $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$ es divergente, por ser una serie p con $p = \frac{1}{2} < 1$. Así pues, la serie dada es condicionalmente convergente.

7. $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3^3} - \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4^3} + \cdots$

La serie $1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4^3} + \cdots$ es convergente, ya que es término a término menor o igual a la serie p con $p = 3$. Así pues, la serie dada es absolutamente convergente.

8. $\frac{2}{3} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4} + \cdots$

La serie $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{4} + \cdots$ es divergente, ya que es término a término mayor que $\frac{1}{2}$(serie armónica). Por tanto, la serie dada es absolutamente convergente.

9. $2 - \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} - \frac{2^7}{7!} + \cdots$

La serie $2 + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^7}{7!} + \cdots + \frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$ es convergente (criterio del cociente) y la serie dada es absolutamente convergente.

10. $\frac{1}{2} - \frac{4}{2^3+1} + \frac{9}{3^3+1} - \frac{16}{4^3+1} + \cdots$

La serie $\frac{1}{2} + \frac{4}{2^3+1} + \frac{9}{3^3+1} + \frac{16}{4^3+1} + \cdots + \frac{n^2}{n^3+1} + \cdots$ es divergente (criterio de la integral) y la serie dada es condicionalmente convergente.

11. $\frac{1}{2} - \frac{2}{2^3+1} + \frac{3}{3^3+1} - \frac{4}{4^3+1} + \cdots$

La serie $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^3+1} + \frac{3}{3^3+1} + \frac{4}{4^3+1} + \cdots + \frac{n}{n^3+1} + \cdots$ es convergente, ya que es término a término menor que la serie p para $p = 2$. Por tanto, la serie dada es absolutamente convergente.

12. $\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{4\cdot 2^4} + \cdots$

La serie $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{4\cdot 2^4} + \cdots$ es convergente, ya que es término a término menor que o igual a la serie convergente geométrica $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$. Por tanto, la serie dada es absolutamente convergente.

Problemas propuestos

13. Determinar si las series alternadas siguientes son convergentes o divergentes.

(*a*) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n!}$ (*c*) $\sum (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$ (*e*) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

(*b*) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\ln n}$ (*d*) $\sum (-1)^{n-1}\frac{\ln n}{3n+2}$ (*f*) $\sum (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$

Sol. (*a*), (*b*), (*d*), (*e*) convergente.

14. Determinar si las series siguientes son condicional o absolutamente convergentes.

(*a*) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}$ (*c*) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^2}$ (*e*) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1}$ (*g*) $\sum (-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}$

(*b*) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n(n+1)}}$ (*d*) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2}$ (*f*) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{(n!)^3}$ (*h*) $\sum (-1)^{n-1}\frac{n^2}{n^4+2}$

Sol. (*a*), (*c*), (*d*), (*f*), (*h*) absolutamente convergente.

Capítulo 50

Algebra de las series

OPERACIONES CON SERIES. Sea

$$\Sigma s_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n + \cdots \qquad (1)$$

una serie y Σt_n la serie obtenida a partir de la anterior agrupando sus términos mediante paréntesis (asociación de términos). Por ejemplo,

$$\Sigma t_n = (s_1 + s_2) + (s_3 + s_4 + s_5) + (s_6 + s_7) + (s_8 + s_9 + s_{10} + s_{11}) + \cdots$$

I. La suma de una serie convergente no varía al agrupar sus términos mediante paréntesis (propiedad asociativa).

II. El carácter de una serie divergente de términos positivos no se modifica al agrupar sus términos mediante paréntesis (propiedad asociativa). Sin embargo, la serie obtenida al agrupar los términos en una serie divergente cuyos elementos sean arbitrariamente positivos y negativos puede ser o no divergente. (Ver Problema 1-2.)

Sea Σu_n una serie obtenida a partir de (*1*) por reordenación de sus términos. Por ejemplo,

$$\Sigma u_n = s_1 + s_3 + s_2 + s_4 + s_6 + s_5 + \cdots$$

III. Toda serie obtenida por reordenación de los términos de una absolutamente convergente converge absolutamente hacia la misma suma.

IV. Ordenando convenientemente los términos de una serie condicionalmente convergente se puede obtener, o bien una serie divergente, o una serie convergente cuya suma sea un número prefijado. (Ver Problema 3.)

ADICION, SUSTRACCION Y MULTIPLICACION. Dadas las series Σs_n y Σt_n, las *series suma* Σu_n *diferencia* Σv_n y *producto* Σw_n vienen dadas por

$$\begin{aligned}
\Sigma u_n &= \Sigma(s_n + t_n) \\
\Sigma v_n &= \Sigma(s_n - t_n) \\
\Sigma w_n &= s_1t_1 + (s_1t_2 + s_2t_1) + (s_1t_3 + s_2t_2 + s_3t_1) + \cdots
\end{aligned}$$

V. Si Σs_n converge hacia S y Σt_n converge hacia T, $\Sigma(s_n + t_n)$ converge hacia $S + T$ y $\Sigma(s_n - t_n)$ converge hacia $S - T$. Si Σs_n y Σt_n son absolutamente convergentes, también lo son $\Sigma(s_n \pm t_n)$.

VI. Si Σs_n y Σt_n son convergentes, su serie producto Σw_n puede ser o no convergente. Si Σs_n y Σt_n son convergentes y por lo menos una de ellas es absolutamente convergente, la serie Σw_n converge hacia ST. Si Σs_n y Σt_n son absolutamente convergentes, también lo es Σw_n. (Ver Problemas 4-5.)

CALCULOS CON SERIES. La suma de una serie convergente se puede obtener fácilmente siempre que la enésima suma parcial se pueda expresar en función de n como ocurre, por ejemplo, con una serie geométrica convergente. Cualquier suma parcial de una serie convergente es un valor aproximado de la suma de la serie. Si se va a utilizar como valor de S su aproximado S_n es necesario conocer un límite o cota de error de la diferencia $|S_n - S|$.

Si la suma de una serie convergente Σs_n es S, tendremos

$$S = S_n + R_n$$

en donde R_n se denomina «resto de la serie» y representa el error que se comete al quedarnos con la suma parcial enésima s_n en lugar de con la verdadera suma S. En los problemas siguientes se da una cota de este error en la forma $R_n < a$ para las series de términos positivos, y en la forma $|R_n| \leq a$ para las series de términos arbitrariamente positivos y negativos.

Para una serie alternada convergente $s_1 - s_2 + s_3 - s_4 + \cdots$,

$$R_{2m} = s_{2m+1} - s_{2m+2} + s_{2m+3} - s_{2m+4} + \cdots < s_{2m+1}$$

y $$R_{2m+1} = -s_{2m+2} + s_{2m+3} - s_{2m+4} + s_{2m+5} - \cdots > -s_{2m+2}$$

ver Problema 1, Capítulo 49. Por tanto,

VII. En una serie alternada convergente, $|R_n| < s_{n+1}$; además, R_n es positivo cuando n es par y negativo cuando n es impar. (Ver Problema 6.)

VIII. En la serie geométrica convergente Σar^{n-1},

$$|R_n| = \left|\frac{ar^n}{1-r}\right|$$

IX. Si la serie de términos positivos Σs_n converge por el Criterio de la Integral, se tiene

$$R_n < \int_n^{+\infty} f(x)\,dx \text{ para } n > \xi \qquad \text{(Ver Problemas 7-9.)}$$

X. Si Σc_n es una serie de términos positivos convergente y para las series Σs_n se verifica que $s_n \leq c_n$ para todo valor de $n > n_1$, se tiene

$$R_n \leq \sum_{n+1}^{+\infty} c_j \text{ para } n > n_1 \qquad \text{(Ver Problemas 10-12.)}$$

Problemas resueltos

1. Dada la serie $\Sigma s_n = s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n + \cdots$ de términos positivos, a partir de ella se obtiene la serie $\Sigma t_n = (s_1 + s_2) + s_3 + (s_4 + s_5) + s_6 + \cdots$, agrupando mediante paréntesis los términos de la primera siguiendo el criterio 2, 1, 2, 1, 2, 1, ... Las sumas parciales de Σt_n son $T_1 = S_2$, $T_2 = S_3$, $T_3 = S_5$, $T_4 = S_6 \cdots$. Si Σs_n converge hacia S, también convergerá hacia este valor Σt_n, ya que $\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$. Si Σs_n es divergente, la sucesión $\{S_n\}$ no estará acotada y tampoco lo está $\{T_n\}$; por tanto, Σt_n es divergente.

2. La serie $\Sigma(-1)^{n-1}\left(\frac{2n+1}{n}\right)$ es divergente.(¿Por qué?) Cuando la agrupamos de la forma

$$\left(3-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{7}{3}-\frac{9}{4}\right)+\left(\frac{11}{5}-\frac{13}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{4m-1}{2m-1}-\frac{4m+1}{2m}\right)+\cdots$$

la serie es convergente, ya que el término general $\left(\frac{4m-1}{2m-1}-\frac{4m+1}{2m}\right) = \frac{1}{4m^2-2m} < \frac{1}{m^2}$.

3. La serie (*a*) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$ es convergente, ya que se puede agrupar de la forma $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\cdots$ que conduce a la serie convergente $\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\cdots = A$.
Cuando (*a*) se agrupa según la norma $+--+--\cdots$, tenemos $\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\cdots$ o sea $\frac{1}{4}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\cdots=\frac{1}{2}A$.

4. Demostrar que $\frac{3+1}{3\cdot 1}+\frac{3^2+2^3}{3^2\cdot 2^3}+\frac{3^3+3^3}{3^3\cdot 3^3}+\cdots+\frac{3^n+n^3}{3^n\cdot n^3}+\cdots$ es convergente.

Como $\frac{3^n+n^3}{3^n\cdot n^3}=\frac{1}{n^3}+\frac{1}{3^n}$, la serie dada es igual a la suma de las series $\sum\frac{1}{n^3}$ y $\sum\frac{1}{3^n}$. Como éstas son convergentes, según el teorema V, la serie dada es convergente.

5. Demostrar que la serie $\frac{3^n+n}{n\cdot 3^n}$ es divergente.

Supongamos que $\sum\frac{3^n+n}{n\cdot 3^n}=\sum\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3^n}\right)$ es convergente. Luego, como $\sum\frac{1}{3^n}$ es convergente (ver teorema V) también lo será $\sum\frac{1}{n}$. Como esto es falso, la serie dada es divergente.

6. Hallar el error cometido cuando $\Sigma s_n = 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots$ se aproxima por sus 10 primeros términos.
(*b*) ¿Cuántos términos se deben de tomar para hallar el valor de la serie con un error menor que 0,05?

(*a*) Esta es una serie alternada convergente. El error $R_{10}<s_{11}=1/11^2=0{,}0083$.

(*b*) Como $|R_n|<s_{n+1}$, haciendo $s_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}=0{,}05$, tendremos $(n+1)^2=20$ y $n=3{,}5$. Por consiguiente, hay que tomar cuatro términos.

7. Demostrar que $R_n<\int_n^{+\infty}f(x)\,dx$. Ver el teorema IX.

En la figura del Problema 1, Capítulo 48, supongamos que la aproximación del área limitada por la curva por medio de la de rectángulos menores, se extiende a la derecha de $x=n$. Tendremos

$$R_n = s_{n+1}+s_{n+2}+s_{n+3}+\cdots<\int_n^{+\infty}f(x)\,dx$$

8. Hallar el error cometido cuando $\sum\frac{1}{4n^2}$ se aproxima por sus 10 primeros términos.

Aplicando el criterio de la integral, la serie es convergente (Problema 3, Capítulo 48). Por consiguiente,

$$R_{10}<\frac{1}{4}\int_{10}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{4}\lim_{u\to+\infty}\int_{10}^{u}\frac{dx}{x^2}=\frac{1}{4}\lim_{u\to+\infty}\left(-\frac{1}{u}+\frac{1}{10}\right)=\frac{1}{40}=0{,}025$$

9. Calcular el número de términos que hay que tomar para calcular $\sum\frac{1}{n^5+1}$ con un error menor que 0,00001.

Esta serie es convergente por comparación con la $\sum\frac{1}{n^5}$ la cual, a su vez, es convergente por el criterio de la integral.

Por tanto $R_n<\int_n^{+\infty}\frac{dx}{x^5}=\frac{1}{4n^4}$. Tomando $\frac{1}{4n^4}=0{,}00001$, será $n^4=25.000$ y $n=12{,}6$. Así pues, hay que tomar 13 términos.

10. Calcular el error cometido cuando $\sum\frac{1}{n!}$ se aproxima por sus 12 primeros términos.

Según vimos, esta serie es convergente (Problema 8, Capítulo 48) por comparación con la serie geométrica $\sum\frac{1}{2^{n-1}}$.

Por tanto, el error R_{12} en la serie dada es menor que el error R'_{12} en la serie geométrica, es decir, $R_{12}<R'_{12}=\frac{(\frac{1}{2})^{12}}{1-\frac{1}{2}}$ $=\frac{1}{2^{11}}=0{,}0005$.

Podemos hacerlo mejor. Para $n>6$, $\frac{1}{n!}<\frac{1}{4^{n-1}}$; luego, $R_{12}<\frac{(\frac{1}{4})^{12}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3\cdot 4^{11}}=0{,}00000008$.

11. Hallar el error cometido cuando $\Sigma s_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}(\frac{2}{3})^2+\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^3+\frac{1}{4}(\frac{2}{3})^4+\cdots$ se aproxima por sus 10 primeros términos.

Aplicando el criterio del cociente, la serie es convergente, ya que $\frac{s_{n+1}}{s_n}=\frac{2}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)$ y $r=\lim_{n\to+\infty}\frac{s_{n+1}}{s_n}=\frac{2}{3}$.

Como $\frac{s_{n+1}}{s_n}<\frac{2}{3}$, para todo valor de n, tendremos que la serie dada es término a término menor que o igual a la serie geométrica $\Sigma s_1 r^{n-1}$. Luego $R_{10}<\left(\frac{2}{3}\right)^{11}+\left(\frac{2}{3}\right)^{12}+\left(\frac{2}{3}\right)^{13}+\cdots=\frac{(2/3)^{11}}{1-2/3}=\frac{2^{11}}{3^{10}}=0{,}04$.

Se puede obtener mejor aproximación observando que después del décimo término la serie dada es término a término menor que la $\sum s_{11}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \sum \frac{1}{11}\left(\frac{2}{3}\right)^{11}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2^{11}}{11 \cdot 3^{10}} = 0{,}004.$

12. Hallar el error cometido cuando $\sum s_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots$ se aproxima por sus 10 primeros términos.

Aplicando el criterio del cociente, la serie es convergente, ya que $\frac{s_{n-1}}{s_n} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)$ y $r = \frac{1}{3}$. Como $\frac{s_{n+1}}{s_n} \geq \frac{1}{3}$, para todo valor de n, no podemos utilizar la serie geométrica $\Sigma(1/3)^n$ como serie de comparación. Ahora bien, $\left\{\frac{s_{n+1}}{s_n}\right\}$ es una sucesión creciente y $\frac{s_{12}}{s_{11}} = \frac{4}{11}$; luego a partir del décimo término la serie dada es término a término menor que o igual a la serie geométrica $\sum s_{11}\left(\frac{4}{11}\right)^{n-1} = \frac{11}{3^{11}}\left(\frac{4}{11}\right)^{n-1}$. Luego $R_{10} < \sum \frac{11}{3^{11}}\left(\frac{4}{11}\right)^{n-1} = \frac{121}{7 \cdot 3^{11}} = 0{,}00009758$ $< 0{,}0001$.

Problemas propuestos

13. Ordenar los términos de $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ para obtener una serie convergente cuya suma sea (*a*) 1, (*b*) -2.
Ind. (*a*) Se pueden tomar los n_1 primeros términos positivos hasta que su suma sea mayor que 1; a continuación, los n_2 primeros términos negativos hasta que su suma resulte inferior a 1, y así sucesivamente.

14. ¿Se puede obtener una serie convergente sumando dos divergentes? Poner un ejemplo.

15. (*a*) Hallar el error cometido cuando la serie $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$ se aproxima por sus 50 primeros términos.
(*b*) Hallar el número de términos que hay que tomar para que el error sea menor que 0,000005.
Sol. (*a*) 0,01, (*b*) 100.000

16. (*a*) Hallar el error cometido cuando $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^4}$ se aproxima por sus 8 primeros términos.
(*b*) Hallar el número de términos que hay que tomar para que el error sea menor que 0,00005.
Sol. (*a*) 0,0002, (*b*) 11

17. (*a*) Hallar el error que se comete cuando la serie geométrica $\sum \frac{3}{2^n}$ se aproxima por sus 6 primeros términos.
(*b*) Hallar el número de términos que hay que tomar para que el error sea menor que 0,00005. *Sol.* (*a*) 0,05, (*b*) 16

18. Demostrar que si la serie de términos positivos Σs_n es convergente por comparación con la serie geométrica Σr^n, $0 < r < 1$, se verifica $R_n < \frac{r^{n+1}}{1-r}$.

19. Hallar el error que se comete cuando:
(*a*) $\sum \frac{1}{3^n+1}\left(< \sum \frac{1}{3^n}\right)$ se aproxima por sus 6 primeros términos.
(*b*) $\sum \frac{1}{3+4^n}\left(< \sum \frac{1}{4^n}\right)$ se aproxima por sus 6 primeros términos.
Sol. (*a*) 0,0007, (*b*) 0,00009

20. Las series (*a*) $\sum \frac{n+1}{n \cdot 3^n}$ y (*b*) $\sum \frac{n}{(n+1)3^n}$ son convergentes según el criterio del cociente. Hallar el error que se comete cuando ambas se aproximan por sus 8 primeros términos. *Sol.* (*a*) 0,00009, (*b*) 0,00007

21. En una serie p convergente, demostrar que $R_n < \frac{1}{(p-1)n^{p-1}}$. *Ind.* Ver Problema 9.

22. Las series (*a*) $\sum \frac{1}{n^3-2}$ y (*b*) $\sum \frac{n-1}{n^5}$ son convergentes por comparación con una serie p apropiada. Hallar el error que se comete cuando ambas se aproximan por sus 6 primeros términos y determinar el número de términos que hay que tomar para que el error sea menor que 0,005. *Sol.* (*a*) 0,014; 10 términos (*b*) 0,002; 5 términos.

Capítulo 51

Serie de potencias

UNA SERIE de la forma

$$\sum c_i x^i = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i x^i = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \tag{1}$$

en la que los coeficientes son constantes, recibe el nombre de *serie de potencias de x*. Análogamente una serie de la forma

$$\sum c_i (x - a)^i = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i (x - a)^i = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots + c_n(x - a)^n + \cdots \tag{2}$$

se denomina *serie de potencias de* $(x - a)$.

Para cada valor de x, las series (*1*) y (*2*) se transforman en series numéricas convergentes o divergentes (ver Capítulos 48 y 49).

CAMPO DE CONVERGENCIA. Es el conjunto de los valores de x para los cuales una serie de potencias es convergente. Evidentemente, (*1*) es convergente para $x = 0$, y (*2*) lo es para $x = a$. Cuando existan otros valores de x para los cuales las series (*1*) ó (*2*) sean convergentes, éstas lo serán, o bien para todos los valores de x, o bien para todos los valores de x pertenecientes a un intervalo finito (abierto, cerrado o semiabierto) cuyo punto medio es $x = 0$ para (*1*) y $x = a$ para (*2*).

El campo de convergencia se determina por medio del criterio del cociente de la convergencia absoluta, junto con otros criterios de los Capítulos 48 y 49 aplicados a los extremos.

(Ver Problemas 1-9.)

CONVERGENCIA Y CONVERGENCIA UNIFORME. Los teoremas que figuran a continuación se refieren a las series del tipo (*1*) que son igualmente válidos para las del tipo (*2*), una vez efectuadas en éstas ciertas transformaciones.

Consideramos la serie de potencias (*1*) y representemos por

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$$

la suma parcial m-sima, y sea

$$R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} c_k x^k = c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + c_{n+2} x^{n+2} + \cdots$$

el *resto de la serie*. En estas condiciones,

$$\sum c_i x^i = S_n(x) + R_n(x) \tag{3}$$

Si para $x = x_0$, $\Sigma c_i x^i$ converge hacia $S(x_0)$, un número finito, tendremos $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x_0) = S(x_0)$. Como $|S(x_0) - S_n(x_0)| = |R_n(x_0)|$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |S(x_0) - S_n(x_0)| = \lim\limits_{n\to+\infty} |R_n(x_0)| = 0$.

Así, pues, $\Sigma c_i x^i$ es convergente para $x = x_0$ si, dado un número positivo ϵ tan pequeño como queramos, existe un entero positivo m tal, que para todo $n > m$ se verifica: $|R_n(x_0)| < \epsilon$.

Obsérvese que m depende no solo de ϵ (ver Problema 12, Capítulo 47) sino también del valor x_0 de x. (Ver Problema 10.)

En el Problema 11 se demuestra que:

I. Si $\Sigma c_i x^i$ es convergente para $x = x_1$ y si $|x_2| < |x_1|$, la serie es absolutamente convergente para $x = x_2$.

Supongamos ahora que (*1*) es absolutamente convergente, esto es $\Sigma|c_i x^i|$ es convergente para todos los valores de x de manera que $|x| < P$. Eligiendo un valor de x, $x = p$ ó $x = -p$, siendo $|x| = p < P$, como (*1*) es convergente para $|x| = p$, se deduce que, dado un $\epsilon > 0$ tan pequeño como queramos, existirá un entero positivo m tal, que para todo $n > m$ se verifica $|R_n(p)| = \sum_{k=n}^{+\infty} |c_k p^k| < \epsilon$. Haciendo variar a x dentro del intervalo $|x| \leq p$, cualquier término de $|R_n(x)| = \sum_{k=n}^{+\infty} |c_k x^k|$ tiene su valor máximo para $|x| = p$; por tanto, $|R_n(x)|$ alcanza su valor máximo en el intervalo $|x| \leq p$ para $|x| = p$.

Por consiguiente, con estos ϵ y m se verifica que $|R_n(x)| < \epsilon$ para *todos* los valores de x que cumplan la desigualdad $|x| \leq p$, es decir, m depende de ϵ y de p pero no del valor x_0 de x perteneciente al $|x| \leq p$, como ocurre en la convergencia ordinaria. En estas condiciones, (*1*) es *uniformemente convergente* en el intervalo $|x| \leq p$. En resumen, hemos demostrado que:

II. Si $\Sigma c_i x^i$ es absolutamente convergente para $|x| < P$ lo sigue siendo para $|x| \leq p < P$.

Por ejemplo, la serie $\Sigma(-1)^i x^i$ es convergente para $|x| < 1$. Según el Teorema I, es absolutamente convergente para $|x| \leq 0{,}99$, y según el Teorema II, es uniformemente convergente para $|x| \leq 0{,}9$.

III. Una serie de potencias *representa* una función continua en el campo de convergencia de la serie. (Véase la demostración en el Problema 12.)

IV. Si $\Sigma c_i x^i$ converge hacia la función $f(x)$ en un intervalo I, y si a y b pertenecen a dicho intervalo, se verifica

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_a^b c_i x^i\,dx = \int_a^b c_0\,dx + \int_a^b c_1 x\,dx + \int_a^b c_2 x^2\,dx + \cdots + \int_a^b c_{n-1}\,x^{n-1}\,dx + \cdots$$

(Véase la demostración en el Problema 13.)

V. Si $\Sigma c_i x^i$ converge hacia $f(x)$ en un intervalo I, la integral definida $\sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^x c_i x^i\,dx$ converge hacia $g(x) = \int_0^x f(x)\,dx$ para todo valor de x *perteneciente* a dicho intervalo.

VI. Si $\Sigma c_i x^i$ converge hacia la función $f(x)$ en el intervalo I, la derivada de la serie $\sum \frac{d}{dx}(c_i x^i)$ converge hacia $f'(x)$ para todo valor de x *perteneciente* a dicho intervalo.

VII. La representación de una función $f(x)$ en serie de potencias de x es única.

Problemas resueltos

1. Determinar el campo de convergencia de $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\,1/n\,x^n + \cdots$.

Aplicando el criterio del cociente,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}\right| = |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = |x|$$

La serie es absolutamente convergente para $|x| < 1$, y divergente para $|x| > 1$. En los extremos $x = 1$ y $x = -1$, hemos de ver el carácter de la serie por separado.

Para $x = 1$, la serie es $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ que es condicionalmente convergente.

Para $x = -1$, la serie es $-(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots)$ que es divergente.

Por tanto, la serie dada es convergente en el intervalo $-1 < x \leq 1$.

2. Determinar el campo de convergencia de $1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{s_{n+1}}{s_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right| = |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

La serie dada es convergente para todos los valores de x.

3. Determinar el campo de convergencia de $\dfrac{x-2}{1} + \dfrac{(x-2)^2}{2} + \dfrac{(x-2)^3}{3} + \cdots + \dfrac{(x-2)^n}{n} + \cdots$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{(x-2)^n}\right| = |x-2|\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = |x-2|$$

La serie es absolutamente convergente para $|x-2| < 1$ ó $1 < x < 3$ y divergente para $|x-2| > 1$ o para $x < 1$ y $x > 3$.

Para $x = 1$, la serie es $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots$ y para $x = 3$, es la $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$. La primera es convergente y la segunda divergente. Por tanto, la serie dada es convergente en el intervalo $1 \le x < 3$, y divergente fuera de él.

4. Determinar el campo de convergencia de $1 + \dfrac{x-3}{1^2} + \dfrac{(x-3)^2}{2^2} + \dfrac{(x-3)^3}{3^2} + \cdots + \dfrac{(x-3)^{n-1}}{(n-1)^2} + \cdots$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-3)^n}{n^2}\cdot\frac{(n-1)^2}{(x-3)^{n-1}}\right| = |x-3|\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = |x-3|$$

La serie es absolutamente convergente para $|x-3| < 1$ o sea $2 < x < 4$, y divergente para $|x-3| > 1$ o para $x < 2$ y $x > 4$.

Para $x = 2$, la serie es $1 - 1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \cdots$; y para $x = 4$, es la $1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots$ Como ambas son absolutamente convergentes, la serie dada es absolutamente convergente en el intervalo $2 \le x \le 4$, y divergente fuera de él. Obsérvese que el primer término de la serie no corresponde al valor que toma el término general para $n = 0$.

5. Determinar el campo de convergencia de $\dfrac{x+1}{\sqrt{1}} + \dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{2}} + \dfrac{(x+1)^3}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{(x+1)^n}{\sqrt{n}} + \cdots$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{(x+1)^n}\right| = |x+1|\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = |x+1|$$

La serie es absolutamente convergente para $|x+1| < 1$ o sea $-2 < x < 0$ y divergente para $x < -2$ y $x > 0$.

Para $x = -2$, la serie es $-1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} - \cdots$ y para $x = 0$, es la $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$.

La primera es convergente y la segunda divergente (¿por qué?). Por tanto, la serie dada es convergente en el intervalo $-2 \le x < 0$ y divergente fuera de él.

6. Determinar el campo de convergencia de $1 + \dfrac{m}{1}x + \dfrac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots$.

Este es la serie binómica. Para valores enteros y positivos de m es un desarrollo finito; para los demás valores de m es una serie.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^n}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+2)x^{n-1}}\right|$$
$$= |x|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{m-n+1}{n}\right| = |x|$$

La serie es absolutamente convergente para $|x| < 1$ y divergente para $|x| > 1$.

En los extremos, $x = \pm 1$, la serie es convergente si $m \ge 0$, y divergente si $m \le -1$. Cuando $-1 < m < 0$, la serie es convergente para $x = 1$ y divergente para $x = -1$. Para demostrar estas conclusiones, se debe recurrir a teoremas que no se han incluido en el Capítulo 48.

7. Determinar el campo de convergencia de $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right| = x^2\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = x^2$$

La serie es absolutamente convergente en el intervalo $x^2 < 1$ o sea $-1 < x < 1$.

Para $x = -1$, la serie es $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \cdots$ y para $x = 1$, es la $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$. Ambas series son convergentes; por tanto, la serie dada es convergente para $-1 \le x \le 1$ y divergente fuera de él.

8. Determinar el campo de convergencia de $(x-1) + 2!\,(x-1)^2 + 3!\,(x-1)^3 + \cdots + n!\,(x-1)^n + \cdots$.

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!\,(x-1)^{n+1}}{n!\,(x-1)^n}\right| = |x-1| \lim_{n\to+\infty}(n+1) = \infty$$

La serie es convergente solo para $x = 1$.

9. Determinar el campo de convergencia de $\frac{1}{2x} + \frac{2}{4x^2} + \frac{3}{8x^3} + \cdots + \frac{n}{2^n x^n} + \cdots$. Esta es una serie en potencias de $1/x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{n+1}{2^{n+1}x^{n+1}}\cdot\frac{2^n x^n}{n}\right| = \frac{1}{2|x|}\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2|x|}$$

La serie es absolutamente convergente para $\frac{1}{2|x|} < 1$ o sea $|x| > \frac{1}{2}$.

Para $x = \frac{1}{2}$, la serie es $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots$, y para $x = -\frac{1}{2}$, es $-1 + 2 - 3 + 4 - \cdots$. Ambas series son divergentes. Por tanto, la serie dada es convergente en los intervalos $x < -\frac{1}{2}$ y $x > \frac{1}{2}$, y divergente en el intervalo $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$.

10. La serie $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$ es convergente para $|x| < 1$. Dado $\epsilon = 0{,}000001$, calcular m cuando (*a*) $x = \frac{1}{2}$ y (*b*) $x = \frac{1}{4}$ de tal forma que $|R_n(x)| < \epsilon$ para $n > m$.

$$R_n(x) = \sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k x^k \quad \text{por tanto,}$$

$$|R_n(\tfrac{1}{2})| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k(\tfrac{1}{2})^k\right| = \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2})^{n-1} \qquad \text{y} \qquad |R_n(\tfrac{1}{4})| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k(\tfrac{1}{4})^k\right| = \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{4})^{n-1}$$

(*a*) Tenemos que encontrar m de forma que para $n > m$ se verifique $\frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{n-1} < 0{,}000001$ o sea $1/2^{n-1} < 0{,}000003$. Como $1/2^{18} = 0{,}000004$ y $1/2^{19} = 0{,}000002$, $m = 19$.

(*b*) Tenemos que encontrar m de forma que para $n > m$ se verifique $\frac{1}{5}(\frac{1}{4})^{n-1} < 0{,}000001$ o sea $1/4^{n-1} < 0{,}000005$. Resulta $m = 9$.

11. Demostrar que si una serie $\Sigma c_i x^i$ es convergente para $x = x_1$ y que si $|x_2| < |x_1|$, la serie es absolutamente convergente para $x = x_2$.

Como $\Sigma c_i x_1^i$ es convergente, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n x_1^n = 0$, ver Teorema XV, Capítulo 47, y $\{|c_i x_1^i|\}$ estará acotada por ser convergente, luego $0 < |c_n x_1^n| < K$ para todos los valores de n. Supongamos $|x_2/x_1| = r$, $0 < r < 1$; tendremos

$$|c_n x_2^n| = |c_n x_1^n|\cdot|x_2^n/x_1^n| = |c_n x_1^n|\cdot|x_2/x_1|^n < Kr^n$$

y $\Sigma\,|c_n x_2^n|$, por ser término a término menor que la serie geométrica convergente ΣKr^n, es convergente. Así pues, la serie $\Sigma c_i x_2^i$ es absolutamente convergente.

12. Demostrar que una serie de potencias representa una función continua $f(x)$ en el campo de convergencia de la serie.

Sea $f(x) = \Sigma c_i x^i = S_n(x) + R_n(x)$. Para un valor cualquiera, $x = x_0$, del campo de convergencia de $\Sigma c_i x^i$ existe, según el teorema I, un intervalo I de x_0 en el cual la serie es uniformemente convergente. Para probar que $f(x)$ es continua en $x = x_0$, es necesario demostrar que $\lim\limits_{\Delta x\to 0} |f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| = 0$ con $x_0 + \Delta x$ perteneciente a I; es decir, tendremos que demostrar que, dado un ϵ tan pequeño como queramos, existe un Δx de manera que $x_0 + \Delta x$ pertenece a I y $|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Ahora bien, si Δx es tal que $x_0 + \Delta x$ pertenece a I,

$$\text{(i)} \qquad \begin{aligned} |f(x_0+\Delta x) - f(x_0)| &= |S_n(x_0+\Delta x) + R_n(x_0+\Delta x) - S_n(x_0) - R_n(x_0)| \\ &\le |S_n(x_0+\Delta x) - S_n(x_0)| + |R_n(x_0+x)| + |R_n(x_0)| \end{aligned}$$

Dado un ϵ, como $x_0 + \Delta x$ pertenece al campo de convergencia de la serie, se podrá encontrar en $m > 0$ tal que, siempre que $n > m$, se verifique $|R_n(x_0 + \Delta x)| < \epsilon/3$ y $|R_n(x_0)| < \epsilon/3$. Por otra parte, como $S_n(x)$ es un polinomio, se podrá tomar Δx, todo lo pequeño que se desee para que $|S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| < \epsilon/3$. Elegido de esta forma Δx, $|R_n(x_0 + \Delta x)|$ se mantendrá menor que $\epsilon/3$, con lo cual la serie es uniformemente convergente en I, ya que el valor de $|R_n(x_0)|$ no se altera. Así pues, por (i)

$$|f(x_0+\Delta x) - f(x_0)| < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon$$

Por consiguiente, $f(x)$ es continua para todos los valores de x pertenecientes al campo de convergencia de la serie.

13. Demostrar que si $\Sigma c_i x^i$ converge hacia la función $f(x)$ en un intervalo dado, y que si $x = a$ y $x = b$ son dos valores pertenecientes a él, se verifica

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c_0\,dx + \int_a^b c_1 x\,dx + \int_a^b c_2 x^2\,dx + \cdots + \int_a^b c_{n-1}x^{n-1}\,dx + \cdots$$

Supongamos $b > a$ y pongamos $f(x) = \Sigma c_i x^i = S_n(x) + R_n(x)$. Tendremos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b S_n(x)\,dx + \int_a^b R_n(x)\,dx$$

y

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b R_n(x)\,dx\right|$$

Como $\Sigma c_i x^i$ es convergente en un intervalo, $|x| < P$ y la serie será uniformemente convergente en $|x| \le p < P$ que contiene a $x = a$ y $x = b$. Así pues, dado un $\epsilon > 0$ tan pequeño como queramos, se puede tomar n lo suficientemente grande para que $|R_n(x)| < \dfrac{\epsilon}{b-a}$ para todos los valores de $|x| \le p$. Por tanto,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\,dx\right| < \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\,dx = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b S_n(x)\,dx\right| = 0, \quad \text{y} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \Sigma\int_a^b c_i x^i\,dx$$

como queremos demostrar.

Problemas propuestos

14. Determinar el campo de convergencia de las siguientes series:

(*a*) $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$

(*b*) $\dfrac{x}{1\cdot 2} + \dfrac{x^2}{2\cdot 3} + \dfrac{x^3}{3\cdot 4} + \dfrac{x^4}{4\cdot 5} + \cdots$

(*c*) $x - \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^3}{3^3} - \dfrac{x^4}{4^4} + \cdots$

(*d*) $\dfrac{x}{5} - \dfrac{x^2}{2\cdot 5^2} + \dfrac{x^3}{3\cdot 5^3} - \dfrac{x^4}{4\cdot 5^4} + \cdots$

(*e*) $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{x^2}{2\cdot 3\cdot 4} + \dfrac{x^4}{3\cdot 4\cdot 5} + \dfrac{x^6}{4\cdot 5\cdot 6} + \cdots$

(*f*) $\dfrac{x^2}{(\ln 2)^2} + \dfrac{x^3}{(\ln 3)^3} + \dfrac{x^4}{(\ln 4)^4} + \dfrac{x^5}{(\ln 5)^5} + \cdots$

(*g*) La serie obtenida derivando (*a*) término a término.
(*h*) La serie obtenida derivando (*b*) término a término.

(*i*) $x + \dfrac{x^2}{1+2^3} + \dfrac{x^3}{1+3^3} + \dfrac{x^4}{1+4^3} + \cdots$

(*j*) La serie obtenida derivando (*i*) término a término.
(*k*) La serie obtenida derivando (*j*) término a término.
(*l*) La serie obtenida integrando (*a*) término a término.
(*m*) La serie obtenida integrando (*c*) término a término.

(*n*) $(x-2) + \dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{(x-2)^3}{9} + \dfrac{(x-2)^4}{16} + \cdots$

(*o*) $\dfrac{x-3}{1\cdot 3} + \dfrac{(x-3)^2}{2\cdot 3^2} + \dfrac{(x-3)^3}{3\cdot 3^3} + \dfrac{(x-3)^4}{4\cdot 3^4} + \cdots$

(*p*) $1 - \dfrac{3x-2}{5} + \dfrac{(3x-2)^2}{5^2} - \dfrac{(3x-2)^3}{5^3} + \cdots$

(*q*) La serie obtenida derivando (*n*) término a término.
(*r*) La serie obtenida integrando (*n*) término a término.

(*s*) $1 + \dfrac{x}{1-x} + \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^3 + \cdots$

(*t*) $1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{4}{x^3} + \cdots$

(*u*) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{x^2+6x+7}{2^2} + \dfrac{(x^2+6x+7)^2}{2^3} + \dfrac{(x^2+6x+7)^3}{2^4} + \cdots$

Sol.
(*a*) $-1 < x < 1$
(*b*) $-1 \le x \le 1$
(*c*) todos los valores de x
(*d*) $-5 < x \le 5$
(*e*) $-1 \le x \le 1$
(*f*) todos los valores de x
(*g*) $-1 < x < 1$
(*h*) $-1 \le x < 1$
(*i*) $-1 \le x \le 1$
(*j*) $-1 \le x \le 1$
(*k*) $-1 \le x < 1$
(*l*) $-1 < x < 1$
(*m*) todos los valores de x
(*n*) $1 \le x \le 3$
(*o*) $0 \le x < 6$
(*p*) $-1 < x < 7/3$
(*q*) $1 \le x < 3$
(*r*) $1 \le x \le 3$
(*s*) $x < \frac{1}{2}$
(*t*) $x < -1$, $x > 1$
(*u*) $-5 < x < -3$, $-3 < x < -1$

15. Demostrar que una serie de potencias se puede derivar término a término dentro de su campo de convergencia.

Ind. $f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i x^i$ y $\sum_{i=0}^{+\infty} \dfrac{d}{dx}(c_i x^i) = \sum_{j=1}^{+\infty} jc_j x^{j-1}$ es convergente para $|x| < \lim_{n\to+\infty}\left|\dfrac{c_n}{c_{n+1}}\right|$. Aplicando los teoremas I, II y V demostrar $\int_0^x f'(x)\,dx = f(x)$.

16. Demostrar que la representación de una función $f(x)$ en potencias de x es única.

Ind. Sea $f(x) = \Sigma s_n x^n$ y $f(x) = \Sigma t_n x^n$ en $|x| < a \ne 0$. Hacer $x = 0$ en $\Sigma(s_n - t_n)x^n = 0$, $\dfrac{d}{dx}\Sigma(s_n - t_n)x^n = 0$, $\dfrac{d^2}{dx^2}\Sigma(s_n - t_n)x^n = 0$, $\cdots$ y obtener $s_j = t_j$, $j = 0, 1, 2, 3, \cdots$

Capítulo 52

Desarrollo en serie de potencias

UNA FUNCION se puede desarrollar en serie de potencias de x siguiendo varios procedimientos, por ejemplo, prolongando indefinidamente la división

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + \cdots \tag{1}$$

(Obsérvese que, por ejemplo, para $x = 5$ la expresión anterior conduce a un resultado absurdo. En el Problema 1 se demuestra que la serie (*1*) solo equivale a $\frac{1}{1-x}$ en el intervalo $|x| < 1$, es decir,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + \cdots, \quad -1 < x < 1$$

En los Problemas 2-3 se indican otros métodos para desarrollar una función en serie de potencias.

METODO GENERAL para obtener el desarrollo de una función en serie de potencias de x y de $(x - a)$. Para ello es necesario que tanto la función como *todas* sus derivadas estén definidas para $x = 0$ o $x = a$. Por ejemplo, las funciones $1/x$, $\ln x$, y $\cot x$, no admiten un desarrollo en serie de potencias de x.

Serie de Maclaurin. Si una función se puede representar por medio de una serie de potencias de x, ésta es necesariamente de la forma, *serie de Maclaurin,*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots \tag{2}$$

Serie de Taylor. Si una función se puede representar por medio de una serie de potencias de $(x - a)$, ésta es necesariamente de la forma, *serie de Taylor,*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \cdots \tag{3}$$

(Ver Problema 4.)

En el próximo capítulo trataremos del intervalo en el que una función $f(x)$ se puede representar por una serie de Maclaurin o una de Taylor. En las funciones consideradas en este libro, el intervalo en el que se pueden representar mediante un desarrollo en serie coincide con su campo de convergencia. (Ver Problemas 5-11.)

Otra expresión muy empleada en la serie de Taylor es

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \frac{h^3}{3!}f'''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \cdots \tag{4}$$

que se obtiene de (*3*) sin más que sustituir x por $a + h$.

Problemas resueltos

1. La serie de potencias $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-1} + \cdots$ es una serie geométrica con $a = 1$ y $r = x$. Para $|r| = |x| < 1$, la serie converge hacia $\dfrac{a}{1-r} = \dfrac{1}{1-x}$; para $|r| = |x| \geq 1$, la serie es divergente.

2. Derivando repetidamente la serie del Problema 1, obtener otras series de potencias

(i) $$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$

(ii) $$2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \cdots + n(n+1)x^{n-1} + \cdots$$

Integrando repetidamente entre los límites 0 y x la serie del Problema 1, obtenemos

(iii) $$x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + \cdots$$

(iv) $$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}x^{n+1} + \cdots$$

3. Determinar la serie de potencias $y = \Sigma c_n x^n$ que satisfaga las condiciones: **(i)** $y = 2$ para $x = 0$, **(ii)** $y' = 1$ para $x = 0$, y **(iii)** $y'' + 2y' = 0$.

Consideremos

(a) $$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots$$

(b) $$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \cdots$$

(c) $$y'' = 2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + \cdots$$

De (a) con $x = 0$, $y = 2$ obtenemos $c_0 = 2$; de (b) con $x = 0$, $y' = 1$ obtenemos $c_1 = 1$. Como $y'' = -2y'$, tendremos

$$2c_2 + 6c_3x + 12c_4x^2 + 20c_5x^3 + \cdots = -2c_1 - 4c_2x - 6c_3x^2 - 8c_4x^3 - \cdots$$

de donde se deduce que $c_2 = -c_1 = -1$, $c_3 = -\frac{2}{3}c_2 = \frac{2}{3}$, $c_4 = -\frac{1}{2}c_3 = -\frac{1}{3}$, $\cdots$. Por tanto, $y = 2 + x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 + \cdots$ es la serie pedida.

4. Suponiendo que **(i)** $f(x)$ y todas sus derivadas están definidas para $x = a$ y que **(ii)** se puede representar mediante una serie de potencias de $(x - a)$, demostrar que esta serie es

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \cdots$$

Sea la serie

(a) $$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_{n-1}(x-a)^{n-1} + \cdots$$

Derivando sucesivamente, tenemos

(b) $$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} + \cdots$$

(c) $$f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + 12c_4(x-a)^2 + 20c_5(x-a)^3 + \cdots + (n+1)nc_{n+1}(x-a)^{n-1} + \cdots$$

(d) $$f'''(x) = 6c_3 + 24c_4(x-a) + 60c_5(x-a)^2 + \cdots + (n+2)(n+1)nc_{n+2}(x-a)^{n-1} + \cdots$$

. . . .

. . . .

Haciendo $x = a$ en (a), (b), (c), $\cdots$ se deduce

$$c_0 = f(a),\ c_1 = f'(a),\ c_2 = \frac{1}{2!}f''(a),\ \ldots,\ c_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a),\ \cdots$$

Efectuando estas sustituciones en (a), obtenemos el desarrollo en serie de Taylor.

En los Problemas 5-10, obtener el desarrollo de la función en potencia de x o de $(x - a)$, según se indica, en las hipótesis de este Capítulo y determinar asimismo el campo de convergencia de las series.

5. e^{-2x}; en potencias de x.

$$\begin{array}{llll} f(x) = e^{-2x} & & f(0) = 1 \\ f'(x) = -2e^{-2x} & & f'(0) = -2 \\ f''(x) = 2^2e^{-2x} & & f''(0) = 2^2 \\ f'''(x) = -2^3e^{-2x} & & f'''(0) = -2^3 \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots \end{array}$$

De donde $$e^{-2x} = 1 - 2x + \frac{2^2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n\frac{2^n}{n!}x^n + \cdots$$

Como $$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^nx^n}\right| = |x|\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n+1} = 0$$

la serie es convergente para todos los valores de x.

6. sen x; en potencias de x.

$$\begin{array}{llll} f(x) = \operatorname{sen} x & & f(0) = 0 \\ f'(x) = \cos x & & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\operatorname{sen} x & & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -\cos x & & f'''(0) = -1 \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots \end{array}$$

Los valores de las derivadas para $x = 0$ forman ciclos de 0, 1, 0, -1; por tanto,

$$\operatorname{sen} x = 0 + 1x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

Como $$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}}\right| = x^2\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n(2n+1)} = 0$$

la serie es convergente para todos los valores de x.

7. $\ln(1 + x)$; en potencias de x.

$$\begin{array}{llll} f(x) = \ln(1+x) & & f(0) = 0 \\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x} & & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} & & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \dfrac{1\cdot 2}{(1+x)^3} & & f'''(0) = 2! \\ f^{iv}(x) = -\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4} & & f^{iv}(0) = -3! \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots \end{array}$$

Por tanto $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + 2!\frac{x^3}{3!} - 3!\frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + \cdots$$

Según el Problema 1, Capítulo 51, la serie es convergente en el intervalo $-1 < x \leq 1$.

8. arc tag x; en potencias de x.

$$\begin{array}{lll} f(x) = \text{arc tag } x & & f(0) = 0 \\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots & & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -2x + 4x^3 - 6x^5 + \cdots & & f''(0) = 0 \\ f'''(x) = -2 + 12x^2 - 30x^4 + \cdots & & f'''(0) = -2! \\ f^{iv}(x) = 24x - 120x^3 + \cdots & & f^{iv}(0) = 0 \\ f^{v}(x) = 24 - 360x^2 + \cdots & & f^{v}(0) = 4! \\ f^{vi}(x) = -720x + \cdots & & f^{vi}(0) = 0 \\ f^{vii}(x) = -720 + \cdots & & f^{vii}(0) = -6! \end{array}$$

$$\text{arc tag } x = x - \frac{2!}{3!}x^3 + \frac{4!}{5!}x^5 - \frac{6!}{7!}x^7 + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$$

Según el Problema 7, Capítulo 51, el campo de convergencia es $-1 \le x \le 1$.

9. $e^{x/2}$; en potencias de $x - 2$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = e^{x/2} & f(2) = e \\ f'(x) = \frac{1}{2}e^{x/2} & f'(2) = \frac{1}{2}e \\ f''(x) = \frac{1}{4}e^{x/2} & f''(x) = \frac{1}{4}e \end{array}$$

$$e^{x/2} = e\left\{1 + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}\frac{(x-2)^2}{2!} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{(x-2)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots\right\}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-2)^n}{2^n n!}\cdot\frac{2^{n-1}(n-1)!}{(x-2)^{n-1}}\right| = \frac{1}{2}|x-2|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$$

La serie es convergente para todos los valores de x.

10. $\ln x$; en potencias de $x - 2$.

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln x & f(2) = \ln 2 \\ f'(x) = x^{-1} & f'(2) = \frac{1}{2} \\ f''(x) = -x^{-2} & f''(2) = -\frac{1}{4} \\ f'''(x) = 2x^{-3} & f'''(2) = \frac{1}{4} \\ f^{iv}(x) = -6x^{-4} & f^{iv}(2) = -\frac{3}{8} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

$$\ln x = \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{4}\frac{(x-2)^2}{2!} + \frac{1}{4}\frac{(x-2)^3}{3!} - \frac{3}{8}\frac{(x-2)^4}{4!} + \cdots$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 - \frac{1}{64}(x-2)^4 + \cdots$$

Como $$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)}\cdot\frac{2^n n}{(x-2)^n}\right| = \frac{1}{2}|x-2|\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{1}{2}|x-2|$$

la serie es convergente para $|x-2| < 2$ o sea $0 < x < 4$.

Para $x = 0$, la serie es $\ln 2$ — (serie armónica) que es divergente; para $x = 4$, la serie es $\ln 2 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ que es convergente. Por tanto, la serie es convergente en el intervalo $0 < x \le 4$.

11. Desarrollar en serie de Maclaurin la función $\sqrt{1 + \text{sen } x} = \text{sen } \frac{1}{2}x + \cos \frac{1}{2}x$.

Sustituyendo x por $\frac{1}{2}x$ en el desarrollo de sen x (Problema 6) obtenemos

$$\text{sen } \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x - \frac{x^3}{2^3\cdot 3!} + \frac{x^5}{2^5\cdot 5!} - \frac{x^7}{2^7\cdot 5!} + \cdots$$

Derivando este desarrollo, obtenemos

$$\cos\frac{1}{2}x = 2\left\{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2^3\cdot 2!} + \frac{x^4}{2^5\cdot 4!} - \frac{x^6}{2^7\cdot 6!} + \cdots\right\}$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2^2\cdot 2!} + \frac{x^4}{2^4\cdot 4!} - \frac{x^6}{2^6\cdot 6!} + \cdots$$

Por tanto,

$$\sqrt{1+\operatorname{sen} x} = \operatorname{sen}\frac{1}{2}x + \cos\frac{1}{2}x = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^2\cdot 2!} - \frac{x^3}{2^3\cdot 3!} + \frac{x^4}{2^4\cdot 4!} + \frac{x^5}{2^5\cdot 5!} - \cdots,$$

todos los valores de x.

12. Obtener el desarrollo de Maclaurin de $e^{\cos x} = e\cdot e^{(\cos x - 1)}$.

Aplicando $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots$ y $u = \cos x - 1 = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$, llegamos a

$$e^{\cos x} = e\left\{1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^4}{(2!)^2} - \frac{2x^6}{2!4!} + \cdots\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{3!}\left(-\frac{x^6}{(2!)^3} + \cdots\right) + \cdots\right\}$$
$$= e\left\{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{31}{720}x^6 + \cdots\right\}$$

13. En el supuesto de que todas las operaciones necesarias sean válidas, demostrar que (*a*) $e^{ix} = \cos x + i\operatorname{sen} x$, (*b*) $e^{-ix} = \cos x - i\operatorname{sen} x$, (*c*) $\operatorname{sen} x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$, (*d*) $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$, siendo $i = \sqrt{-1}$.

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

(*a*) $e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \cdots$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) = \cos x + i\operatorname{sen} x$$

(*b*) $e^{-ix} = \cos(-x) + i\operatorname{sen}(-x) = \cos x - i\operatorname{sen} x$.

(*c*) $e^{ix} - e^{-ix} = 2i\operatorname{sen} x$; luego, $\operatorname{sen} x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$.

(*d*) $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$; luego, $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$.

Problemas propuestos

14. Demostrar que (*a*) Las series (i) y (ii) del Problema 2 son convergentes para $|x| < 1$; (*b*) (iii) convergentes para $-1 \le x < 1$; (*c*) (iv) convergentes para $-1 \le x \le 1$.

15. Demostrar que (*a*) La serie obtenida sumando las (i) y (ii) del Problema 2 son convergentes para $|x| < 1$; (*b*) la obtenida sumando las (iii) y (iv) son convergentes para $-1 \le x < 1$.

16. Determinar la serie de potencias $y = \Sigma c_n x^n$ que satisface las condiciones (i) $y = 2$ para $x = 0$, (ii) $y' = 0$ para $x = 0$, y (iii) $y'' - y = 0$. *Sol.* $y = 2 + x^2 + \frac{x^4}{12} + \cdots + \frac{2x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$.

17. Determinar la serie de potencias $y = \Sigma c_n x^n$ que satisface las condiciones (i) $y = 1$ para $x = 0$, (ii) $y' = 1$ para $x = 0$, y (iii) $y'' + y = 0$. *Sol.* $y = 1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$

18. Obtener los desarrollos en serie de Maclaurin:

(*a*) $\cos^2 x = 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots,$ para todos los valores de x

(*b*) $\sec x = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \cdots, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

(*c*) $\operatorname{tag} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

(*d*) $\operatorname{arc\,sen} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \cdots, \quad -1 < x < 1$

(*e*) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots,$ para todos los valores de x

19. Obtener los desarrollos en serie de Taylor:

(*a*) $e^x = e^a\left[1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots\right],$ para todos los valores de x

(*b*) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a + (x-a)\cos a - \frac{(x-a)^2}{2!}\operatorname{sen} a - \frac{(x-a)^3}{3!}\cos a + \cdots,$ para todos los valores de x

(*c*) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - (x - \frac{1}{4}\pi) - \frac{(x-\frac{1}{4}\pi)^2}{2!} + \frac{(x-\frac{1}{4}\pi)^3}{3!} + \cdots\right],$ para todos los valores de x

20. Obtener el desarrollo en serie de $\cos x$ derivando el correspondiente a $\operatorname{sen} x$ (Problema 6). Identificar la solución del Problema 17 con la función $y = \operatorname{sen} x + \cos x$.

21. Obtener el desarrollo en serie de e^{-x}, sustituyendo x por $\frac{1}{2}x$ en el correspondiente a e^{-2x} (Problema 5). Sustituir, luego x por $-x$ para obtener el desarrollo de e^x e identificar la solución del Problema 16 con la función $y = e^x + e^{-x}$.

22. Obtener el desarrollo en serie de Maclaurin de $\operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2 = x^2 - \frac{2x^4}{3!} + \frac{32x^6}{3!\,5!} - \frac{96x^8}{3!\,7!} + \cdots$, para todos los valores de x.

23. Demostrar que $\int_0^x e^{-y^2}\,dy = x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \cdots,$ para todos los valores de x.

24. Obtener por división el desarrollo en serie de $\frac{1}{1+x^2}$; con lo cual

$$\operatorname{arc\,tag} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$$

y comparar con el Problema 8.

25. Aplicando el binomio de Newton obtener $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots;$ con lo cual

$$\operatorname{arc\,sen} x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \cdots$$

26. Obtener por multiplicación de los correspondientes desarrollos en serie:

(*a*) $e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + \cdots$ (*b*) $e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30} + \cdots$

27. Obtener $\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - x^2/2! + x^4/4! - \cdots} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$. Quitar denominadores en la última igualdad e identificar los coeficientes de igual potencia de x para obtener el desarrollo de $\sec x$.

Capítulo 53

Fórmulas de Maclaurin y Taylor con restos

FORMULA DE MACLAURIN. Si $f(x)$ y sus n primeras derivadas son continuas en un intervalo que contiene al punto $x = 0$, existen dos números, x_0 y x_0^* comprendidos entre 0 y x, de manera que

$$f(x) \;=\; f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x)$$

siendo

$$R_n(x) \;=\; \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n, \qquad \text{(Resto de Lagrange)}$$

o bien

$$R_n(x) \;=\; \frac{f^{(n)}(x_0^*)}{(n-1)!}(x - x_0^*)^{n-1}x, \qquad \text{(Resto de Cauchy)}$$

FORMULA DE TAYLOR. Si $f(x)$ y sus n primeras derivadas son continuas en un intervalo que contiene al punto $x = a$, existen dos números, x_0 y x_0^*, comprendidos entre a y x, de manera que

$$f(x) \;=\; f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x)$$

siendo

$$R_n(x) \;=\; \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-a)^n, \qquad \text{(Resto de Lagrange)}$$

o bien

$$R_n(x) \;=\; \frac{f^{(n)}(x_0^*)}{(n-1)!}(x - x_0^*)^{n-1}(x-a), \qquad \text{(Resto de Cauchy)}$$

La fórmula de Maclaurin es un caso particular ($a = 0$) de la fórmula de Taylor. La fórmula dê Taylor, con el resto de Lagrange, no es más que una variante del teorema del valor medio generalizado (ver Capítulo 21). En el Problema 10 se deduce la fórmula con el resto de Cauchy.

Los desarrollos en serie de Maclaurin y Taylor de las funciones $f(x)$ obtenidos en el Capítulo 52 representan a dichas funciones únicamente para aquellos valores de x que hagan

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) \;=\; 0$$

PRINCIPALES DESARROLLOS EN SERIE. A continuación se exponen los desarrollos en serie, junto con los intervalos en los que son válidos, de las funciones más empleadas en el análisis matemático.

$$e^{ax} \;=\; 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^3}{3!} + \cdots + \frac{(ax)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \qquad \text{Para todos los valores de } x.$$

$$\operatorname{sen} ax \;=\; ax - \frac{(ax)^3}{3!} + \frac{(ax)^5}{5!} - \frac{(ax)^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(ax)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots \qquad \text{Para todos los valores de } x.$$

$$\cos ax \;=\; 1 - \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^4}{4!} - \cancel{\frac{(ax)^6}{6!}} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(ax)^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots \qquad \text{Para todos los valores de } x.$$

$$\ln(a+x) \;=\; \ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{na^n} + \cdots \qquad -a < x \leq a.$$

$$\operatorname{arc\,sen} x \;=\; x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)x^{2n-1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)(2n-1)} + \cdots \qquad -1 \leq x \leq 1$$

$$\text{arc tag } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots \qquad -1 \leq x \leq 1$$

$$\ln x = \ln a + \frac{1}{a}(x-a) - \frac{1}{2a^2}(x-a)^2 + \frac{1}{3a^3}(x-a)^3 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(n-1)a^{n-1}}(x-a)^{n-1} + \cdots$$

$$0 < x \leq 2a$$

$$e^x = e^a\left\{1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots\right\} \qquad \text{Para todos los valores de } x.$$

$$\text{sen } x = \text{sen } a + (x-a)\cos a - \frac{(x-a)^2}{2!}\text{sen } a - \frac{(x-a)^3}{3!}\cos a + \cdots \qquad \text{Para todos los valores de } x.$$

$$\cos x = \cos a - (x-a)\,\text{sen } a - \frac{(x-a)^2}{2!}\cos a + \frac{(x-a)^3}{3!}\text{sen } a + \cdots \qquad \text{Para todos los valores de } x.$$

Problemas resueltos

1. Determinar el intervalo en el que es válido el desarrollo de e^x en serie de Maclaurin.

$f^{(n)}(x) = e^x$; el resto de Lagrange es $|R_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n}f^{(n)}(x_0)\right| = \frac{|x^n|}{n!}e^{x_0}$, siendo x_0 un valor comprendido entre 0 y x.

El factor $\frac{x^n}{n!}$ es el término general de $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ que, sabemos, es convergente para todos los valores de x. Por tanto $\lim_{n\to+\infty} \frac{|x^n|}{n!} = 0$. Como el factor e^{x_0} es finito e independiente del valor x, $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$ (número finito). En consecuencia, el desarrollo de e^x es válido para todos los valores de x.

2. Determinar el intervalo en el que es válido el desarrollo en serie de Maclaurin de la función sen x.

Sin tener en cuenta el signo $f^{(n)}(x) = \text{sen } x$ o $\cos x$, y $|R_n(x)| = \frac{|x^n|}{n!}|\text{sen } x_0|$, o bien, $\frac{|x^n|}{n!}$ cos $x_0|$, siendo x_0 un valor comprendido entre 0 y x.

Ahora bien, $\frac{x^n}{n!} \to 0$ cuando $n \to +\infty$. (Problema 1) y $|\text{sen } x_0|$ y $|\cos x_0|$ no pueden ser mayores que 1, con lo que $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$. Por tanto, el desarrollo es válido para todos los valores de x.

3. Determinar el intervalo en el cual cos x se puede representar por el desarrollo de Taylor en serie de potencias de $(x - a)$.

Aplicando el resto de Lagrange, $|R_n(x)| = \frac{|(x-a)^n|}{n!}|\text{sen } x_0|$, o bien, $\frac{|(x-a)^n|}{n!}|\cos x_0|$, en donde x_0 está comprendido entre a y x.

Como $\frac{|(x-a^n)|}{n!} \to 0$ para $n \to +\infty$, y además $|\text{sen } x_0|$ y $|\cos x_0|$ son inferiores a la unidad, $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$, con lo que la serie representa cos x para todos los valores de x.

4. Determinar el intervalo en el que es válido el desarrollo en serie de Maclaurin de la función $\ln(1 + x)$.

En este caso $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$: siendo x_0 y x_0^* valores comprendidos entre 0 y x.

(*a*) el resto de Lagrange es

$$R_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x_0)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1+x_0}\right)^n \qquad \text{y}$$

(*b*) el resto de Cauchy es

$$R_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{(x-x_0^*)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x_0^*)^n}x = (-1)^{n-1}\frac{x(x-x_0^*)^{n-1}}{(1+x_0^*)^n}$$

Cuando $0 < x_0 < x \leq 1$, $0 < x < 1 + x_0$ y $\frac{x}{1+x_0} < 1$; aplicando (*a*),

$$|R_n(x)| = \frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+x_0}\right)^n < \frac{1}{n} \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$$

Cuando $-1 < x < x_0^* < 0$, tendremos $0 < 1 + x < 1 + x_0^*$ y $\frac{1}{1+x_0^*} < \frac{1}{1+x}$. Aplicando (*b*),

$$|R_n(x)| = \frac{|x-x_0^*|^{n-1}}{(1+x_0^*)^n}|x| = \left|\frac{x_0^*-x}{1+x_0^*}\right|^{n-1} \cdot \frac{|x|}{1+x_0^*} = \left(\frac{x_0^*+|x|}{1+x_0^*}\right)^{n-1} \cdot \frac{|x|}{1+x_0^*} < \left(\frac{x_0^*+|x|}{1+x_0^*}\right)^{n-1} \cdot \frac{|x|}{1+x}$$

Ahora bien, como $1 > |x|$, $x_0^* < x_0^*|x|$, $x_0^* + |x| < |x| + x_0^*|x|$ y $\frac{x_0^*+|x|}{1+x_0^*} < |x|$. Tendremos,

$$|R_n(x)| < \frac{|x|^n}{1+x} \quad \text{y} \quad \lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$$

Por tanto, el desarrollo en serie de Maclaurin de $\ln(1+x)$ es válido en el intervalo $-1 < x \leq 1$.

5. En el desarrollo en serie de Maclaurin de e^x, demostrar

$$|R_n(x)| < \frac{|x^n|}{n!} \text{ para } x < 0 \quad \text{y} \quad R_n(x) < \frac{x^n e^x}{n!} \text{ para } x > 0$$

Del Problema 1, $R_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{x_0}$, siendo x_0 un valor comprendido entre 0 y x. Para $x < 0$, $e^{x_0} < 1$; luego $|R_n(x)| < \frac{|x^n|}{n!}$. Para $x > 0$, $e^{x_0} < e^x$; luego, $R_n(x) < \frac{x^n e^x}{n!}$.

6. En el desarrollo en serie de Maclaurin de $\ln(1+x)$, demostrar

$$R_n(x) < \frac{x^n}{n} \text{ para } 0 < x \leq 1 \quad \text{y} \quad |R_n(x)| < \frac{|x^n|}{n(1+x)^n} \text{ para } -1 < x < 0$$

del Problema 4(*a*), $|R_n(x)| = \frac{1}{n}\left|\frac{x}{1+x_0}\right|^n$, siendo x_0 un valor comprendido entre 0 y x. Para $0 < x_0 < x \leq 1$, $\frac{1}{1+x_0} < 1$; luego, $|R_n(x)| < \frac{x^n}{n}$ Para $-1 < x < x_0 < 0$, $1+x_0 > 1+x$ y. $\frac{1}{1+x_0} < \frac{1}{1+x}$; luego, $|R_n(x)| < \frac{|x^n|}{n(1+x)^n}$.

Problemas propuestos

7. Determinar el intervalo en el que es válido el desarrollo en serie de Maclaurin de la función $\cos x$.
Sol. Para todos los valores de x.

8. Determinar los intervalos en los cuales (*a*) e^x y (*b*) sen x se pueden representar mediante una serie de Taylor en potencias de $(x-a)$. *Sol.* Para todos los valores de x.

9. Demostrar que $\ln x$ se puede desarrollar en serie de Taylor de potencias de $(x-a)$ en el intervalo $0 < x \leq 2a$.

Ind. $|R_n(x)| = \left|\frac{(x-a)(x-x_0^*)^{n-1}}{(x_0^*)^n}\right|$. Para $0 < x < a$ y para $a < x \leq 2a$, $\left|\frac{x-x_0^*}{x_0^*}\right| < 1$.

10. Supongamos que T viene definido por

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + T(b-a)$$

y sea

$$F(x) = -f(b) + f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(b-x) + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + T(b-x)$$

Razonando como se hizo en el Problema 15 del Capítulo 21, obtener la fórmula de Taylor con el resto del Cauchy.

11. (*a*) Haciendo $x_0^* = a + \theta(x-a)$, siendo $0 < \theta < 1$, en la fórmula de Taylor con el resto de Cauchy, demostrar

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}[a+\theta(x-a)]}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}(x-a)^n$$

(*b*) Demostrar que $R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\theta x)}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1}x^n$ en la fórmula de Maclaurin.

12. Demostrar que $\frac{1}{1-x}$ se puede representar por su serie de Maclaurin en el intervalo $-1 \leq x < 1$.

Ind. Del Problema 11 (*b*), $R_n(x) = \frac{n(1-\theta)^{n-1}x^n}{(1-\theta x)^{n+1}}$, $0 < \theta < 1$. Para $|x| < 1$, $\frac{1-\theta}{1-\theta x} < 1$ y $1-\theta x > 1-|x|$.

13. (*a*) Demostrar que $xe^x = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{n}{n!}x^n$, para todos los valores de x, y $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{n}{n!} = e$; ídem, $(x^2+x)e^x = \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$ y $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n!} = 2e$. (*b*) Obtener $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{n^3}{n!} = 5e$ y $\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{n^4}{n!} = 15e$.

Capítulo 54

Cálculos con series de potencias

LAS SERIES DE POTENCIAS se emplean, con frecuencia, en la realización de tablas de logaritmos de funciones trigonométricas y en diversos cálculos como los que vamos a considerar.

Cuando se toma como valor de una función la suma de los n primeros términos de su desarrollo en serie de potencias para un valor dado de la variable es necesario conocer el error que se comete al efectuar dicha aproximación. Para ello se aplican los teoremas siguientes:

1. Si el desarrollo de la función $f(x)$ está formado por una serie alternada y $x = \xi$ es un valor de su campo de convergencia, el error que se comete al tomar como valor de $f(\xi)$ la suma de los n primeros términos de la serie es menor que el valor numérico del primer término despreciado.

2. Si el desarrollo de la función $f(x)$ está formado por una serie de Taylor y $x = \xi$ es un valor de su campo de convergencia, el error que se comete al tomar como valor de $f(\xi)$ la suma de los n primeros términos de la serie es menor que $\dfrac{M}{n!}\,|x - a|^n$, siendo M igual o mayor que el máximo valor de $|f^{(n)}(x)|$ en el intervalo desde a hasta ξ.

Para una serie de Maclaurin, $a = 0$.

Problemas resueltos

1. Hallar el valor de $1/e$ con cinco cifras decimales:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots$$

$$\begin{aligned} e^{-1} &= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots \\ &= 1 - 1 + 0{,}500000 - 0{,}166667 + 0{,}041667 - 0{,}008333 + 0{,}001389 \\ &\qquad - 0{,}000198 + 0{,}000025 - 0{,}000003 + \cdots \\ &= 0{,}36788 \end{aligned}$$

2. Hallar el valor de sen 62° con cinco cifras decimales.

La serie de Taylor en potencias de $(x - a)$ es

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a + (x - a)\cos a - \frac{(x-a)^2}{2!}\operatorname{sen} a - \frac{(x-a)^3}{3!}\cos a + \cdots$$

Tomamos $a = 60°$, ya que es próxima a 62° y sus funciones trigonométricas son conocidas. Tendremos

$$x - a = 62° - 60° = 2° = \pi/90 = 0{,}034907$$

y

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 62° &= \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}(0{,}034907) - \tfrac{1}{4}\sqrt{3}(0{,}034907)^2 - \tfrac{1}{12}(0{,}034907)^3 + \cdots \\ &= 0{,}866025 + 0{,}017454 - 0{,}000528 - 0{,}000004 + \cdots = 0{,}88295 \end{aligned}$$

3. Hallar el valor de ln 0,97 con siete cifras decimales.

$$\ln(a - x) = \ln a - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \cdots - \frac{x^n}{na^n} - \cdots$$

Tomamos $a = 1$ y $x = 0{,}03$; por tanto

$$\ln 0{,}97 = -0{,}03 - \tfrac{1}{2}(0{,}03)^2 - \tfrac{1}{3}(0{,}03)^3 - \tfrac{1}{4}(0{,}03)^4 - \tfrac{1}{5}(0{,}03)^5 - \cdots = -0{,}0304592$$

4. Determinar el número de términos del desarrollo en serie de $\ln(1+x)$ que hay que tomar para que el error cometido al hallar el $\ln 1{,}02$ sea menor que 0,00000005.

$$\ln 1{,}02 = 0{,}02 - \frac{(0{,}02)^2}{2} + \frac{(0{,}02)^3}{3} - \frac{(0{,}02)^4}{4} + \cdots$$

Como se trata de una serie alternada, el error cometido al despreciar todos los términos posteriores al que ocupa el lugar n es menor que el valor numérico del primero que se desprecia. Por tanto, todo consiste en buscar qué término del desarrollo tiene un valor numérico menor que 0,00000005. Se hace por tanteos.

$$\frac{(0{,}02)^3}{3} = 0{,}0000027 \quad \text{y} \quad \frac{(0{,}02)^4}{4} = 0{,}00000004$$

Por consiguiente, habrá que tomar 3 términos para obtener la precisión requerida.

5. Determinar el valor de x para el cual $\operatorname{sen} x$ se puede sustituir por x con un error menor que 0,0005.

$\operatorname{sen} x = x - x^3/3! + \cdots$ es una serie alternada. El error que se comete al tomar solamente los dos primeros términos es menor que $|x^3|/3!$ Para que $|x^3|/3! = 0{,}0005$ debe ser $|x^3| = 0{,}003$ ó sea $|x| = 0{,}1442$; es decir, $|x| < 8°15'$.

6. Hallar entre qué valores debe estar comprendido un ángulo para que el valor de $\cos x$, calculado con los tres primeros términos del desarrollo en serie de Taylor en potencias de $(x - \pi/3)$, venga dado con un error menor que 0,00005.

Como $f'''(x) = \operatorname{sen} x$, $|R_3| = \dfrac{|\operatorname{sen} x_0|}{3!}|x - \pi/3|^3$, siendo x_0 un valor comprendido entre $\pi/3$ y x.

Como $|\operatorname{sen} x_0| \le 1$, $|R_3| \le \frac{1}{6}|x - \pi/3|^3 = 0{,}00005$.

Por tanto $|x - \pi/3| \le \sqrt[3]{0{,}0003} = 0{,}0669 = 3°50'$. Por tanto, x debe estar comprendido entre $56°10'$ y $63°50'$.

7. La Fig. 54-1 representa un arco de circunferencia terrestre de 160 kilómetros de longitud. Hallar la flecha o separación máxima entre la cuerda y el arco.

Sea x la flecha pedida. Tendremos, $x = OB - OA = R - R\cos\alpha$, siendo R el radio de la Tierra. Como el ángulo α es pequeño, aproximadamente, $\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}x^2$, y

$$x = R\{1 - (1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2)\} = \tfrac{1}{2}R\alpha^2 = (R\alpha)^2/2R = (80)^2/2R$$

Tomando $R = 6\,400$ kilómetros, $x = \frac{1}{2}$ kilómetro.

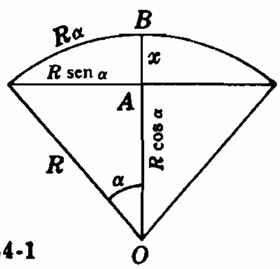

Fig. 54-1

8. Deducir la fórmula aproximada $\operatorname{sen}(\frac{1}{4}\pi + x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + x)$ y aplicarla para calcular sen 43°.

Tomando los dos primeros términos del desarrollo de Taylor, tenemos

$$\operatorname{sen}(\tfrac{1}{4}\pi + x) = \operatorname{sen}\tfrac{1}{4}\pi + x\cos\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1 + x)$$

$$\operatorname{sen} 43° = \operatorname{sen}[\tfrac{1}{4}\pi + (-\pi/90)] \doteq \tfrac{1}{2}\sqrt{2}(1 - 0{,}0349) = 0{,}6824$$

9. Resolver la ecuación $\cos x - 2x^2 = 0$.

Sustituyendo x por sus dos primeros términos $1 - \frac{1}{2}x^2$ de la serie de Maclaurin, tenemos

$$1 - \tfrac{1}{2}x^2 - 2x^2 = 0 \quad \text{ó} \quad 2 - 5x^2 = 0$$

Las raíces son $\pm\sqrt{10}/5 = \pm 0{,}632$. Las raíces obtenidas aplicando el método de Newton son $\pm 0{,}635$.

10. Hallar mediante un desarrollo en serie de potencias $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots\right) - \left(1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots\right)}{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x + 2x^3/3! + \cdots}{x - x^3/3! + \cdots} = \lim_{x\to 0}\frac{2 + x^2/3 + \cdots}{1 - x^2/6 + \cdots} = 2$$

11. Desarrollar $f(x) = x^4 - 11x^3 + 43x^2 - 60x + 14$ en potencias de $(x-3)$ y calcular $\int_3^{3,2} f(x)\,dx$.

$f(3) = 5,\ f'(3) = 9,\ f''(3) = -4,\ f'''(3) = 6,\ f^{iv}(3) = 24.$ Luego,

$$f(x) = 5 + 9(x-3) - 2(x-3)^2 + (x-3)^3 + (x-3)^4$$

$$\int_3^{3,2} f(x)\,dx = 5x + \tfrac{9}{2}(x-3)^2 - \tfrac{2}{3}(x-3)^3 + \tfrac{1}{4}(x-3)^4 + \tfrac{1}{5}(x-3)^5 \Big|_3^{3,2} = 1{,}185$$

12. Hallar $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$.

La dificultad de esta integral reside en que la integral $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ no se puede expresar por medio de funciones elementales. Sin embargo,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\right)dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \cdots \Big|_0^1 = 0{,}946083$$

El error cometido al tomar sólo cuatro términos es $\leq \frac{1}{9\cdot 9!} = 0{,}0000003$.

Problemas propuestos

13. Hallar con cuatro cifras decimales:
(*a*) $e^{-2} = 0{,}1353$, (*b*) sen $32° = 0{,}5299$, (*c*) cos $36° = 0{,}8090$, (*d*) tag $31° = 0{,}6009$.

14. Hallar los valores de x para los cuales
(*a*) e^x se puede sustituir por $1 + x + \frac{1}{2}x^2$ con un error menor que 0,0005
(*b*) $\cos x$ se puede sustituir por $1 - \frac{1}{2}x^2$ con un error menor que 0,0005
(*c*) $\operatorname{sen} x$ se puede sustituir por $x - x^3/6 + x^5/120$ con un error menor que 0,00005
Sol. (*a*) $|x| < 0{,}1$, (*b*) $|x| < 18°57'$, (*c*) $|x| < 47°$

15. Hallar mediante un desarrollo en serie de potencias:

$$(a)\ \lim_{x\to 0} \frac{e - e^{\cos x}}{x^2} = \frac{1}{2}e, \quad (b)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\operatorname{sen} x}}{x^3} = \frac{1}{6}, \quad (c)\ \lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{\operatorname{senh} x - \operatorname{sen} x} = \infty.$$

16. Hallar:

$$(a)\ \int_0^{\pi/2} (1 - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\phi)^{-1/2}\,d\phi = 1{,}854, \quad (b)\ \int_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx = 0{,}76355, \quad (c)\ \int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4} = 0{,}4940.$$

17. Hallar la longitud de la curva $y = x^3/3$ desde $x = 0$ a $x = 0{,}5$. *Sol.* 0,5031

18. Hallar el área limitada por la curva $y = \operatorname{sen} x^2$ desde $x = 0$ a $x = 1$. *Sol.* 0,3103

Capítulo 55

Integración aproximada

UN VALOR APROXIMADO de la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ se obtiene aplicando las fórmulas que veremos a continuación, o bien por medio de integradores mecánicos. Los procedimientos de integración aproximada se emplean cuando la integración ordinaria sea muy complicada, cuando una integral indefinida no se pueda expresar mediante funciones elementales, o bien, cuando el integrando $f(x)$ venga definido por una tabla de valores.

En el Capítulo 34 hemos obtenido un valor aproximado de $\int_a^b f(x)\,dx$ dado por la suma $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x$. Para obtener S_n se interpretó la integral definida como un área, la cual se dividía en n franjas y se aproximaba el área de cada una de ellas a un rectángulo efectuándose, a continuación, la suma correspondiente a todos ellos. Las fórmulas que veremos seguidamente solo difieren en la manera en que se tomen los valores aproximados de las franjas.

FORMULA DE LOS TRAPECIOS. Sea el área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las ordenadas en los extremos $x = a$ y $x = b$. Dividamos dicha área en n franjas verticales de anchura $h = (b - a)/n$ (Fig. 55-1) y consideremos la franja i limitada por el arco $P_{i-1}P_i$ de $y = f(x)$. Un valor aproximado del área de esta franja es

$$\tfrac{1}{2}h\{f[a + (i-1)h] + f(a+ih)\}$$

que es el área del trapecio que resulta al sustituir el arco $P_{i-1}P_i$ por el segmento rectilíneo $P_{i-1}P_i$. Al efectuar esta sustitución en todas las franjas (el símbolo $\approx$ se debe leer «aproximadamente igual»),

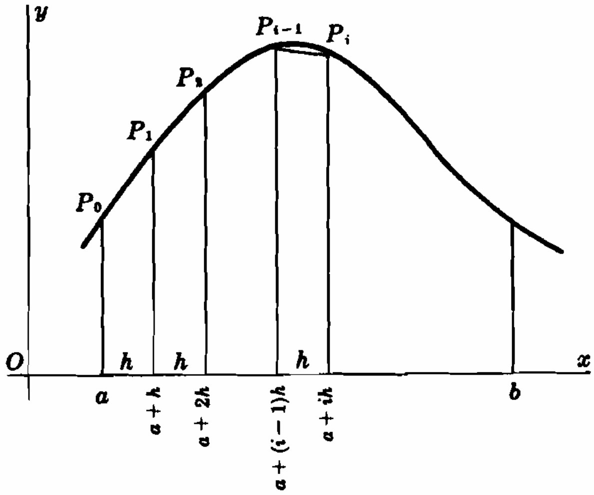

Fig. 55-1

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\{f(a) + f(a+h)\} + \frac{h}{2}\{f(a+h) + f(a+2h)\} + \cdots + \frac{h}{2}\{f[a+(n-1)h] + f(b)\}$$

o sea

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\{f(a) + 2f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 2f[a+(n-1)h] + f(b)\} \qquad (1)$$

FORMULA DEL PRISMATOIDE. Dividamos el área definida por la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ en dos franjas verticales de anchura $h = \frac{1}{2}(b - a)$ y sustituyamos el arco $P_0P_1P_2$ de la curva $y = f(x)$ por el arco de parábola $y = Ax^2 + Bx + C$ que pasa por los puntos P_0, P_1, P_2, como se representa en la Fig. 55-2. Como se demuestra en el Problema 1, se llega, después de efectuar algunos cambios en la notación, a

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left\{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right\} \qquad (2)$$

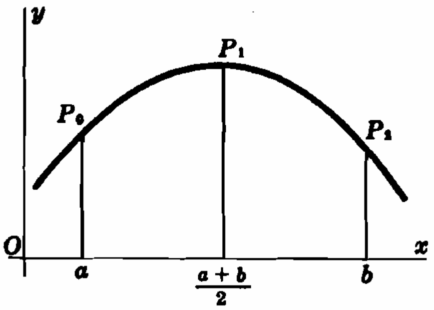

Fig. 55-2

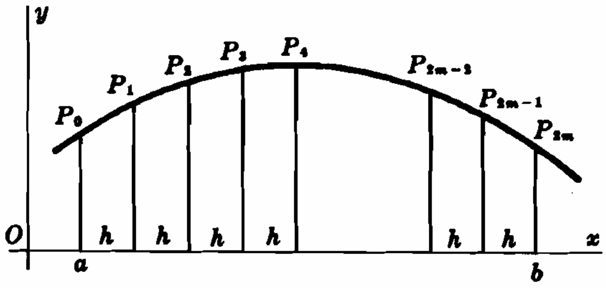

Fig. 55-3

FORMULA DE SIMPSON. Supongamos que el área que se trata de hallar la dividimos en $n = 2m$ franjas de anchura $h = (b - a)/n$, como indica la Fig. 55-3. Aplicando la fórmula del prismatoide para hallar el valor aproximado del área limitada por cada uno de los arcos $P_0P_1P_2$, $P_2P_3P_4$, . . ., $P_{2m-2}\,P_{2m-1}\,P_{2m}$, tendremos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\{f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) \qquad (S)$$
$$+ \cdots + 2f[a+(2m-2)h] + 4f[a+(2m-1)h] + f(b)\}$$

INTEGRACION MEDIANTE UN DESARROLLO EN SERIE DE POTENCIAS. Este procedimiento consiste en sustituir el integrando por los n primeros términos de su desarrollo en serie de Maclaurin o de Taylor. El método se puede aplicar siempre que el integrando admita un desarrollo de aquel tipo y los límites de integración pertenezcan al campo de convergencia de la serie . (Ver Capítulo 54.)

Problemas resueltos

1. Dada la parábola $y = Ax^2 + Bx + C$, que pasa por los puntos $P_0(\xi, y_0)$, $P_1\left(\frac{\xi+\eta}{2}, y_1\right)$, y $P_2(\eta, y_2)$, como indica la Fig. 55-4, demostrar que $\int_\xi^\eta y\,dx = \frac{\eta-\xi}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$.

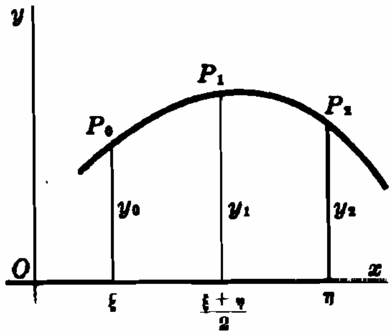

Fig. 55-4

Tendremos $\int_\xi^\eta y\,dx = \int_\xi^\eta (Ax^2 + Bx + C)\,dx$

$$= \frac{\eta-\xi}{3}[A(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2) + \tfrac{3}{2}B(\xi+\eta) + 3C]$$

Como $y = Ax^2 + Bx + C$ pasa por los puntos P_0, P_1, P_2, se verificará:

$$y_0 = A\xi^2 + B\xi + C$$
$$y_1 = A\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right)^2 + B\left(\frac{\xi+\eta}{2}\right) + C$$
$$y_2 = A\eta^2 + B\eta + C$$

y $$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2[A(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2) + \tfrac{3}{2}B(\xi+\eta) + 3C]$$

Por tanto, $$\int_\xi^\eta y\,dx = \frac{\eta-\xi}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

2. Calcular el valor aproximado de $\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2}$ por los cuatro métodos y comprobar los resultados efectuando la integración

Fórmula de los trapecios, con $n = 5$.

Aquí, $h = \frac{\frac{1}{2}-0}{5} = 0{,}1$. Por tanto $a = 0$, $a+h = 0{,}1$, $a+2h = 0{,}2$, $a+3h = 0{,}3$, $a+4h = 0{,}4$, $b = 0{,}5$.

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{0{,}1}{2}[f(0) + 2f(0{,}1) + 2f(0{,}2) + 2f(0{,}3) + 2f(0{,}4) + f(0{,}5)]$$

$$\approx \frac{1}{20}\left(1 + \frac{2}{1{,}01} + \frac{2}{1{,}04} + \frac{2}{1{,}09} + \frac{2}{1{,}16} + \frac{1}{1{,}25}\right) = 0{,}4631$$

Fórmula del prismatoide.

Aquí, $h = \frac{\frac{1}{2}-0}{2} = \frac{1}{4}$ y $f(a) = f(0) = 1$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{16}{17}$, $f(b) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$.

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\left(1 + \frac{64}{17} + \frac{4}{5}\right) = \frac{1}{12}(1 + 3{,}76471 + 0.8) = 0{,}4637$$

Fórmula de Simpson, con $n = 4$.

Tenemos, $h = \frac{\frac{1}{2}-0}{4} = \frac{1}{8}$. De donde $= 0$, $a+h = \frac{1}{8}$, $a+2h = \frac{1}{4}$, $a+3h = \frac{3}{8}$, $b = \frac{1}{2}$.

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{24}\left(1 + 4\frac{1}{1+(\frac{1}{8})^2} + 2\frac{1}{1+(\frac{1}{4})^2} + 4\frac{1}{1+(\frac{3}{8})^2} + \frac{1}{1+(\frac{1}{2})^2}\right)$$

$$\approx \frac{1}{24}\left(1 + \frac{256}{65} + \frac{32}{17} + \frac{256}{73} + \frac{4}{5}\right) = 0{,}4637$$

Desarrollo en serie, utilizando 7 términos.

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} \approx \int_0^{1/2} (1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12})\,dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \frac{x^{13}}{13}\right]_0^{1/2}$$

$$\approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} + \frac{1}{9\cdot 2^9} - \frac{1}{11\cdot 2^{11}} + \frac{1}{13\cdot 2^{13}}$$

$$\approx 0{,}50000 - 0{,}04167 + 0{,}00625 - 0{,}00112 + 0{,}00022 - 0{,}00004 + 0{,}00001 = 0{,}4636$$

Integración. $$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tag } x\Big]_0^{1/2} = \text{arc tag } \tfrac{1}{2} = 0{,}4636$$

3. Hallar el área limitada por $y = e^{-x^2}$, el eje x, y las rectas $x = 0$ y $x = 1$ aplicando (*a*) la fórmula de Simpson con $n = 4$ y (*b*) el desarrollo en serie.

(*a*) Tenemos, $h = \frac{1}{4}$; $a = 0$, $a+h = \frac{1}{4}$, $a+2h = \frac{1}{2}$, $a+3h = \frac{3}{4}$, $b = 1$.

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \frac{\frac{1}{4}}{3}(1 + 4e^{-1/16} + 2e^{-1/4} + 4e^{-9/16} + e^{-1})$$

$$\approx \tfrac{1}{12}\{1 + 4(0{,}9399) + 2(0{,}7788) + 4(0{,}5701) + 0{,}3679\} = 0{,}747 \text{ unidades de superficie}$$

(*b*) $$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \frac{x^{12}}{6!}\right)dx$$

$$\approx \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} + \frac{x^{13}}{13\cdot 6!}\right]_0^1$$

$$\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{11\cdot 5!} + \frac{1}{13\cdot 6!}$$

$$\approx 1 - 0{,}3333 + 0{,}1 - 0{,}0238 + 0{,}0046 - 0{,}0008 + 0{,}0001 = 0{,}747 \text{ unidades de superficie}$$

4. Un terreno está situado entre una valla rectilínea y un río. La anchura y (metros) del terreno a una distancia x de uno de los extremos de la valla viene dada por:

x	0	20	40	60	80	100	120
y	0	22	41	53	38	17	0

Aplicar la fórmula de Simpson para hallar, aproximadamente, el área del terreno.

$$\text{Aquí, } h = 20 \text{ y } \int_0^{120} f(x)\,dx \approx {}^{20}/_3(0 + 4\cdot 22 + 2\cdot 41 + 4\cdot 53 + 2\cdot 38 + 4\cdot 17 + 0)$$
$$\approx 3507 \text{ metros cuadrados.}$$

5. Una curva viene dada por el siguiente cuadro de valores:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	0,6	0,9	1,2	1,4	1,5	1,7	1,8	2

(*a*) Hallar el valor aproximado del área limitada por la curva, el eje x y las ordenadas extremas $x = 1$ y $x = 9$, aplicando la fórmula de Simpson.

(*b*) Hallar el valor aproximado del volumen generado en la rotación del área del apartado (*a*) alrededor del eje x, aplicando la fórmula de Simpson.

(*a*) Aquí, $h = 1$ y

$$\int_1^9 y\,dx \approx \frac{1}{3}\{0 + 4(0{,}6) + 2(0{,}9) + 4(1{,}2) + 2(1{,}4) + 4(1{,}5) + 2(1{,}7) + 4(1{,}8) + 2\}$$
$$\approx 10{,}13 \text{ unidades de superficie}$$

(*b*)
$$\pi\int_1^9 y^2\,dx \approx \frac{\pi}{3}\{0 + 4(0{,}6)^2 + 2(0{,}9)^2 + 4(1{,}2)^2 + 2(1{,}4)^2 + 4(1{,}5)^2 + 2(1{,}7)^2 + 4(1{,}8)^2 + 4\}$$
$$\approx 46{,}58 \text{ unidades de volumen}$$

Problemas propuestos

6. Deducir la fórmula de Simpson.

7. Calcular el valor aproximado de $\int_2^6 \frac{dx}{x}$ aplicando (*a*) la fórmula del trapecio con $n = 4$, (*b*) la fórmula del prisma, y (*c*) la fórmula de Simpson con $n = 4$. Comprobar los resultados por integración.
Sol. (*a*) 1,117, (*b*) 1,111, (*c*) 1,100; 1,099.

8. Calcular el valor aproximado de $\int_1^5 \sqrt{35 + x}\,dx$ como en el Problema 7.
Sol. (*a*) 24,654, (*b*) 24,655, (*c*) 24,655; 24,655.

9. Calcular el valor aproximado de $\int_1^3 \ln x\,dx$ aplicando (*a*) la fórmula del trapecio con $n = 5$ y (*b*) la fórmula de Simpson con $n = 8$. Comprobar por integración. *Sol.* (*a*) 1,2870, (*b*) 1,2958; 1,2958.

10. Calcular el valor aproximado de $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx$ aplicando (*a*) la fórmula del trapecio con $n = 5$ y (*b*) la fórmula de Simpson con $n = 4$. *Sol.* (*a*) 1,115, (*b*) 1,111.

11. Calcular el valor aproximado de $\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ por la fórmula de Simpson con $n = 6$. *Sol.* 1,852.

12. Aplicar la fórmula de Simpson para hallar (*a*) el área limitada por la curva y (*b*) el volumen generado en la rotación del área alrededor del eje x. La curva viene dada por

x	1	2	3	4	5
y	1,8	4,2	7,8	9,2	12,3

Sol. (*a*) 27,8, (*b*) 228,44π

Capítulo 56

Derivadas parciales

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES. Si a cada punto (x, y) de una región del plano xy se le hace corresponder un número real z, diremos que z es una función, $z = f(x, y)$, de las variables independientes x e y. El lugar geométrico de todos los puntos (x, y, z) que satisfacen la ecuación $z = f(x, y)$ es una superficie. Análogamente se definen las funciones $w = f(x, y, z, \ldots)$ de varias variables independientes aunque, por el momento, no tengan una interpretación geométrica sencilla.

El estudio de las funciones de dos variables difiere notablemente del de las funciones de una variable. Sin embargo, el cálculo de las funciones de tres o más variables es muy similar al caso de dos variables. En este libro trataremos, fundamentalmente, de las funciones de dos variables.

Una función $f(x, y)$ tiende al límite A cuando $x \to x_0$ e $y \to y_0$, si dado un $\epsilon > 0$ tan pequeño como queramos, existe un $\delta > 0$ tal que, para todos los pares de valores (x, y) que cumplan la desigualdad

(i) $$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

se verifica: $|f(x, y) - A| < \epsilon$. La condición (i) representa un intervalo reducido del punto (x_0, y_0), es decir, todos los puntos excepto el propio (x_0, y_0), situados en un círculo de radio δ y centro (x_0, y_0).

Una función $f(x, y)$ es continua en el punto (x_0, y_0) siempre que $f(x_0, y_0)$ esté definida y, además, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

(Ver Problemas 1-2.)

DERIVADAS PARCIALES. Sea $z = f(x, y)$ una función de las variables independientes x e y. Como x e y son independientes, podremos **(i)** variar x manteniendo constante y, **(ii)** variar y manteniendo constante x, **(iii)** variar x e y simultáneamente. En los dos primeros casos, z es una función de una sola variable y se puede hallar su derivada de acuerdo con las expresiones clásicas que ya hemos visto.

Si x varía permaneciendo constante y, z es una función de x y su derivada con respecto a esta variable x,

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

se denomina *primera derivada parcial de* $z = f(x, y)$ *con respecto a* x.

Si lo que varía es y permaneciendo constante x, z es una función de y y su derivada con respecto a y

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

recibe el nombre de *primera derivada parcial de* $z = f(x, y)$ *con respecto a* y.

(Ver Problemas 3-8.)

Si z está definida implícitamente como función de x e y mediante la relación $F(x, y, z) = 0$, para hallar las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ no hay más que aplicar las fórmulas de la derivación implícita dadas en el Capítulo 6. (Ver Problemas 9-12.)

Las derivadas parciales anteriores admiten una interpretación geométrica muy sencilla. Consideremos la superficie $z = f(x, y)$ de la Fig. 56-1, y sean APB y CPD las intersecciones con dicha superficie de los planos que pasando por P sean paralelos a los xOz e yOz, respectivamente. Si hacemos variar a x permaneciendo constante y, el punto P se desplazará a lo largo de la curva APB y el valor de $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ en el punto P es la pendiente de la curva APB en P.

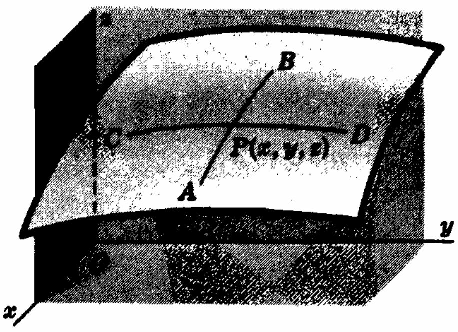

Fig. 56-1

Análogamente, si hacemos variar y permaneciendo constante x, P se moverá a lo largo de la curva CPD, y el valor de $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en P es la pendiente de la curva CPD en P.

(Ver Problema 13.)

DERIVADAS PARCIALES DE ORDEN SUPERIOR. La derivada parcial $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ de $z = f(x, y)$ se puede a su vez derivar parcialmente con respecto a x y a y, dando lugar a las segundas derivadas parciales $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = f_{yx}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$. Análogamente, de $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ se obtienen $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = f_{xy}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$.

Si $z = f(x, y)$ y sus derivadas parciales son continuas es indiferente el orden de derivación, es decir, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

(Ver Problemas 14-15.)

Problemas resueltos

1. Estudiar la continuidad de la función $z = x^2 + y^2$.

   Para cualquier conjunto de valores finitos $(x, y) = (a, b)$, $z = a^2 + b^2$.

   Cuando $x \to a$ e $y \to b$, $x^2 + y^2 \to a^2 + b^2$.

   Por tanto, la función es continua para todos los valores de las variables.

2. Las funciones siguientes, son continuas en todos los puntos salvo en el origen (0,0), en el que no están definidas. ¿Cómo se puede hacer que sean también continuas en dicho punto?

   (*a*) $z = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$.

   Supongamos que $(x, y) \to (0,0)$ a lo largo de la recta $y = mx$; tendremos $z = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y} = \dfrac{\operatorname{sen}(1+m)x}{(1+m)x} \to 1$.

   Se puede hacer que la función sea continua en todos los puntos definiéndola como sigue: $z = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$, $(x,y) \neq (0, 0)$; $z = 1$, $(x, y) = (0, 0)$.

   (*b*) $z = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

   Supongamos que $(x, y) \to (0, 0)$ a lo largo de la recta $y = mx$; el valor límite de $z = \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \dfrac{m}{1+m^2}$ depende de la recta que se elija. Por tanto, la función no se puede hacer continua en (0, 0).

Hallar las derivadas parciales de primer orden en los Problemas 3-7.

3. $z = 2x^2 - 3xy + 4y^2$.

   Considerando y constante y derivando con respecto a x, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y$.

   Considerando x constante y derivando con respecto a y, $\dfrac{\partial z}{\partial y}, = -3x + 8y$.

4. $z = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x}$.

Considerando y constante y derivando con respecto a x, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x}{y} - \dfrac{y^2}{x^2}$.

Considerando x constante y derivando con respecto a y, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{2y}{x}$.

5. $z = \text{sen}\,(2x + 3y)$. $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2\cos(2x+3y), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3\cos(2x+3y)$

6. $z = \text{arc tag}\; x^2y + \text{arc tag}\; xy^2$. $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2xy}{1+x^4y^2} + \dfrac{y^2}{1+x^2y^4}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2}{1+x^4y^2} + \dfrac{2xy}{1+x^2y^4}$

7. $z = e^{x^2+xy}$. $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+xy}(2x+y) = z(2x+y), \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+xy}(x) = xz$

8. El área de un triángulo viene dada por $K = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,C$. Si $a = 20$, $b = 30$ y $C = 30°$, hallar las variaciones:

(*a*) de K con respecto a a, suponiendo b y C constantes.
(*b*) de K con respecto a C, suponiendo a y b constantes.
(*c*) de b con respecto a a, suponiendo K y C constantes.

(*a*) $\dfrac{\partial K}{\partial a} = \frac{1}{2}b\,\text{sen}\,C = \frac{1}{2}(30)(\text{sen}\,30°) = \dfrac{15}{2}$,

(*b*) $\dfrac{\partial K}{\partial C} = \frac{1}{2}ab\cos C = \frac{1}{2}(20)(30)(\cos 30°) = 150\sqrt{3}$

(*c*) $b = \dfrac{2K}{a\,\text{sen}\,C}$; $\dfrac{\partial b}{\partial a} = -\dfrac{2K}{a^2\,\text{sen}\,C} = -\dfrac{2(\frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,C)}{a^2\,\text{sen}\,C} = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{3}{2}$

Hallar, en los Problemas 9-11, las derivadas parciales de primer orden de z con respecto a las variables independientes x e y.

9. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Solución 1. Despejando z obtenemos $z = \pm\sqrt{25 - x^2 - y^2}$. Por tanto,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\pm\sqrt{25-x^2-y^2}} = -\frac{x}{z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\pm\sqrt{25-x^2-y^2}} = -\frac{y}{z}$$

Solución 2. Derivando implícitamente con respecto a x, tomando y constante.

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}$$

Derivando implícitamente con respecto a y, tomando x constante.

$$2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}$$

10. $x^2(2y + 3z) + y^2(3x - 4z) + z^2(x - 2y) = xyz$.

En este caso, sería muy complicado seguir el procedimiento de la solución 1 del Problema 9.

Derivando inplícitamente con respecto a x,

$$2x(2y+3z) + 3x^2\frac{\partial z}{\partial x} + 3y^2 - 4y^2\frac{\partial z}{\partial x} + 2z(x-2y)\frac{\partial z}{\partial x} + z^2 = yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}$$

y
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{4xy + 6xz + 3y^2 + z^2 - yz}{3x^2 - 4y^2 + 2xz - 4yz - xy}$$

Derivando implícitamente con respecto a y,

$$2x^2 + 3x^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2y(3x-4z) - 4y^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2z(x-2y)\frac{\partial z}{\partial y} - 2z^2 = xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}$$

y
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x^2 + 6xy - 8yz - 2z^2 - xz}{3x^2 - 4y^2 + 2xz - 4yz - xy}$$

11. $xy + yz + zx = 1.$

Derivando con respecto a x, $y + y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial x} + z = 0$ y $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y+z}{x+y}$.

Derivando con respecto a y, $x + y\dfrac{\partial z}{\partial y} + z + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x+z}{x+y}$

12. Considerando x e y como variables independientes, calcular $\dfrac{\partial r}{\partial x}, \dfrac{\partial r}{\partial y}, \dfrac{\partial \theta}{\partial x}, \dfrac{\partial \theta}{\partial y}$ siendo $x = e^{2r}, \cos\theta$, $y = e^{3r}, \operatorname{sen}\theta$.

Derivando las relaciones parcialmente con respecto a x:

$$1 = 2e^{2r}\cos\theta\,\frac{\partial r}{\partial x} - e^{2r}\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \text{y} \quad 0 = 3e^{3r}\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial r}{\partial x} + e^{3r}\cos\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{\cos\theta}{e^{2r}(2+\operatorname{sen}^2\theta)}$ y $\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{3\operatorname{sen}\theta}{e^{2r}(2+\operatorname{sen}^2\theta)}$.

Derivando las relaciones parcialmente con respecto a y:

$$0 = 2e^{2r}\cos\theta\,\frac{\partial r}{\partial y} - e^{2r}\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \text{y} \quad 1 = 3e^{3r}\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial r}{\partial y} + e^{3r}\cos\theta\,\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{e^{3r}(2+\operatorname{sen}^2\theta)}$ y $\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{2\cos\theta}{e^{3r}(2+\operatorname{sen}^2\theta)}$.

13. Hallar la pendiente de las tangentes a las curvas intersección de la superficie $z = 3x^2 + 4y^2 - 6$ con los planos que pasan por el punto (1, 1, 1) y son paralelos a los planos coordenados xOz e yOz.

El plano $x = 1$, paralelo al yOz, corta a la superficie según la curva $z = 4y^2 - 3$, $x = 1$. Por tanto, la pendiente pedida es $\partial z/\partial y = 8y = 8 \cdot 1 = 8$.

El plano $y = 1$, paralelo al xOz, corta a la superficie según la curva $z = 3x^2 - 2$, $y = 1$. Por tanto, la pendiente pedida es $\partial z/\partial x = 6x = 6$.

Hallar, en los Problemas 14-15, las segundas derivadas parciales de z.

14. $z = x^2 + 3xy + y^2.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2$$

15. $z = x\cos y - y\cos x.$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos y + y\operatorname{sen} x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x\operatorname{sen} y - \cos x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = y\cos x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = -\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = -x\cos y$$

Problemas propuestos

16. Estudiar la continuidad en el punto (0,0) de las funciones siguientes:

(*a*) $\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$, (*b*) $\dfrac{x-y}{x+y}$, (*c*) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, (*d*) $\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ *Sol.* (*a*) No, (*b*) No, (*c*) Sí, (*d*) No.

17. Hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en las funciones siguientes:

(*a*) $z = x^2 + 3xy + y^2$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y$

(*b*) $z = \dfrac{x}{y^2} - \dfrac{y}{x^2}$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{2y}{x^3}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2x}{y^3} - \dfrac{1}{x^2}$

(*c*) $z = \operatorname{sen} 3x \cos 4y$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3 \cos 3x \cos 4y, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -4 \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 4y$

(*d*) $z = \operatorname{arc\,tag} \dfrac{y}{x}$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2 + y^2}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$

(*e*) $x^2 - 4y^2 + 9z^2 = 36$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x}{9z}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{4y}{9z}$

(*f*) $z^3 - 3x^2y + 6xyz = 0$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2y(x - z)}{z^2 + 2xy}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x(x - 2z)}{z^2 + 2xy}$

(*g*) $yz + xz + xy = 0$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y + z}{x + y}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x + z}{x + y}$

18. (*a*) Si $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, demostrar que $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

(*b*) Si $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, demostrar que $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$.

(*c*) Si $z = e^{x/y} \operatorname{sen} \dfrac{x}{y} + e^{y/x} \cos \dfrac{y}{x}$, demostrar que $x \dfrac{\partial z}{\partial x} + y \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

(*d*) Si $z = (ax + by)^2 + e^{ax+by} + \operatorname{sen}(ax + by)$, demostrar que $b \dfrac{\partial z}{\partial x} = a \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

19. Hallar la ecuación de la tangente

(*a*) a la parábola $z = 2x^2 - 3y^2$, $y = 1$ en el punto $(-2, 1, 5)$. *Sol.* $8x + z + 11 = 0, y = 1$

(*b*) a la parábola $z = 2x^2 - 3y^2$, $x = -2$ en el punto $(-2, 1, 5)$. *Sol.* $6y + z - 11 = 0, x = -2$

(*c*) a la hipérbola $z = 2x^2 - 3y^2$, $z = 5$ en el punto $(-2, 1, 5)$. *Sol.* $4x + 3y + 5 = 0, z = 5$

Demostrar que las tres rectas están situadas en el plano $8x + 6y + z + 5 = 0$.

20. Hallar $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, en las funciones siguientes:

(*a*) $z = 2x^2 - 5xy + y^2$ *Sol.* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = -5, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$

(*b*) $z = \dfrac{x}{y^2} - \dfrac{y}{x^2}$ *Sol.* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{6y}{x^4}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = 2\left(\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{y^3}\right), \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{6x}{y^4}$

(*c*) $z = \operatorname{sen} 3x \cos 4y$ *Sol.* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -9z, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = -12 \cos 3x \operatorname{sen} 4y, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -16z$

(*d*) $z = \operatorname{arc\,tag} \dfrac{y}{x}$ *Sol.* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$

21. (*a*) Si $z = \dfrac{xy}{x - y}$, demostrar que $x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

(*b*) Si $z = e^{\alpha x} \cos \beta y$ y $\beta = \pm\alpha$, demostrar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

(*c*) Si $z = e^{-t}(\operatorname{sen} x + \cos y)$, demostrar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial z}{\partial t}$

(*d*) Si $z = \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} by \operatorname{sen} kt\sqrt{a^2 + b^2}$, demostrar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2 \left\{ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right\}$.

22. En la fórmula de los gases reales $\left(p + \dfrac{a}{v^2}\right)(v - b) = ct$, siendo a, b y c constantes, demostrar que

$$\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{2a(v - b) - (p + a/v^2)v^3}{v^3(v - b)}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{cv^3}{(p + a/v^2)v^3 - 2a(v - b)}, \quad \frac{\partial t}{\partial p} = \frac{v - b}{c}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial t}{\partial p}\right) = -1$$

Capítulo 57

Diferenciales y derivadas totales

DIFERENCIALES TOTALES. Las diferenciales, dx y dy de la función $y = f(x)$ de una sola variable independiente, según vimos en el Capítulo 23, vienen dadas por

$$dx = \Delta x, \qquad dy = f'(x)\,dx = \frac{dy}{dx}dx$$

Consideremos la función $z = f(x, y)$ de las dos variables independientes x e y, y sean $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$. Al variar x permaneciendo constante y, z resulta una función de x solamente y *la diferencial parcial de z con respecto a x* será $d_xz = f_x(x, y)dx = \dfrac{\partial z}{\partial x}\,dx$. Análogamente, *la diferencial parcial de z con respecto a y* viene dada por $d_yz = f_y(x, y)\,dy = \dfrac{\partial z}{\partial y}\,dy$. Pues bien, *la diferencial total de z* es la suma de las diferenciales parciales anteriores, es decir,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{1}$$

Para una función $w = F(x, y, z, \ldots t)$, la diferencial total dw se define por

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + \cdots + \frac{\partial w}{\partial t}dt \tag{1'}$$

(Ver Problemas 1-2.)

Como ocurre con las funciones de una sola variable, la diferencial total de una función de varias variables es un valor muy próximo al incremento total de la función cuando las variables independientes experimentan un incremento pequeño.

Ejemplo:

Sea $z = xy$; $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}\,dy = y\,dx + x\,dy$; si se incrementan x e y en $\Delta x = dx$ e $\Delta y = dy$, respectivamente, el incremento Δz de z será

$$\begin{aligned}\Delta z &= (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy \\ &= x\,\Delta y + y\,\Delta x + \Delta x\,\Delta y \\ &= x\,dy + y\,dx + dx\,dy\end{aligned}$$

En la Fig. 57-1, se hace una interpretación geométrica. Como se puede observar, dz y Δz difieren en un rectángulo de área $\Delta x\,\Delta y = dx\,dy$.

(Ver Problemas 3-9.)

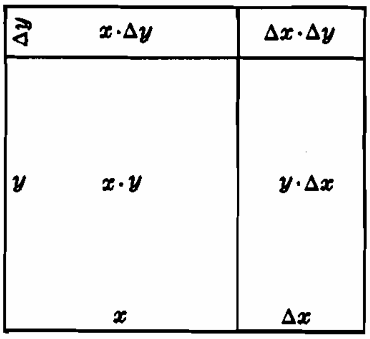

Fig. 57-1

DERIVADA TOTAL DE UNA FUNCION DE FUNCION. Sea $z = f(x, y)$ una función continua de las variables x, y con derivadas parciales, $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, continuas y x e y funciones derivables $x = g(t)$, $y = h(t)$ de una variable t; en estas condiciones, z es una función de t y su derivada total, dz/dt, con respecto a t viene dada por

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{2}$$

Análogamente, sea $w = f(x, y, z, \ldots)$ una función continua de las variables $x, y, z, \ldots$, con derivadas parciales continuas, y $x, y, z, \ldots$, funciones derivables de una variable t; la derivada total de w con respecto a t viene dada por

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \cdots \qquad (2')$$

(Ver problemas 10-16)

Si $z = f(x, y)$ es una función continua de las variables x e y y sus derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ son continuas, y x e y son, a su vez, funciones continuas, $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$, de las variables independientes r y s, z es una función de t, siendo

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad (3)$$

Análogamente, si $w = f(x, y, z, \ldots)$ es una función continua de n variables $x, y, z, \ldots$ y sus derivadas parciales $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$, $\partial w/\partial z, \ldots$, y $x, y, z, \ldots$ son funciones continuas de m variables independientes $r, s, t, \ldots$, tendremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} + \cdots \\ \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} + \cdots \quad \text{etc.} \end{aligned} \qquad (3')$$

(Ver problemas 17-19)

Problemas resueltos

Hallar la diferencial total en los problemas 1-2.

1. $z = x^3y + x^2y^2 + xy^3$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y + 2xy^2 + y^3, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 2x^2y + 3xy^2$$

Por tanto $\quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (3x^2y + 2xy^2 + y^3)\,dx + (x^3 + 2x^2y + 3xy^2)\,dy$

2. $z = x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{sen} y - y\cos x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x\cos y - \operatorname{sen} x$$

Por tanto $\quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = (\operatorname{sen} y - y\cos x)\,dx + (x\cos y - \operatorname{sen} x)\,dy$

3. Comparar dz y Δz, en la función $z = x^2 + 2xy - 3y^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 6y, \qquad dz = 2(x+y)\,dx + 2(x-3y)\,dy$$

$$\begin{aligned} \Delta z &= [(x+dx)^2 + 2(x+dx)(y+dy) - 3(y+dy)^2] - (x^2 + 2xy - 3y^2) \\ &= 2(x+y)\,dx + 2(x-3y)\,dy + (dx)^2 + 2\,dx\,dy - 3(dy)^2 \end{aligned}$$

Así, pues, dz y Δz difieren en $(dx)^2 + 2\,dx\,dy - 3(dy)^2$.

4. Hallar un valor aproximado del área de un rectángulo de dimensiones 35,02 por 24,97 unidades.

Llamando x e y a los lados del rectángulo, el área es $A = xy$, con lo cual $dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy = y\,dx + x\,dy$.

Para $x = 35$, $dx = 0{,}02$, $y = 25$, $dy = -0{,}03$, resulta $A = 35 \times 25 = 875$ y $dA = 25(0{,}02) + 35(-0{,}03) -0{,}55$
El área es, aproximadamente, $A + dA = 874{,}45$ unidades de superficie.

5. Hallar, aproximadamente, la variación de longitud que experimenta la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8 centímetros, cuando el primero se alarga $\frac{1}{4}$ centímetros y el segundo lo hace en $\frac{1}{8}$ centímetros.

Sean x, y, z los catetos menor, mayor y la hipotenusa del triángulo, respectivamente. Tendremos

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Para $x = 6$, $y = 8$, $dx = 1/4$, y $dy = -1/8$, de donde $dz = \dfrac{6(1/4) + 8(-1/8)}{\sqrt{6^2+8^2}} = 1/20$ cm. Por tanto, la hipotenusa se alarga aproximadamente 1/20 centímetros.

6. La potencia calorífica disipada en una resistencia eléctrica viene dada por $P = E^2/R$ vatios. Siendo $E = 200$ voltios y $R = 8$ ohmios, hallar la disminución que experimenta la potencia cuando E disminuye en 5 voltios y R lo hace en 0,2 ohmios.

$$\frac{\partial P}{\partial E} = \frac{2E}{R}, \quad \frac{\partial P}{\partial R} = -\frac{E^2}{R^2}, \quad dP = \frac{2E}{R}dE - \frac{E^2}{R^2}dR$$

Para $E = 200$, $R = 8$, $dE = -5$, y $dR = -0{,}2$, por tanto,

$$dP = \frac{2 \cdot 200}{8}(-5) - \left(\frac{200}{8}\right)^2(-0{,}2) = -250 + 125 = -125 \text{ watts}$$

La potencia disminuye aproximadamente 125 vatios.

7. Al medir un bloque paralelepipédico de madera, han resultado, para sus dimensiones, los valores 10, 12 y 20 centímetros con un error probable de 0,05 centímetros en cada una. Hallar, aproximadamente, el máximo error que se puede cometer al evaluar el área total del bloque y el porcentaje de error respecto del área como consecuencia de los errores en las medidas individuales.

El área total es $S = 2(xy + yz + zx)$; luego

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x}dx + \frac{\partial S}{\partial y}dy + \frac{\partial S}{\partial z}dz = 2(y+z)\,dx + 2(x+z)\,dy + 2(y+x)\,dz$$

El máximo error en S tendrá lugar cuando los errores en las longitudes sean del mismo signo, por ejemplo, positivos.

$$dS = 2(12 + 20)(0{,}05) + 2(10 + 20)(0{,}05) + 2(12 + 10)(0{,}05) = 8{,}4 \text{ cm}^2$$

El porcentaje de error es (error/área)(100) = (8,4/1120)(100) = 0,75 %.

8. En la fórmula $R = E/C$, hallar el error máximo y el porcentaje de error si $C = 20$ con un error probable de 0,1 y $E = 120$ con un error probable de 0,05.

$$dR = \frac{\partial R}{\partial E}dE + \frac{\partial R}{\partial C}dC = \frac{1}{C}dE - \frac{E}{C^2}dC$$

El error máximo se dará cuando $dE = 0{,}05$ y $dC = -0{,}1$; luego

$$dR = \frac{0{,}05}{20} - \frac{120}{400}(-0{,}1) = 0{,}0325 \text{ es aproximadamente el error máximo}$$

El porcentaje de error es $\dfrac{dR}{R}(100) = \dfrac{0{,}0325}{8}(100) = 0{,}40625 = 0{,}41\,\%$.

9. Dos lados de un triángulo miden 150 y 200 metros y el ángulo que forman es de 60°. Sabiendo que los errores probables en la medición son de 0,2 metros en la medida de los lados y de 1° en la del ángulo, hallar el máximo error probable que se puede cometer al evaluar su área.

$$A = \tfrac{1}{2}xy \operatorname{sen}\theta, \quad \partial A/\partial x = \tfrac{1}{2}y \operatorname{sen}\theta, \quad \partial A/\partial y = \tfrac{1}{2}x \operatorname{sen}\theta, \quad \partial A/\partial\theta = \tfrac{1}{2}xy\cos\theta$$

y

$$dA = \tfrac{1}{2}y \operatorname{sen}\theta\,dx + \tfrac{1}{2}x\operatorname{sen}\theta\,dy + \tfrac{1}{2}xy\cos\theta\,d\theta$$

Para $x = 150$, $y = 200$, $\theta = 60°$, $dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}2$, y $d\theta = 1° = \pi/180$, luego

$$dA = \tfrac{1}{2}(200)(\operatorname{sen} 60°)(0{,}2) + \tfrac{1}{2}(150)(\operatorname{sen} 60°)(0{,}2) + \tfrac{1}{2}(150)(200)(\cos 60°)(\pi/180) = 161{,}21 \text{ m}^2.$$

10. Hallar dz/dt, siendo $z = x^2 + 3xy + 5y^2$; $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 10y, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = -\operatorname{sen} t$$

luego

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2x + 3y)\cos t - (3x + 10y)\operatorname{sen} t$$

11. Hallar dz/dt, siendo: $z = \ln(x^2 + y^2)$; $x = e^{-t}$, $y = e^t$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{dx}{dt} = -e^{-t}, \qquad \frac{dy}{dt} = e^t$$

Luego
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{2x}{x^2+y^2}(-e^{-t}) + \frac{2y}{x^2+y^2}(e^t) = 2\frac{ye^t - xe^{-t}}{x^2+y^2}$$

12. Sea $z = f(x,y)$ una función continua de x e y cuyas derivadas parciales, $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, son continuas, y sea y una función derivable de x. En estas condiciones, z es una función derivable de x y, según (2),

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Hemos puesto f en lugar de z, para evitar la confusión entre dz/dx y $\partial z/\partial x$ en la misma expresión.

13. Hallar dz/dx, siendo: $z = f(x, y) = x^2 + 2xy + 4y^2$, $y = e^{ax}$.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = (2x+2y) + (2x+8y)ae^{ax} = 2(x+y) + 2a(x+4y)e^{ax}$$

14. Hallar (*a*) dz/dx y (*b*) dz/dy, siendo: $z = f(x, y) = xy^2 + x^2y$, $y = \ln x$.

(*a*) En este caso x es la variable independiente.

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = (y^2+2xy) + (2xy+x^2)\left(\frac{1}{x}\right) = y^2 + 2xy + 2y + x$$

(*b*) Aquí y es la variable independiente.

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dy} + \frac{\partial f}{\partial y} = (y^2+2xy)x + (2xy+x^2) = xy^2 + 2x^2y + 2xy + x^2$$

15. La altura de un cono recto circular mide 15 centímetros y disminuye a razón de 0,2 centímetros cada minuto. El radio de la base mide 10 centímetros y disminuye a razón de 0,3 centímetros cada minuto. Hallar la variación de volumen que experimenta en la unidad de tiempo.

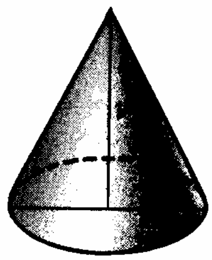

Fig. 57-2

Sea x = radio e y = altura del cono. De $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y$, tomando a x e y como funciones del tiempo t,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{3}\pi\left(2xy\frac{dx}{dt} + x^2\frac{dy}{dt}\right)$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi[2\cdot 10\cdot 15\cdot(-0{,}3) + 10^2\cdot(0{,}2)] = -70\pi/3 \text{ cm}^3/\text{min}.$$

16. Un punto P se mueve a lo largo de la curva de intersección del paraboloide $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = z$ y del cilindro $x^2 + y^2 = 5$, en donde x, y y z se expresan en centímetros. Si x aumenta a razón de 0,2 centímetros por minuto, hallar la variación de z en la unidad de tiempo cuando $x = 2$.

De $z = \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9}$, $\quad \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{8}\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{2y}{9}\dfrac{dy}{dt}$

Como $x^2 + y^2 = 5$, $y = \pm 1$ para $x = 2$; también, $x\dfrac{dx}{dt} + y\dfrac{dy}{dt} = 0$.

Para $y = 1$, $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{y}\dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{2}{1}(0{,}2) = -0{,}4$ y $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{2}{8}(0{,}2) - \dfrac{2}{9}(-0{,}4) = \dfrac{5}{36}$ cm/min.

Para $y = -1$, $\dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{x}{y}\dfrac{dx}{dt} = 0{,}4$ y $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{2}{8}(0{,}2) - \dfrac{2}{9}(-1)(0{,}4) = \dfrac{5}{36}$ cm/min.

17. Hallar $\partial z/\partial r$ y $\partial z/\partial s$, siendo: $z = x^2 + xy + y^2$; $x = 2r + s$, $y = r - 2s$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y, \quad \frac{\partial x}{\partial r} = 2, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = -2$$

Luego
$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = (2x+y)(2) + (x+2y)(1) = 5x + 4y$$

y
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = (2x+y)(1) + (x+2y)(-2) = -3y$$

18. Hallar $\frac{\partial u}{\partial \varrho}, \frac{\partial u}{\partial \beta}, \frac{\partial u}{\partial \theta}$, siendo: $u = x^2 + 2y^2 + 2z^2$, $x = \varrho \operatorname{sen}\beta\cos\theta$, $y = \varrho\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta$, $z = \varrho\cos\beta$.

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \rho} = 2x \operatorname{sen}\beta\cos\theta + 4y\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta + 4z\cos\beta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \beta} = 2x\,\varrho\cos\beta\cos\theta + 4y\,\varrho\cos\beta\operatorname{sen}\theta - 4z\,\varrho\operatorname{sen}\beta$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = -2x\,\varrho\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\theta + 4y\,\varrho\operatorname{sen}\beta\cos\theta$$

19. Hallar du/dx, siendo: $u = f(x, y, z) = xy + yz + zx$, $y = 1/x$, $z = x^2$.

Aplicando (3'),

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx} = (y+z) + (x+z)\left(-\frac{1}{x^2}\right) + (y+x)2x = y + z + 2x(x+y) - \frac{x+z}{x^2}$$

20. Sea $z = f(x, y)$ una función continua de x e y, cuyas primeras derivadas parciales son $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$. Deducir la expresión

$$\text{(A)} \qquad \Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y$$

en donde ϵ_1 y $\epsilon_2 \to 0$ cuando Δx e $\Delta y \to 0$.

Cuando x e y se incrementan en Δx y Δy, respectivamente, el incremento experimentado por z vale

$$\text{(i)} \qquad \begin{aligned} \Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \\ &= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)] \end{aligned}$$

En la primera expresión entre corchetes, la única variable es x, y en la segunda, solo varía y. Aplicando a cada uno de ellos el teorema del valor medio [(V) del Capítulo 21]:

$$\text{(ii)} \qquad f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x \cdot f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)$$

$$\text{(iii)} \qquad f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta y \cdot f_y(x, y+\theta_2\Delta y)$$

siendo $0 < \theta_1 < 1$ y $0 < \theta_2 < 1$. Obsérvese que aquí las derivadas consideradas son derivadas parciales.

Como $\partial z/\partial x = f_x(x,y)$ y $\partial z/\partial y = f_y(x,y)$ son, por hipótesis, funciones continuas de x e y,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x,y) \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f_y(x,y)$$

Luego $\quad f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x,y) + \epsilon_1, \quad f_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f_y(x,y) + \epsilon_2$

donde $\epsilon_1 \to 0$ y $\epsilon_2 \to 0$ cuando Δx e $\Delta y \to 0$.

Efectuando estas sustituciones en (ii) y (iii), y sustituyendo después en (i), resulta:

$$\begin{aligned} \Delta z &= \{f_x(x,y) + \epsilon_1\}\Delta x + \{f_y(x,y) + \epsilon_2\}\Delta y \\ &= f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y \end{aligned}$$

Obsérvese que la diferencial total, dz, es un valor muy próximo al del incremento total, Δz, cuando $|\Delta x|$ y $|\Delta y|$ sean muy pequeños.

Problemas propuestos

21. Hallar la diferencial total de:

(*a*) $z = x^3y + 2xy^3$ *Sol.* $dz = (3x^2 + 2y^2)y\,dx + (x^2 + 6y^2)x\,dy$

(*b*) $\theta = \text{arc tag } y/x$ *Sol.* $d\theta = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$

(*c*) $z = e^{x^2-y^2}$ *Sol.* $dz = 2z(x\,dx - y\,dy)$

(*d*) $z = x(x^2 + y^2)^{-1/2}$ *Sol.* $dz = \dfrac{y(y\,dx - x\,dy)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

22. La frecuencia fundamental de vibración de un hilo o una varilla de sección circular sometidos a una tensión T viene dada por $n = \dfrac{1}{2rl}\sqrt{\dfrac{T}{\pi d}}$, siendo l la longitud, r el radio y d la densidad. Calcular, aproximadamente, la variación de la frecuencia, cuando (*a*) l aumenta en dl, (*b*) T aumenta en dT, (*c*) l y T se modifican, simultáneamente, en las cantidades citadas.

Sol. (*a*) $-\dfrac{n}{l}\,dl$, (*b*) $\dfrac{n}{2T}\,dT$, (*c*) $n\left(-\dfrac{dl}{l} + \dfrac{dT}{2T}\right)$

23. Hallar, mediante el cálculo diferencial:

(*a*) el volumen de un prisma recto de base cuadrada de lado 8,005 y de altura 9,996 centímetros. *Sol.* 640,544 cm^3.

(*b*) la diagonal de un prisma rectangular de dimensiones 3,03 por 5,98 por 6,01 metros. *Sol.* 9,003 m.

24. Calcular, aproximadamente, el máximo error probable y el porcentaje de error cuando se halla z mediante las fórmulas:

(*a*) $z = \pi r^2 h$; $r = 5 \pm 0{,}05$, $h = 12 \pm 0{,}1$. *Sol.* $8{,}5\pi$; 2,8 %

(*b*) $1/z = 1/f + 1/g$; $f = 4 \pm 0{,}01$. $g = 8 \pm 0{,}02$. *Sol.* 0,0067; 0,25 %

(*c*) $z = y/x$; $x = 1{,}8 \pm 0{,}1$, $y = 2{,}4 \pm 0{,}1$. *Sol.* 0,13; 10 %

25. Calcular, aproximadamente, el máximo porcentaje de error en:

(*a*) $\omega = \sqrt[3]{g/b}$ sabiendo que el error probable en la medida de g es del 1 %, y el correspondiente en la medida de b, $\frac{1}{2}$ %

Ind. $\ln \omega = \frac{1}{3}(\ln g - \ln b)$; $\dfrac{\partial\omega}{\omega} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{dg}{g} - \dfrac{db}{b}\right)$, $\left|\dfrac{dg}{g}\right| = 0{,}01$, $\left|\dfrac{db}{b}\right| = 0{,}005$. *Sol.* 0,005

(*b*) $g = 2s/t^2$ sabiendo que el error probable en la medida de s es del 1 %, y el de la medida de t, del $\frac{1}{4}$ %.
Sol. 0,015.

26. Hallar du/dt, siendo:

(*a*) $u = x^2y^3$, $x = 2t^3$, $y = 3t^2$. *Sol.* $6xy^2t(2yt + 3x)$.

(*b*) $u = x \cos y + y \operatorname{sen} x$, $x = \operatorname{sen} 2t$, $y = \cos 2t$.
Sol. $2(\cos y + y \cos x) \cos 2t - 2(-x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x) \operatorname{sen} 2t$.

(*c*) $u = xy + yz + zx$, $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = e^t + e^{-t}$. *Sol.* $(x + 2y + z)e^t - (2x + y + z)e^{-t}$.

27. En un instante dado, el radio de un cilindro recto circular mide 6 centímetros y aumenta a razón de 0,2 centímetros por segundo, mientras que su altura, que mide 8 centímetros, disminuye a razón de 0,4 centímetros por segundo. Hallar la variación, con respecto al tiempo, del (*a*) volumen, (*b*) área total, en el instante considerado.
Sol. (*a*) $4{,}8\pi$ cm^3/s, (*b*) $3{,}2\pi$ cm^2/s.

28. Una partícula se mueve en un plano de forma que su abscisa y su ordenada vienen dadas, en función del tiempo, por $x = 2 + 3t$, $y = t^2 + 4$, en donde x e y se expresan en metros y t en minutos. Hallar la variación de la distancia al origen en la unidad de tiempo en el instante $t = 1$. *Sol.* $5/\sqrt{2}$ m/min.

29. Un punto se mueve a lo largo de la curva de intersección de la superficie $x^2 + 3xy + 3y^2 = z^2$ con el plano $x - 2y + 4 = 0$. Cuando $x = 2$ y aumenta a razón de 3 unidades por segundo, hallar (*a*) la variación de y en la unidad de tiempo, (*b*) la variación de z en la unidad de tiempo, (*c*) la velocidad del punto móvil.
Sol. (*a*) inc. 3/2 unidades/seg. (*b*) inc. 75/14 unidades/seg. en (2, 3, 7) y dec. 75/14 unidades/seg en (2, 3, —7), (*c*) 6,3 unidades/seg

30. Hallar $\partial z/\partial s$ y $\partial z/\partial t$, siendo:

(*a*) $z = x^2 - 2y^2,\ x = 3s + 2t,\ y = 3s - 2t$. *Sol.* $6(x - 2y),\ 4(x + 2y)$

(*b*) $z = x^2 + 3xy + y^2,\ x = \operatorname{sen} s + \cos t,\ y = \operatorname{sen} s - \cos t$. *Sol.* $5(x + y)\cos s,\ (x - y)\operatorname{sen} t$

(*c*) $z = x^2 + 2y^2,\ x = e^s - e^t,\ y = e^s + e^t$. *Sol.* $2(x + 2y)e^s,\ 2(2y - x)e^t$

(*d*) $z = \operatorname{sen}(4x + 5y),\ x = s + t,\ y = s - t$. *Sol.* $9\cos(4x + 5y),\ -\cos(4x + 5y)$

(*e*) $z = e^{xy},\ x = s^2 + 2st,\ y = 2st + t^2$. *Sol.* $2e^{xy}\{tx + (s + t)y\}$, $2e^{xy}\{(s + t)x + sy\}$

31. (*a*) Si $u = f(x, y)$ y $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, demostrar que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

(*b*) Si $u = f(x, y)$ y $x = r\cosh s$, $y = r\operatorname{senh} s$, demostrar que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{s^2}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2$$

32. (*a*) Si $z = f(x + ay) + g(x - ay)$, demostrar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Ind. Hacer $z = f(u) + g(v)$, $u = x + ay$, $v = x - ay$.

(*b*) Si $z = x^n f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, demostrar que $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = nz$.

(*c*) Si $z = f(x, y)$, $x = g(t)$, $y = h(t)$, demostrar que si se cumplen las condiciones de continuidad (Pág. 259).

$$\frac{d^2z}{dt^2} = f_{xx}(g')^2 + 2f_{xy}g'h' + f_{yy}(h')^2 + f_x g'' + f_y h''$$

(*d*) Si $z = f(x, y)$, $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$, demostrar que si se cumplen las condiciones de continuidad

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = f_{xx}(g_r)^2 + 2f_{xy}g_r h_r + f_{yy}(h_r)^2 + f_x g_{rr} + f_y h_{rr}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial s} = f_{xx}g_r g_s + f_{xy}(g_r h_s + g_s h_r) + f_{yy}h_r h_s + f_x g_{rs} + f_y h_{rs}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} = f_{xx}(g_s)^2 + 2f_{xy}g_s h_s + f_{yy}(h_s)^2 + f_x g_{ss} + f_y h_{ss}$$

33. Una función, $f(x, y)$, es homogénea de orden n, si $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. [Por ejemplo, $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$ es homogénea de segundo orden; $f(x, y) = x\operatorname{sen} y/x + y\cos y/x$ es homogénea de primer orden.] Derivar $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ con respecto a t, y sustituir t por 1 para demostrar que $xf_x + yf_y = nf$. Comprobar esta fórmula aplicándola a las funciones de los dos ejemplos. Véase, también, el Problema 32 (*b*).

34. Si $z = \phi(u, v)$ siendo $u = f(x, y)$ y $v = g(x, y)$, y si $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$, demostrar que

$$(a)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

$$(b)\quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2}\right)$$

35. Aplicar (A) del Problema 20 para deducir las fórmulas de derivación (*2*) y (*3*). *Ind.* Para la (*2*), dividir por Δt.

Capítulo 58

Funciones implícitas

LA DERIVADA de una función de una variable, definida implícitamente mediante una relación $f(x, y) = 0$, se trató en el Capítulo 6. Ahora, vamos a enunciar sin demostración, los teoremas siguientes:

I. Si $f(x, y)$ es continua en una región del plano que contiene a un punto (x_0, y_0) para el cual $f(x_0 y_0) = 0$, las derivadas parciales $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ son continuas en dicha región y $\partial f/\partial y \neq 0$ en (x_0, y_0), existe un intervalo en torno de (x_0, y_0) en el que se puede despejar y de la ecuación $f(x, y) = 0$, siendo y una función continua y derivable con respecto a x: $y = \phi(x)$ con $y_0 = \phi(x_0)$ y $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$.

(Ver Problemas 1-3.)

En el caso de tres variables, se verifica

II. Si $f(x, y, z)$ es continua en una región del plano que contiene a un punto (x_0, y_0, z_0) para el cual $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, las derivadas parciales $\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}$ son continuas en dicha región, y $\partial F/\partial z \neq 0$ en (x_0, y_0, z_0), existe un intervalo en torno de (x_0, y_0, z_0) en el que se puede despejar z de la ecuación $F(x, y, z) = 0$, siendo z una función continua y derivable de x e y: $z = \phi(x, y)$ con $z_0 = \phi(x_0, y_0)$ y $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$.

(Ver Problemas 4-5.)

III. Si $f(x, y, u, v)$ y $g(x, y, u, v)$ son continuas en una región que contiene al punto (x_0, y_0, u_0, v_0) para el cual $f(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$ y $g(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0$, y las primeras derivadas parciales de f y g son continuas en dicha región, y si en (x_0, y_0, u_0, v_0) el determinante $J\left(\dfrac{f, g}{u, v}\right) = \begin{vmatrix} \partial f/\partial u & \partial f/\partial v \\ \partial g/\partial u & \partial g/\partial v \end{vmatrix} \neq 0$, existe un intervalo en torno de (x_0, y_0, u_0, v_0) en el que del sistema $f(x, y, u, v) = 0$ y $g(x, y, u, v) = 0$ se puede despejar u y v como funciones continuas y derivables de x e y: $u = \phi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$. Si en el punto (x_0, y_0, u_0, v_0) el determinante $J\left(\dfrac{f, g}{x, y}\right) \neq 0$, existe un intervalo en torno de (x_0, y_0, u_0, v_0) en el que del sistema $f(x, y, u, v) = 0$ y $g(x, y, u, v) = 0$ se puede despejar x e y como funciones continuas y derivables de u y v: $x = h(u, v)$, $y = k(u, v)$.

(Ver Problemas 6-7.)

Problemas resueltos

1. Aplicando el teorema I, demostrar que $x^2 + y^2 - 13 = 0$ define a y como función derivable de x en un intervalo del punto $(2, 3)$ que no comprenda a ningún punto del eje x. Hallar la derivada en dicho punto.

Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 - 13$. Tendremos, $f(2, 3) = 0$, mientras que en el intervalo de $(2, 3)$ anterior, la función está definida, sus derivadas parciales $\partial f/\partial x = 2x$ y $\partial f/\partial y = 2y$ son continuas y $\partial f/\partial y \neq 0$. Por consiguiente,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\frac{x}{y} = -\frac{2}{3} \quad \text{en } (2, 3)$$

2. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$, siendo $f(x, y) = y^3 + xy - 12 = 0$. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + x$, y $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\dfrac{y}{3y^2 + x}$.

3. Hallar dy/dx, siendo $e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} x = 1$.

Haciendo $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + e^y \operatorname{sen} x - 1$. Tenemos $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y} = -\dfrac{e^x \operatorname{sen} y + e^y \cos x}{e^x \cos y + e^y \operatorname{sen} x}$.

4. Hallar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, siendo $F(x, y, z) = x^2 + 3xy - 2y^2 + 3xz + z^2 = 0$.

Tomando z como una función de x e y definida por la relación y derivando parcialmente con respecto a x y de nuevo con respecto a y, tenemos

(i) $$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = (2x + 3y + 3z) + (3x + 2z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{y}$$

(ii) $$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = (3x - 4y) + (3x + 2z)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

De (i), $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y} = -\dfrac{2x + 3y + 3z}{3x + 2z}$; de (ii), $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\dfrac{3x - 4y}{3x + 2z}$.

5. Hallar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, siendo $\operatorname{sen} xy + \operatorname{sen} yz + \operatorname{sen} zx = 1$.

Sea $F(x, y, z) = \operatorname{sen} xy + \operatorname{sen} yz + \operatorname{sen} zx - 1$; tendremos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y \cos xy + z \cos zx, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x \cos xy + z \cos yz, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = y \cos yz + x \cos zx$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} = -\frac{y \cos xy + z \cos zx}{y \cos yz + x \cos zx}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z} = -\frac{x \cos xy + z \cos yz}{y \cos yz + x \cos zx}$$

6. Si u y v se definen como funciones de x e y por las ecuaciones

$$f(x, y, u, v) = x + y^2 + 2uv = 0, \quad g(x, y, u, v) = x^2 - xy + y^2 + u^2 + v^2 = 0,$$

hallar (i) $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial x$ y (ii) $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial y$.

(i) Derivando f y g parcialmente con respecto a x, tenemos

$$1 + 2v\frac{\partial u}{\partial x} + 2u\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{y} \quad 2x - y + 2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Despejando $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ del sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v + u(y - 2x)}{2(u^2 - v^2)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v(2x - y) - u}{2(u^2 - v^2)}$$

(ii) Derivando f y g parcialmente con respecto a y, tenemos

$$2y + 2v\frac{\partial u}{\partial y} + 2u\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{y} \quad -x + 2y + 2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Luego $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u(x - 2y) + 2vy}{2(u^2 - v^2)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v(2y - x) - 2uy}{2(u^2 - v^2)}$$

7. Siendo $u^2 - v^2 + 2x + 3y = 0$. y $uv + x - y = 0$, hallar (a) $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$, y (b) $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}$.

(a) Aquí x e y se consideran como variables independientes.

Derivando las ecuaciones dadas parcialmente con respecto a x:

$$2u\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial v}{\partial x} + 2 = 0 \quad \text{y} \quad v\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} + 1 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, obtenemos $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{u + v}{u^2 + v^2}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{v - u}{u^2 + v^2}$.

Derivando, las ecuaciones dadas, parcialmente con respecto a y:

$$2u\frac{\partial u}{\partial y} - 2v\frac{\partial v}{\partial y} + 3 = 0 \quad \text{y} \quad v\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial v}{\partial y} - 1 = 0$$

Resolviendo el sistema, obtenemos $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2v - 3u}{2(u^2 + v^2)}$ y $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{2u + 3v}{2(u^2 + v^2)}$.

(*b*) Aquí u y v se consideran como variables independientes.

Derivando las ecuaciones dadas, parcialmente, con respecto a u:

$$2u + 2\frac{\partial x}{\partial u} + 3\frac{\partial y}{\partial u} = 0 \text{ y } v + \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial u} = 0. \quad \text{Luego} \quad \frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{2u+3v}{5} \text{ y } \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2(v-u)}{5}.$$

Derivando las ecuaciones dadas, parcialmente, con respecto a v:

$$-2v + 2\frac{\partial x}{\partial v} + 3\frac{\partial y}{\partial v} = 0 \text{ y } u + \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} = 0. \quad \text{Luego} \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2v-3u}{5} \text{ y } \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{2(u+v)}{5}.$$

Problemas propuestos

8. Hallar dy/dx, siendo:

(*a*) $x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = 1$ (*b*) $xy - e^x \operatorname{sen} y = 0$ (*c*) $\ln(x^2+y^2) - \operatorname{arc\,tag} y/x = 0$

Sol. (*a*) $\dfrac{3x^2-2xy+y^2}{x^2-2xy+3y^2}$ (*b*) $\dfrac{e^x \operatorname{sen} y - y}{x - e^x \cos y}$ (*c*) $\dfrac{2x+y}{x-2y}$

9. Hallar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, siendo:

(*a*) $3x^2 + 4y^2 - 5z^2 = 60$ *Sol.* $\partial z/\partial x = \dfrac{3x}{5z}$, $\partial z/\partial y = \dfrac{4y}{5z}$

(*b*) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 4yz + 8zx = 20$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x+y+4z}{4x+2y+z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x+y+2z}{4x+2y+z}$

(*c*) $x + 3y + 2z = \ln z$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z}{1-2z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{3z}{1-2z}$

(*d*) $z = e^x \cos(y+z)$ *Sol.* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{z}{1+e^x \operatorname{sen}(y+z)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-e^x \operatorname{sen}(y+z)}{1+e^x \operatorname{sen}(y+z)}$

(*e*) $\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(y+z) + \operatorname{sen}(z+x) = 1$

Sol. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\cos(x+y)+\cos(z+x)}{\cos(y+z)+\cos(z+x)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\cos(x+y)+\cos(y+z)}{\cos(y+z)+\cos(z+x)}$

10. Hallar las primeras y segundas derivadas parciales de z, siendo: $x^2 + 2yz + 2zx = 1$.

Sol. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{x+z}{x+y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{z}{x+y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{x-y+2z}{(x+y)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{x+2z}{(x+y)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2z}{(x+y)^2}$

11. Si $F(x,y,z) = 0$ demostrar que $\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} = -1$.

12. Si $z = f(x,y)$ y $g(x,y) = 0$, demostrar que $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial g}{\partial y}} J\left(\dfrac{f,g}{x,y}\right)$.

13. Si $f(x,y) = 0$, y $g(z,x) = 0$, demostrar que $\dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial z}$.

14. Hallar las primeras derivadas parciales de u y v con respecto a x e y, y las primeras derivadas parciales de x e y con respecto a u y v, siendo $2u - v + x^2 + xy = 0$, $u + 2v + xy - y^2 = 0$.

Sol. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{5}(4x+3y)$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{5}(2x-y)$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{5}(2y-3x)$, $\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{4y-x}{5}$

$\dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{4y-x}{2(x^2-2xy-y^2)}$, $\dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{y-2x}{2(x^2-2xy-y^2)}$, $\dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{3x-2y}{2(x^2-2xy-y^2)}$, $\dfrac{\partial y}{\partial v} = \dfrac{-4x-3y}{2(x^2-2xy-y^2)}$

15. Si $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$, $w = x^3 + y^3 + z^3$, demostrar que

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{yz}{(x-y)(x-z)}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{x+z}{2(x-y)(y-z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{1}{3(x-z)(y-z)}$$

Capítulo 59

Curvas y superficies en el espacio

TANGENTE Y PLANO NORMAL A UNA CURVA. Una curva en el espacio, se expresa en forma paramétrica mediante las ecuaciones

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \qquad (1)$$

La ecuación de la *tangente* a la curva en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ (determinado por $t = t_0$) es

$$\frac{x - x_0}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y - y_0}{\frac{dy}{dt}} = \frac{z - z_0}{\frac{dz}{dt}} \qquad (2)$$

y la ecuación del *plano normal* (pasa por P_0 y es perpendicular a la tangente) es

$$\frac{dx}{dt}(x - x_0) + \frac{dy}{dt}(y - y_0) + \frac{dz}{dt}(z - z_0) = 0 \qquad (3)$$

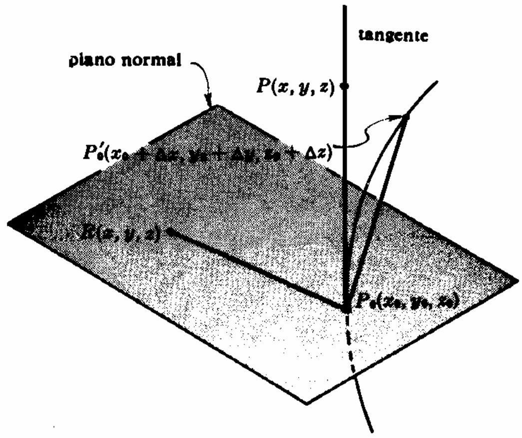

Fig. 59-1

En (*2*) y (*3*), las derivadas están particularizadas en el punto P_0.

(Ver Problemas 1-2.)

PLANO TANGENTE Y NORMAL A UNA SUPERFICIE. La ecuación del *plano tangente* a la superficie $F(x, y, z) = 0$ en uno de sus puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0 \qquad (4)$$

y la ecuación de la normal

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad (5)$$

Las derivadas parciales están particularizadas en el punto P_0. (Fig. 59-2.)

(Ver Problemas 3-9.)

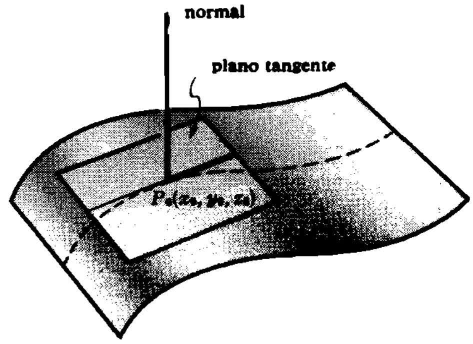

Fig. 59-2

UNA CURVA EN EL ESPACIO también se puede definir por las ecuaciones

$$F(x,y,z) = 0, \quad G(x,y,z) = 0 \qquad (6)$$

Las ecuaciones de la tangente a la curva en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}} \qquad (7)$$

y la ecuación del plano normal es

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}(z - z_0) = 0 \qquad (8)$$

En (7) y (8), las derivadas parciales están particularizadas en el punto P_0.

(Ver Problemas 10-11.)

Problemas resueltos

1. Deducir las ecuaciones (2) y (3) de la tangente y del plano normal a la superficie $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ determinado por el valor del parámetro $t = t_0$ (ver Fig. 59-1).

Sea $P'_0(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ otro punto de la curva correspondiente al valor $t = t_0 + \Delta t$. Cuando $P'_0 \to P_0$ a lo largo de la curva, la cuerda $P_0P'_0$ tiende a la tangente en P_0 como posición límite.

Las componentes de la cuerda $P_0P'_0$ son $[\Delta x, \Delta y, \Delta z]$. Dividiendo cada una de ellas por el incremento del parámetro resulta, $\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right]$. Ahora bien, cuando $P'_0 \to P_0$, $\Delta t \to 0$ y $\left[\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}\right] \to \left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right]$, que serán las componentes de un vector diferencial sobre la tangente en P_0. Por consiguiente, llamando $P(x, y, z)$ un punto genérico de la tangente, $[x - x_0, y - y_0, z - z_0]$ serán las componentes del vector P_0P. En resumen, la ecuación de la tangente pedida será:

$$\frac{x - x_0}{dx/dt} = \frac{y - y_0}{dy/dt} = \frac{z - z_0}{dz/dt}$$

Sea $R(x, y, z)$ un punto genérico del plano normal en P_0; como P_0R y P_0P son perpendiculares, la ecuación del plano normal en el punto P_0 es:

$$(x - x_0)\frac{dx}{dt} + (y - y_0)\frac{dy}{dt} + (z - z_0)\frac{dz}{dt} = 0$$

2. Hallar las ecuaciones de la tangente y del plano normal a:

(a) la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ en el punto $t = 1$,

(b) la curva $x = t - 2$, $y = 3t^2 + 1$, $z = 2t^3$ en el punto donde corta al plano yz.

(a) En el punto $t = 1$ o sea $(1, 1, 1)$, $dx/dt = 1$, $dy/dt = 2t = 2$, y $dz/dt = 3t^2 = 3$. Aplicando (2), la ecuación de la tangente es $\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3}$ y, aplicando (3), la ecuación del plano normal es $(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = x + 2y + 3z - 6 = 0$.

(b) La curva dada corta el plano yz en el punto en el que $x = t - 2 = 0$, es decir, en el punto $t = 2$, o sea $(0, 13, 16)$. En este punto, $dx/dt = 1$, $dy/dt = 6t = 12$, y $dz/dt = 6t^2 = 24$. La ecuación de la tangente es $\frac{x}{1} = \frac{y - 13}{12} = \frac{z - 16}{24}$ y la ecuación del plano normal es $x + 12(y - 13) + 24(z - 16) = x + 12y + 24z - 540 = 0$.

3. Deducir las ecuaciones *(4)* y *(5)* del plano tangente y de la normal a la superficie $F(x, y, z) = 0$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. (Ver Fig. 59-2).

Sean $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, las ecuaciones paramétricas de una curva de la superficie $F(x, y, z) = 0$ que pasa por el punto P_0. En este punto tendremos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = 0$$

en donde las derivadas están particularizadas en dicho punto P_0.

Esta relación expresa que la recta que pasa por P_0 de componentes (i) $\left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right]$ es perpendicular a la recta que, pasando también por P_0, tiene de componentes (ii) $\left[\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right]$. Las componentes (i) pertenecen a la tangente a la curva situada en el plano tangente a la superficie, y las componentes (ii) son las de la normal a la superficie en el punto P_0. La ecuación de esta normal es

$$\frac{x - x_0}{\partial F/\partial x} = \frac{y - y_0}{\partial F/\partial y} = \frac{z - z_0}{\partial F/\partial z}$$

y la ecuación del plano tangente en P_0 es

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0$$

En los Problemas 4-5, hallar las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las superficies dadas en los puntos indicados.

4. $z = 3x^2 + 2y^2 - 11$; $(2, 1, 3)$.

Ponemos $F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 - z - 11 = 0$. En $(2, 1, 3)$: $\frac{\partial F}{\partial x} = 6x = 12$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 4y = 4$, y $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$.

La ecuación del plano tangente es $12(x - 2) + 4(y - 1) - (z - 3) = 0$, o sea $12x + 4y - z = 25$.

La ecuación de la normal es $\frac{x - 2}{12} = \frac{y - 1}{4} = \frac{z - 3}{-1}$.

5. $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 3xy - 10yz + 4x - 5z - 22 = 0$; $(1, -2, 1)$.

En $(1, -2, 1)$: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 3y + 4 = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 6y + 3x - 10z = -19$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -8z - 10y - 5 = 7$.

La ecuación del plano tangente es $0(x - 1) - 19(y + 2) + 7(z - 1) = 0$, o sea $19y - 7z + 45 = 0$.

La ecuación de la normal es $\frac{x - 1}{0} = \frac{y + 2}{-19} = \frac{z - 1}{7}$, o sea $x = 1$, $7y + 19z - 5 = 0$.

6. Demostrar que la ecuación del plano tangente a la superficie $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1$.

En P_0: $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x_0}{a^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{2y_0}{b^2}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{2z_0}{c^2}$.

La ecuación del plano tangente es $\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) - \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) - \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$.

que se reduce a $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} = 1$, ya que P_0 pertenece a la superficie.

7. Demostrar que las superficies

$F(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 4 = 0$ y $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y + 2z + 10 = 0$ son tangentes en el punto $(2, 1, 1)$.

Tendremos que demostrar que las dos superficies tienen el mismo plano tangente en el punto dado.

En $(2, 1, 1)$: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x = 4$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 8y = 8$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -8z = -8$ y

$\frac{\partial G}{\partial x} = 2x - 6 = -2$, $\frac{\partial G}{\partial y} = 2y - 6 = -4$, $\frac{\partial G}{\partial z} = 2z + 2 = 4$.

Como las componentes $[4, 8, -8]$ y $[-2, -4, 4]$ de las normales a las dos superficies son proporcionales, ambas tienen el mismo plano tangente,

$$1(x - 2) + 2(y - 1) - 2(z - 1) = 0 \quad \text{ó} \quad x + 2y - 2z = 2$$

8. Demostrar que las superficies $F(x, y, z) = xy + yz - 4zx = 0$ y $G(x, y, z) = 3z^2 - 5x + y = 0$ se cortan ortogonalmente en el punto (1, 2, 1).

Hemos de demostrar que los planos tangentes a las superficies, en dicho punto, son perpendiculares, o bien, que las normales a las superficies, en ese punto, son perpendiculares

En (1, 2, 1): $\dfrac{\partial F}{\partial x} = y - 4z = -2$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = x + z = 2$, y $\dfrac{\partial F}{\partial z} = y - 4x = -2$. Las componentes de la normal a $F(x, y, z) = 0$ son $[l_1, m_1, n_1] = [1, -1, 1]$.

En (1, 2, 1): $\dfrac{\partial G}{\partial x} = -5$, $\dfrac{\partial G}{\partial y} = 1$, y $\dfrac{\partial G}{\partial z} = 6z = 6$. Las componentes de la normal a $G(x, y, z) = 0$ son $[l_2, m_2, n_2] = [-5, 1, 6]$.

Como $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 1(-5) + (-1)1 + 1(6) = 0$, dichas rectas son perpendiculares.

9. Demostrar que las superficies $F(x, y, z) = 3x^2 + 4y^2 + 8z^2 - 36 = 0$ y $G(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 6 = 0$ se cortan en ángulo recto.

En un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ común a las dos superficies:

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 6x_0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 8y_0$, $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 16z_0$, y $[3x_0, 4y_0, 8z_0]$ son las componentes de la normal a la superficie en P_0.

Análogamente, $[x_0\ 2y_0, -4z_0]$ son las componentes de la normal a $G(x, y, z) = 0$ en P_0.

Como $3x_0(x_0) + 4y_0(2y_0) + 8z_0(-4z_0) = 3x_0^2 + 8y_0^2 - 32z_0^2$

$$= 6(x_0^2 + 2y_0^2 - 4z_0^2) - (3x_0^2 + 4y_0^2 + 8z_0^2) = 6(6) - 36 = 0,$$

dichas direcciones son perpendiculares.

10. Deducir las ecuaciones (7) y (8) de la tangente y del plano normal a la curva alabeada C: $F(x, y, z) = 0$, $G(x, y, z) = 0$ en uno de sus puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

En P_0 las direcciones $\left[\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z}\right]$ y $\left[\dfrac{\partial G}{\partial x}, \dfrac{\partial G}{\partial y}, \dfrac{\partial G}{\partial z}\right]$ son, respectivamente, perpendiculares a los planos tangentes a las superficies $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$. Como la dirección

$$\left[\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix}\right]$$

es perpendicular a dichas direcciones, será la de la tangente a C en P_0. Por tanto, la ecuación de la tangente es

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix}}$$

y la ecuación del plano normal es

$$\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix}(z - z_0) = 0$$

11. Hallar las ecuaciones de la tangente y del plano normal a la curva $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $x + y + z = 6$ en el punto (1, 2, 3).

Sea $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$ y $G(x, y, z) = x + y + z - 6 = 0$. En (1, 2, 3):

$$\begin{vmatrix} \partial F/\partial y & \partial F/\partial z \\ \partial G/\partial y & \partial G/\partial z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\begin{vmatrix} \partial F/\partial z & \partial F/\partial x \\ \partial G/\partial z & \partial G/\partial x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \qquad \begin{vmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

Como $[1, -2, 1]$ son componentes de la tangente, su ecuación es $\dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y - 2}{-2} = \dfrac{z - 3}{1}$ y la ecuación del plano normal es $(x - 1) - 2(y - 2) + (z - 3) = x - 2y + z = 0$.

Problemas propuestos

12. Hallar las ecuaciones de la tangente y del plano normal a las curvas dadas en el punto indicado:

(*a*) $x = 2t,\ y = t^2,\ z = t^3;\ t = 1$ *Sol.* $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-1}{3};\quad 2x + 2y + 3z - 9 = 0$

(*b*) $x = te^t,\ y = e^t,\ z = t;\ t = 0$ *Sol.* $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1};\quad x + y + z - 1 = 0$

(*c*) $x = t\cos t,\ y = t \operatorname{sen} t,\ z = t;\ t = 0$ *Sol.* $x = z,\ y = 0;\quad x + z = 0$

13. Demostrar que las curvas (i) $x = 2 - t$, $y = -1/t$, $z = 2t^2$ y (ii) $x = 1 + \theta$, $y = \operatorname{sen}\theta - 1$, $z = 2\cos\theta$ se cortan en ángulo recto en $P(1, -1, 2)$. Obtener las ecuaciones de la tangente y del plano normal a cada curva en P.

Sol. (i) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{4};\quad x - y - 4z + 6 = 0$ (ii) $x - y = 2,\ z = 2;\quad x + y = 0$

14. Demostrar que las tangentes a la hélice $x = a\cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $z = bt$ cortan al plano xy formando el mismo ángulo.

15. Demostrar que la longitud de la curva (1) desde el punto $t = t_0$ hasta el $t = t_1$ viene dada por

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Calcular la longitud de la hélice del Problema 14 desde $t = 0$ a $t = t_1$. *Sol.* $\sqrt{a^2 + b^2}\, t_1$.

16. Hallar las ecuaciones de la tangente y del plano normal a las curvas dadas en el punto indicado:

(*a*) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 5,\ 3x - 2y - z = 0;\ (1, 1, 1)$

(*b*) $9x^2 + 4y^2 - 36z = 0,\ 3x + y + z - z^2 - 1 = 0;\ (2, -3, 2)$ (*c*) $4z^2 = xy,\ x^2 + y^2 = 8z;\ (2, 2, 1)$

Sol. (*a*) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{7} = \dfrac{z-1}{-8};\quad 2x + 7y - 8z - 1 = 0$

(*b*) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{z-2}{1},\ y + 3 = 0;\quad x + z - 4 = 0$ (*c*) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{-1},\ z - 1 = 0;\quad x - y = 0$

17. Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la normal a las superficies dadas en el punto indicado:

(*a*) $x^2 + y^2 + z^2 = 14;\ (1, -2, 3)$ *Sol.* $x - 2y + 3z = 14;\quad \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{3}$

(*b*) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2;\ (x_1, y_1, z_1)$ *Sol.* $x_1x + y_1y + z_1z = r^2;\quad \dfrac{x-x_1}{x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_1}$

(*c*) $x^2 + 2z^2 = 3y^2;\ (2, -2, -2)$ *Sol.* $x + 3y - 2z = 0;\quad \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z+2}{-2}$

(*d*) $2x^2 + 2xy + y^2 + z + 1 = 0;\ (1, -2, -3)$ *Sol.* $z - 2y = 1;\quad x - 1 = 0,\ \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$

(*e*) $z = xy;\ (3, -4, -12)$ *Sol.* $4x - 3y + z = 12;\quad \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+4}{-3} = \dfrac{z+12}{1}$

18. (*a*) Demostrar que la suma de los segmentos interceptados sobre los ejes coordenados por el plano tangente a la superficie $x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} = a^{1/2}$ en uno de sus puntos es igual a a.

(*b*) Demostrar que la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los segmentos interceptados sobre los ejes coordenados por el plano tangente a la superficie $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$ en uno de sus puntos es a.

19. Demostrar que las superficies dadas son tangentes en los puntos indicados:

(*a*) $x^2 + y^2 + z^2 = 18,\ xy = 9;\ (3, 3, 0)$.

(*b*) $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0,\ x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9;\ (2, 1, 1)$.

20. Demostrar que las superficies dadas son perpendiculares en los puntos indicados:

(*a*) $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 8,\ 4x^2 - y^2 + 2z^2 = 14;\ (2, 2, 1)$.

(*b*) $x^2 + y^2 + z^2 = 50,\ x^2 + y^2 - 10z + 25 = 0;\ (3, 4, 5)$.

21. Demostrar que cada una de las superficies (i) $14x^2 + 11y^2 + 8z^2 = 66$, (ii) $3z^2 - 5x + y = 0$, (iii) $xy + yz - 4zx = 0$ es perpendicular a las otras dos en el punto $(1, 2, 1)$.

Capítulo 60

Derivadas según una dirección
Máximos y mínimos

DERIVADAS SEGUN UNA DIRECCION. Sea la superficie $z = f(x, y)$ y $P(x, y, z)$ un punto de la misma. Trazando por este punto (Fig. 60-1) planos paralelos a los coordenados xOz e yOz, cortarán a la superficie según las curvas PR y PS, y al plano xOy según las rectas $P'M$ y $P'N$.

Las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ particularizadas en el punto P, o bien en $P'(x, y)$, representan la variación de $z = P'P$ cuando permanecen constantes y y x respectivamente, es decir, la variación de z según las direcciones de los ejes x e y, o sea, las pendientes de las curvas PR y PS en el punto P.

Consideremos, ahora, un plano que pase por P y sea perpendicular al plano xOy formando un ángulo θ con el eje x. Si PQ y $P'L$ son las intersecciones de este plano con la superficie, la *derivada según la dirección* θ de $f(x, y)$ en P (o en P') viene dada por

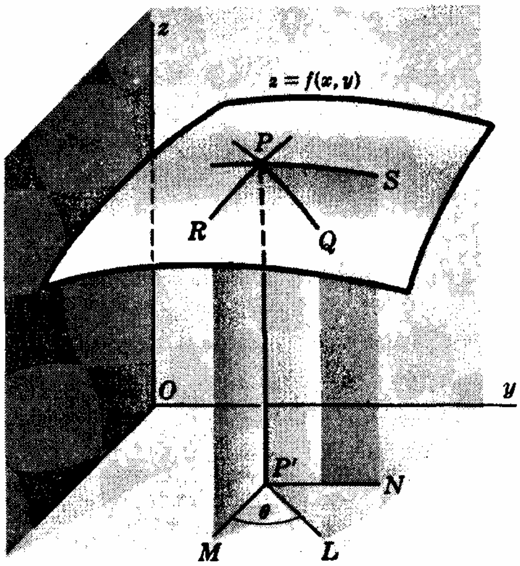

Fig. 60-1

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\theta \qquad (1)$$

La derivada según la dirección representa la variación de $z = P'P$ en la dirección de $P'L$, esto es, la pendiente de la curva PQ en P.

La derivada según una dirección en un punto P es una función de θ. Si existe una dirección según la cual la derivada en P tiene un máximo relativo, este valor recibe el nombre de *gradiente* de la función $f(x, y)$ en P. El gradiente, pues, es la pendiente de la tangente más inclinada que se puede trazar a la superficie en el punto P.

(Ver Problemas 1-8.)

Dada la función $w = F(x, y, z)$, la derivada en un punto $P(x, y, z)$ según la dirección (α, β, γ), viene dada por

$$\frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma \qquad (2)$$

(Ver Problema 9.)

MAXIMOS Y MINIMOS. Supongamos que $z = f(x, y)$ tiene un máximo (o un mínimo) en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Cualquier plano que pase por P_0 y sea perpendicular al plano xOy, corta a la superficie según una curva que tendrá un máximo (o un mínimo) en el punto P_0, es decir, la derivada direccional $\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$, de $z = f(x, y)$ debe ser igual a 0 en P_0 cualquiera que sea el valor de θ. Por tanto, en P_0, $\partial f/\partial x = 0$ y $\partial f/\partial y = 0$.

Los puntos en los cuales $z = f(x, y)$ tiene un máximo (o un mínimo) son aquellos (x_0, y_0) en los que se verifiquen simultáneamente las ecuaciones $\partial f/\partial x = 0$ y $\partial f/\partial y = 0$. Veamos los distintos casos que se pueden presentar:

Supongamos que $z = f(x, y)$ tengan primera y segunda derivadas parciales en una cierta región en torno al punto (x_0, y_0, z_0) en el que $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ son nulas. Si $\Delta = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) < 0$ en P_0, $z = f(x, y)$ tiene

$$\text{un mínimo relativo en } P_0 \text{ si } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$$

y

$$\text{un máximo relativo en } P_0 \text{ si } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$$

Si $\Delta > 0$, no habrá en P_0 ni máximo ni mínimo; si $\Delta = 0$ la naturaleza del punto crítico P_0 es indeterminada.

(Ver Problemas 10-15.)

Problemas resueltos

1. En la Fig. 60-1, sea $P''(x + \Delta x, y + \Delta y)$ un segundo punto de $P'L$, y representemos por Δs la distancia $P'P''$. Suponiendo que las primeras derivadas parciales de $z = f(x, y)$ sean continuas, según el Problema 20 del Capítulo 57, tendremos

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

donde ϵ_1 y $\epsilon_2 \to 0$ cuando Δx y $\Delta y \to 0$. El valor medio de la variación de z entre los puntos P' y P'' es

$$\begin{aligned}\frac{\Delta z}{\Delta s} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s} + \epsilon_1\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s} + \epsilon_2\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s}\\ &= \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\theta + \epsilon_1\cos\theta + \epsilon_2\operatorname{sen}\theta\end{aligned}$$

siendo θ el ángulo que la recta $P'P''$ forma con el eje x. Ahora bien, como $P'' \to P'$ a lo largo de $P'L$, la variación instantánea de z, es decir, la derivada direccional en P', es

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$$

2. Hallar la derivada de $z = x^2 - 6y^2$ en el punto $P'(7,2)$ según la dirección (*a*) $\theta = 45°$, (*b*) $\theta = 135°$.

La derivada en un punto $P'(x, y)$ según la dirección θ es

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\operatorname{sen}\theta = 2x\cos\theta - 12y\operatorname{sen}\theta$$

(*a*) En $P'(7,2)$ en la dirección $\theta = 45°$: $dz/ds = 2\cdot 7(\frac{1}{2}\sqrt{2}) - 12\cdot 2(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -5\sqrt{2}$.
(*b*) En $P'(7,2)$ en la dirección $\theta = 135°$: $dz/ds = 2\cdot 7(-\frac{1}{2}\sqrt{2}) - 12\cdot 2(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = -19\sqrt{2}$.

3. Calcular la derivada de $z = ye^x$ en el punto $P'(0, 3)$ en la dirección (*a*) $\theta = 30°$, (*b*) $\theta = 120°$.

$$\frac{dz}{ds} = ye^x\cos\theta + e^x\operatorname{sen}\theta$$

(*a*) En el punto (0, 3) en la dirección $\theta = 30°$: $dz/ds = 3\cdot 1(\frac{1}{2}\sqrt{3}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} + 1)$.
(*b*) En el punto (0, 3) en la dirección $\theta = 120°$ $dz/ds = 3\cdot 1(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{3})$.

4. La temperatura T de un disco circular en uno de sus puntos (x, y) viene dada por $T = \dfrac{64}{x^2 + y^2 + 2}$, siendo el origen de coordenadas el centro del disco. Hallar, en el punto(1, 2), la variación de T con respecto a s según la dirección $\theta = \pi/3$.

$$\frac{dT}{ds} = -\frac{64(2x)}{(x^2 + y^2 + 2)^2}\cos\theta - \frac{64(2y)}{(x^2 + y^2 + 2)^2}\operatorname{sen}\theta$$

En el punto (1, 2) en la dirección $\theta = \pi/3$: $\dfrac{dT}{ds} = -\dfrac{128}{49}\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{256}{49}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{64}{49}(1 + 2\sqrt{3})$.

5. El potencial eléctrico V en un punto (x, y) viene dado por $V = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$. Hallar la variación de V con respecto a s en el punto (3, 4) según la dirección del punto (2, 6).

$$\frac{dV}{ds} = \frac{x}{x^2 + y^2}\cos\theta + \frac{y}{x^2 + y^2}\operatorname{sen}\theta$$

Como θ es un ángulo del segundo cuadrante $\operatorname{tag}\theta = \dfrac{6-4}{2-3} = -2$, $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, y $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Por tanto, en (3, 4) en la dirección indicada, $\dfrac{dV}{ds} = \dfrac{3}{25}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) + \dfrac{4}{25}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{\sqrt{5}}{25}$.

6. Calcular el gradiente de la superficie del Problema 2 en el punto indicado.

En el punto (7, 2) en la dirección θ, $dz/ds = 14\cos\theta - 24\operatorname{sen}\theta$.

Para hallar el valor de θ para el cual $\dfrac{dz}{ds}$ es máxima, tenemos $\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dz}{ds}\right) = -14\operatorname{sen}\theta - 24\cos\theta = 0$.

Por tanto, $\operatorname{tag}\theta = -24/14 = -12/7$ y θ es un ángulo del segundo o del cuarto cuadrante. Si es del segundo cuadrante, $\operatorname{sen}\theta = 12/\sqrt{193}$ y $\cos\theta = -7/\sqrt{193}$. Si fuera del cuarto, $\operatorname{sen}\theta = -12/\sqrt{193}$ y $\cos\theta = 7/\sqrt{193}$.

Como $\dfrac{d^2}{d\theta^2}\left(\dfrac{dz}{ds}\right) = \dfrac{d}{d\theta}(-14\operatorname{sen}\theta - 24\cos\theta) = -14\cos\theta + 24\operatorname{sen}\theta$ es negativo para un ángulo del cuarto cuadrante, el gradiente es $\dfrac{dz}{ds} = 14\left(\dfrac{7}{\sqrt{193}}\right) - 24\left(-\dfrac{12}{\sqrt{193}}\right) = 2\sqrt{193}$ y la dirección es $\theta = 300°\,15'$.

7. Hallar el gradiente de la superficie del Problema 3 en el punto indicado.

En el punto (0, 3) en la dirección θ, $dz/ds = 3\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$.

Para hallar el valor de θ para el cual $\dfrac{dz}{ds}$ es máxima, tenemos $\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dz}{ds}\right) = -3\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = 0$.

Luego $\operatorname{tag}\theta = 1/3$ y θ es un ángulo del primero o tercer cuadrante.

Como $\dfrac{d^2}{d\theta^2}\left(\dfrac{dz}{ds}\right) = \dfrac{d}{d\theta}(-3\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) = -3\cos\theta - \operatorname{sen}\theta$ es negativo para un ángulo del primer cuadrante, el gradiente es $\dfrac{dz}{ds} = 3\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right) + \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$ y la dirección es $\theta = 18°\,26'$

8. En el Problema 5, demostrar que la variación del potencial V con respecto a s es máxima a lo largo de rectas que pasan por el origen.

En un punto (x_1, y_1) en la dirección θ, $\dfrac{dV}{ds} = \dfrac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}\cos\theta + \dfrac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}\operatorname{sen}\theta$.

Cuando $\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dV}{ds}\right) = -\dfrac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}\operatorname{sen}\theta + \dfrac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}\cos\theta = 0$, $\quad \operatorname{tag}\theta = \dfrac{y_1/(x_1^2 + y_1^2)}{x_1/(x_1^2 + y_1^2)} = \dfrac{y_1}{x_1}$.

Por tanto, θ es el ángulo de inclinación de la recta que une el origen con el punto (x_1, y_1).

9. Hallar la derivada de $F(x, y, z) = xy + 2xz - y^2 + z^2$ en el punto $(1, -2, 1)$ a lo largo de la curva $x = t$, $y = t - 3$, $z = t^2$ en la dirección creciente de z.

Las componentes de la tangente a la curva en $(1, -2, 1)$ son $[1, 1, 2]$ y los cosenos directores son $[1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}]$. La derivada en esa dirección es

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial F}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial F}{\partial z}\cos\gamma = 0\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} + 5\cdot\frac{1}{\sqrt{6}} + 4\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{13\sqrt{6}}{6}$$

10. Hallar los máximos y mínimos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$.

Las condiciones $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y + 6 = 0$ se satisfacen cuando $x = 2$, $y = -3$.

Como $f(x, y) = (x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) + 25 - 4 - 9 = (x-2)^2 + (y+3)^2 + 12$, es evidente que $f(2, -3) = 12$ es un mínimo de la función.

Geométricamente, $(2, -3, 12)$ es el mínimo de la superficie $z = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$.

11. Hallar los máximos y mínimos de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$.

Las condiciones $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 + y) = 0$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 3(y^2 + x) = 0$ se satisfacen cuando $x = 0,\ y = 0$ y cuando $x = -1, y = -1$.

En (0, 0): $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 3$, y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y = 0$. Luego $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9 > 0$, y en (0, 0) no hay máximo ni mínimo.

En (—1, —1): $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6$. Luego $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}\right)^2 - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -27 < 0$, y

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0$. Por tanto, $f(-1, -1) = 1$ es el máximo de la función.

12. Dividir 120 en tres partes de manera que la suma de los productos tomados de dos en dos sea máxima.

Sean x, y y $120 - (x + y)$ las tres partes.

Tendremos que hallar el máximo de $S = xy + (x + y)(120 - x - y)$.

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y + (120 - x - y) - (x + y) = 120 - 2x - y, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = x + (120 - x - y) - (x + y) = 120 - x - 2y.$$

Cuando $\dfrac{\partial S}{\partial x} = \dfrac{\partial S}{\partial y} = 0$, tenemos $2x + y = 120$ y $x + 2y = 120$.

Luego $x = 40$, $y = 40$, $120 - (x + y) = 40$ son las tres partes, y $S = 3 \cdot 40^2 = 4\,800$.

Para la solución 1, 1, 118, $S = 237$; evidentemente, $S = 4\,800$ es el valor máximo.

13. Determinar el punto del plano $2x - y + 2z = 16$ más próximo al origen.

Sea (x, y, z) el punto buscado; el cuadrado de su distancia al origen es $D = x^2 + y^2 + z^2$. Como $2x - y + 2z = 16$, $y = 2x + 2z - 16$ será $D = x^2 + (2x + 2z - 16)^2 + z^2$.

Las condiciones $\partial D/\partial x = 2x + 4(2x + 2z - 16) = 0$ y $\partial D/\partial z = 4(2x + 2z - 16) + 2z = 0$ son equivalentes a $5x + 4z = 32$, $4x + 5z = 32$ y $x = z = 32/9$. Como sabemos que existe un punto para el cual D es mínimo $(32/9, -16/9, 32/9)$ es el punto buscado.

14. Demostrar que el paralelepípedo de área total S constante de volumen V máximo es un cubo.

Sean las dimensiones x, y y z. Será $V = xyz$ y $S = 2(xy + yz + zx)$.

De la segunda ecuación se despeja z y se sustituye en la primera, con lo cual, resulta V en función de x e y. Todavía se puede resolver más fácilmente, si se considera a z como una función de x e y. Tendremos

$$\frac{\partial V}{\partial x} = yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = 0 = 2\left(y + z + x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 0 = 2\left(x + z + x\frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

De las dos últimas, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y + z}{x + y}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x + z}{x + y}$.

Luego las condiciones $\dfrac{\partial V}{\partial x} = yz - \dfrac{xy(y + z)}{x + y} = 0$ y $\dfrac{\partial V}{\partial y} = xz - \dfrac{xy(x + z)}{x + y} = 0$ se reducen a $y^2(z - x) = 0$ y $x^2(z - y) = 0$. Por tanto, $x = y = z$, como queríamos demostrar.

15. Calcular el volumen V del paralelepípedo recto de mayor volumen que se puede inscribir en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Sea $P(x, y, z)$ un vértice, en el primer octante. Tendremos $V = 8xyz$.

Consideremos a z como una función, de las variables independientes x e y, dada por la ecuación del elipsoide. Las condiciones necesarias para un máximo son:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 8\left(yz + xy\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 8\left(xz + xy\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \qquad (1)$$

De la ecuación del elipsoide obtenemos $\dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{2z}{c^2} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ y $\dfrac{2y}{b^2} + \dfrac{2z}{c^2} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Eliminando $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ entre estas relaciones y (*1*) obtenemos

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 8\left(yz - \frac{c^2x^2y}{a^2z}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 8\left(xz - \frac{c^2xy^2}{b^2z}\right) = 0$$

y finalmente
$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{y^2}{b^2} \qquad (2)$$

Combinando (*2*) con la ecuación del elipsoide llegamos a $x = a\sqrt{3}/3$, $y = b\sqrt{3}/3$, y $z = c\sqrt{3}/3$. Luego $V = 8xyz = (8\sqrt{3}/9)abc$ unidades de volumen.

Problemas propuestos

16. Hallar las derivadas de las funciones siguientes en los puntos dados y en las direcciones indicadas: (*a*) $z = x^2 + xy + y^2$, $(3, 1)$, $\theta = \pi/3$. (*b*) $z = x^3 + y^3 - 3xy$, $(2, 1)$, $\theta = \text{arc tag } 2/3$. (*c*) $z = y + x\cos xy$, $(0, 0)$, $\theta = \pi/3$. (*d*) $z = 2x^2 + 3xy - y^2$, $(1, -1)$, en la dirección del punto $(2, 1)$. *Sol.* (*a*) $\frac{1}{2}(7 + 5\sqrt{3})$, (*b*) $21\sqrt{13}/13$, (*c*) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3})$, (*d*) $11\sqrt{5}/5$.

17. Determinar el gradiente de las funciones del Problema 16 en los puntos dados.
Sol. (*a*) $\sqrt{74}$, (*b*) $3\sqrt{10}$, (*c*) $\sqrt{2}$, (*d*) $\sqrt{26}$.

18. Demostrar que el gradiente de $V = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ del Problema 8 es constante a lo largo de un círculo $x^2 + y^2 = r^2$.

19. Dada la superficie $z = 8 - 4x^2 - 2y^2$, hallar (*a*) la dirección de la máxima pendiente en el punto $(1, 1, 2)$ y (*b*) la dirección de la tangente a la curva de nivel z = constante. Obsérvese que ambas direcciones son perpendiculares.
Sol. (*a*) arc tag $\frac{1}{2}$, tercer cuadrante; (*b*) arc tag -2.

20. Demostrar que la suma de los cuadrados de las derivadas de $z = f(x, y)$ en uno cualquiera de sus puntos y en dos direcciones perpendiculares, es igual al cuadrado del gradiente.

21. Sean las funciones $z = f(x, y)$ y $w = g(x, y)$ de forma que $\partial z/\partial x = \partial w/\partial y$ y $\partial z/\partial y = -\partial w/\partial x$. Si θ_1 y θ_2 son dos direcciones perpendiculares, demostrar que, en un punto cualquiera $P(x, y)$, $\partial z/\partial s_1 = \partial w/\partial s_2$ y $\partial z/\partial s_2 = -\partial w/\partial s_1$.

22. Hallar la derivada de las funciones siguientes en los puntos dados y en las direcciones indicadas: (*a*) xy^2z, $(2, 1, 3)$, $[1, -2, 2]$. (*b*) $x^2 + y^2 + z^2$, $(1, 1, 1)$, en la dirección del punto $(2, 3, 4)$. (*c*) $x^2 + y^2 - 2xz$, $(1, 3, 2)$, a lo largo de $x^2 + y^2 - 2xz = 6$, $3x^2 - y^2 + 3z = 0$ en la dirección creciente de z.
Sol. (*a*) $-17/3$ (*b*) $6\sqrt{14}/7$ (*c*) 0

23. Hallar los máximos y mínimos de las funciones:

(*a*)	$z = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$	*Sol.* Máx. $= 2$ para $x = 1$, $y = 2$
(*b*)	$z = x^3 + y^3 - 3xy$	*Sol.* Mín. $= -1$ para $x = 1$, $y = 1$
(*c*)	$z = x^2 + 2xy + 2y^2$	*Sol.* Mín. $= 0$ para $x = 0$, $y = 0$
(*d*)	$z = (x - y)(1 - xy)$	*Sol.* No tiene máx. ni mín.
(*e*)	$z = 2x^2 + y^2 + 6xy + 10x - 6y + 5$	*Sol.* No tiene máx. ni mín.
(*f*)	$z = 3x - 3y - 2x^3 - xy^2 + 2x^2y + y^3$	*Sol.* Mín. $= -\sqrt{6}$ para $x = -\sqrt{6}/6$, $y = \sqrt{6}/3$; máx. $= \sqrt{6}$ para $x = \sqrt{6}/6$, $y = -\sqrt{6}/3$
(*g*)	$z = xy(2x + 4y + 1)$	*Sol.* Máx. $= 1/216$ para $x = -1/6$, $y = -1/12$

24. Determinar tres números positivos x, y, z tales que:

(*a*) $x + y + z = 18$ y xyz sea máximo.
(*b*) $xyz = 27$ y $x + y + z$ sea mínimo.
(*c*) $x + y + z = 20$ y xyz^2 sea máximo.
(*d*) $x + y + z = 12$ y xy^2z^3 sea máximo.

Sol. (*a*) $x = y = z = 6$, (*b*) $x = y = z = 3$, (*c*) $x = y = 5$, $z = 10$, (*d*) $x = 2$, $y = 4$, $z = 6$

25. Calcular el mínimo valor del cuadrado de la distancia del origen al plano $Ax + By + Cz + D = 0$.
Sol. $D^2/(A^2 + B^2 + C^2)$

26. (*a*) Hallar el máximo volumen de una caja paralelepipédica sin tapa superior cuya área total es de 108 metros cuadrados.
(*b*) Hallar la mínima área total de una caja paralelepipédica sin tapa superior de 500 metros cúbicos de volumen.
Sol. (*a*) 108 m³, (*b*) 300 m².

27. Determinar el punto de $z = xy - 1$ más próximo al origen. *Sol.* $(0, 0, -1)$.

28. Hallar la ecuación del plano que pase por el punto $(1, 1, 2)$ y determine, en el primer octante, un volumen mínimo.
Sol. $2x + 2y + z = 6$.

29. Determinar los valores de p y q de tal forma que la suma S de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos $(0, 2)$, $(1, 3)$, y $(2, 5)$ a la recta $y = px + q$ sea mínima.
Ind. $S = (q - 2)^2 + (p + q - 3)^2 + (2p + q - 5)^2$. *Sol.* $p = 3/2$, $q = 11/6$.

Capítulo 61

Vectores en el espacio

EL ESTUDIO DE LA GEOMETRIA ANALITICA PLANA mediante el cálculo vectorial es, normalmente, complejo debido a que los problemas que en ella se presentan se pueden resolver teniendo en cuenta el concepto de pendiente. Por el contrario, el estudio de la geometría analítica en el espacio se facilita enormemente introduciendo el concepto y álgebra vectorial.

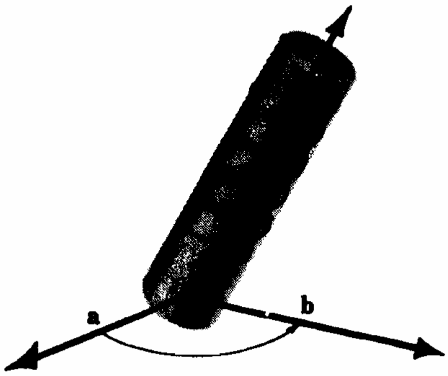

Fig. 61-1

Tres vectores **a**, **b**, **c** con el mismo origen no situados en un mismo plano ni paralelos dos a dos, forman un *triedro a derechas* si el sentido de **c** coincide con el de avance de un sacacorchos cuyo movimiento de rotación sea de **a** a **b** (Fig. 61-1). También se verifica que el sentido de **b** corresponde al de avance cuando la rotación sea de **c** a **a** y el de **a**, con el de avance cuando la rotación tiene lugar de **b** a **c**.

Supongamos que los ejes de coordenadas forman un triedro trirrectángulo a derechas (Fig. 61-2), y sean **i**, **j**, **k** los vectores unitarios según los semiejes positivos *x*, *y*, y *z*, respectivamente. Teniendo en cuenta lo dicho en el Capítulo 18, un vector libre cualquiera **a** se puede expresar en la forma

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

y si $P(x, y, z)$ es un punto cualquiera del espacio, el vector de posición **r** de P es

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{OP} = \mathbf{OB} + \mathbf{BP} = \mathbf{OA} + \mathbf{AB} + \mathbf{BP} \qquad (1)\\ &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\end{aligned}$$

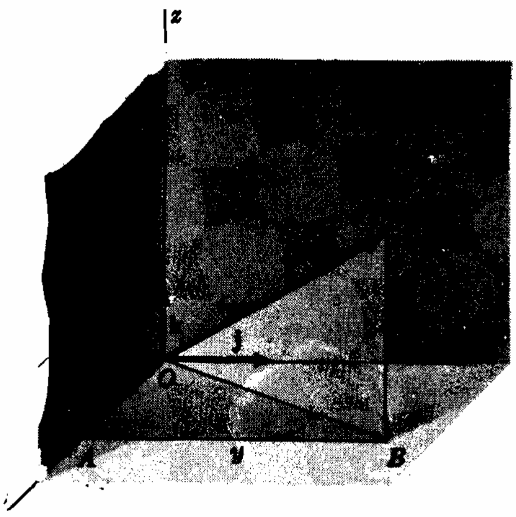

Fig. 61-2

Toda el álgebra expuesta en el Capítulo 18 es válida en este capítulo con la diferencia de que, ahora, hemos de tener en cuenta una dimensión más. Así, pues, si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, tendremos

$k\mathbf{a} = ka_1\mathbf{i} + ka_2\mathbf{j} + ka_3\mathbf{k}$ siendo k un escalar cualquiera

$\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si y sólo si $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$

$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_1 \pm b_1)\mathbf{i} + (a_2 \pm b_2)\mathbf{j} + (a_3 \pm b_3)\mathbf{k}$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos\theta$, siendo θ el menor ángulo de los formados por **a** y **b**

$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1;\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$

$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ si $\mathbf{a} = 0$, o $\mathbf{b} = 0$, o si **a** y **b** son perpendiculares.

De (*1*), obtenemos

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (2a)$$

para la distancia del punto $P(x, y, z)$ al origen. También si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos cualesquiera (ver Fig. 61-3)

$$\mathbf{P_1P_2} = \mathbf{P_1B} + \mathbf{BP_2} = \mathbf{P_1A} + \mathbf{AB} + \mathbf{BP_2}$$
$$= (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$$

y

$$|\mathbf{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (2b)$$

es la fórmula que nos da la distancia entre dos puntos. (Ver Problemas 1-3.)

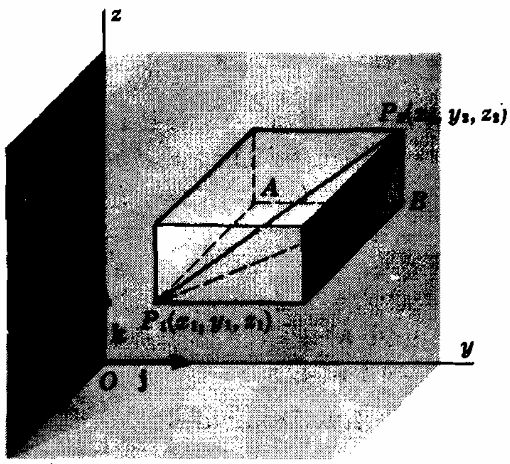

Fig. 61-3

COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR. Sean α, β, γ, los ángulos que un vector $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ forma, respectivamente, con los semiejes positivos x, y y z, como se representa en la Fig. 61-4. De

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{i}|\,|\mathbf{a}|\cos\alpha = |\mathbf{a}|\cos\alpha$$
$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\beta, \qquad \mathbf{k}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\gamma$$

tenemos

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{i}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \qquad \cos\beta = \frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}$$

Estos son los *cosenos directores* de **a**. Como

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{|\mathbf{a}|^2} = 1$$

el vector $\mathbf{u} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$ es un vector unitario paralelo a **a**.

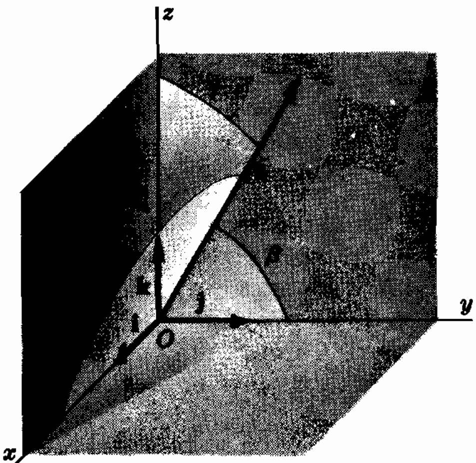

Fig. 61-4

VECTOR PERPENDICULAR A OTROS DOS. Sean

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

dos vectores no paralelos con el origen común P. Es fácil de demostrar que el vector

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

es perpendicular a **a** y **b** y, por tanto, al plano que forman.

En los Problemas 5 y 6 se demuestra que

$$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta$$
$$= \text{el área del paralelogramo que tiene a } \mathbf{a} \text{ y } \mathbf{b} \text{ como lados no paralelos.} \qquad (4)$$

En el caso de que los vectores **a** y **b** sean paralelos, $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ y, según (*3*), se deduce que $\mathbf{c} = 0$, es decir, **c** es un vector nulo. Un vector nulo, por definición, tiene de módulo 0 y dirección y sentido sin especificar.

PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES. Sean

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

dos vectores con el mismo origen P y $\mathbf{n}$ el vector unitario normal al plano formado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, con un sentido tal que $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{n}$ forman un triedro a derechas de origen P, como se representa en la Fig. 61-5. *El producto vectorial* de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es, por definición,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{n} \qquad (5)$$

siendo θ el menor de los ángulos formados por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Por tanto, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es un vector perpendicular a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

Como se ve en el Problema 6,

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,\text{sen}\,\theta$$

representa el área del paralelogramo que tiene a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ por lados no paralelos.

Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos, $\theta = 0$ o π, y $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = 0$. Por tanto,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \qquad (6)$$

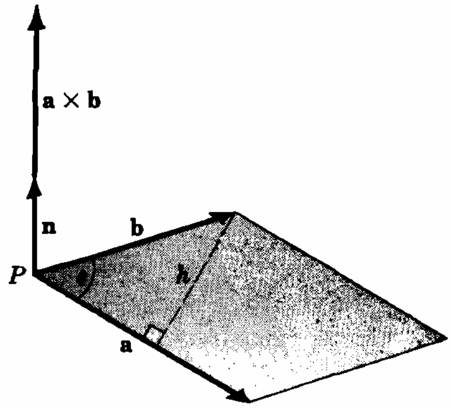

Fig. 61-5

Si en (5) se invierte el orden de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, $\mathbf{n}$ se debe sustituir por $-\mathbf{n}$; luego,

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \qquad (7)$$

Como se han elegido los ejes coordenados de forma que determinen un triedro a derechas, se deduce

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{array} \qquad (8)$$

Aplicando la propiedad distributiva (ver Problema 8):

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c} + \mathbf{b}\times\mathbf{c} \qquad (9)$$

Multiplicando (9) por -1 y aplicando (7) se obtiene:

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{c}\times\mathbf{a} + \mathbf{c}\times\mathbf{b} \qquad (9')$$

De donde

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \times (\mathbf{c}+\mathbf{d}) = \mathbf{a}\times\mathbf{c} + \mathbf{a}\times\mathbf{d} + \mathbf{b}\times\mathbf{c} + \mathbf{b}\times\mathbf{d} \qquad (10)$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \qquad (11)$$

(Ver Problemas 9-10.)

TRIPLE PRODUCTO ESCALAR. Sea θ (Fig. 61-6) el menor de los ángulos formados por los vectores $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ y ϕ el correspondiente de los formados por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$. El triple producto escalar es, por definición,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= \mathbf{a}\cdot|\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\,\text{sen}\,\theta\,\mathbf{n} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\,\text{sen}\,\theta\cos\phi \\ &= (|\mathbf{a}|\cos\phi)(|\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\,\text{sen}\,\theta) = hA \\ &= \text{volumen del paralelepípedo} \end{aligned}$$

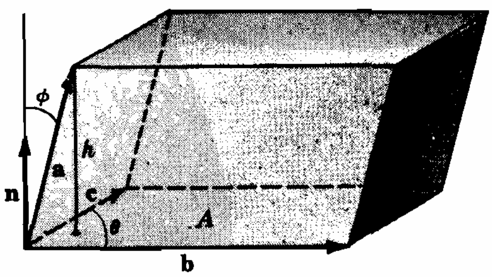

Fig. 61-6

Se demuestra (ver Problema 11) que

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \tag{12}$$

$$\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

Análogamente, tenemos

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) \tag{13}$$

y

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = -\mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = -\mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = -\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) \tag{14}$$

De la interpretación del producto $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ como un volumen, se deduce que si **a**, **b**, **c** son tres vectores coplanarios, $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0$ y recíprocamente.

Los paréntesis, en las expresiones $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ y $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$ no son necesarios. Por ejemplo, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ solo se puede interpretar bien por el producto $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, o bien por $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\times\mathbf{c}$. Ahora bien, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ es un escalar y $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ carece de sentido.

(Ver Problema 12.)

TRIPLE PRODUCTO VECTORIAL. En el Problema 13, se demuestra que

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c} \tag{15}$$

Análogamente,

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a} \tag{16}$$

Por tanto, excepto para el caso en que **b** sea perpendicular a **a** y **c**

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$$

aquí es necesario utilizar paréntesis.

ECUACION DE LA RECTA. Una recta del espacio que pase por un punto dado $P_0(x_0, y_0, z_0)$ se define como el lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y, z)$ tales que P_0P es paralelo a una dirección dada $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$. Sean $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{r}$ los vectores de posición de los puntos de P_0 y P, respectivamente. Tendremos

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = k\mathbf{a} \qquad (k\text{, un escalar variable}) \tag{17}$$

es la ecuación vectorial de la recta PP_0. Ver Fig. 61-7.

Poniendo (*17*) en la forma

$$(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k} = k(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}),$$

e igualando componentes

$$x - x_0 = ka_1, \quad y - y_0 = ka_2, \quad z - z_0 = ka_3$$

eliminando k, llegamos a

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \tag{18}$$

que es la ecuación de la recta en coordenadas cartesianas rectangulares. Los números $[a_1, a_2, a_3]$ son las *componentes* de la recta y $\left[\frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}\right]$ son sus *cosenos directores.*

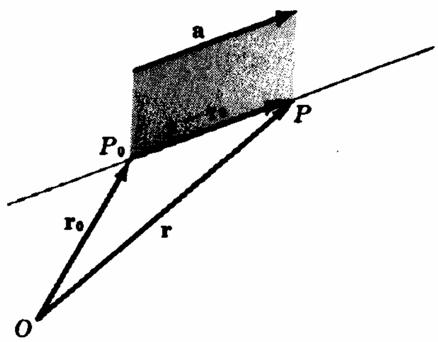

Fig. 61-7

Si una cualquiera de las componentes a_1, a_2, a_3 es cero, el numerador correspondiente en (*18*) también es nulo. Por ejemplo, si $a_1 = 0$, $a_2, a_3 \neq 0$, la recta viene dada por

$$x - x_0 = 0, \quad \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

ECUACION DEL PLANO. Un plano del espacio que pase por un punto dado $P_0(x_0, y_0, z_0)$ se define como el lugar geométrico de todas las rectas que pasando por P_0 son perpendiculares a una dirección dada $\mathbf{a} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$. Sea $P(x, y, z)$ otro punto cualquiera del plano. En estas condiciones, $r - r_0 = \mathbf{P_0 P}$ es perpendicular a $\mathbf{a}$, como se representa en la Fig. 61-8, y la ecuación del plano será

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{a} = 0 \qquad (19)$$

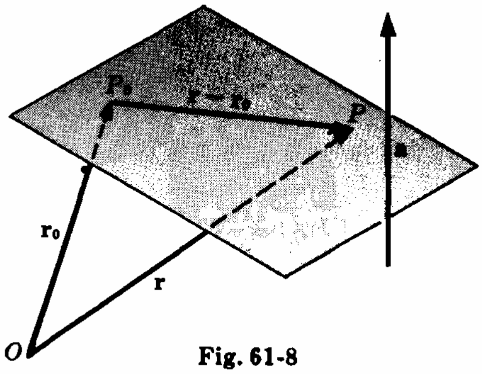

Fig. 61-8

En coordenadas rectangulares, tendremos

$$\{(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}\} \cdot (A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) = 0$$

o
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

o
$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (20)$$

siendo $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Recíprocamente, sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto de la superficie

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Sustituyendo
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

Restando,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)$$
$$= (A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) \cdot \{(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}\} = 0$$

el vector constante $A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ es normal a la superficie, por lo cual dicha superficie es un plano.

Problemas resueltos

1. Hallar la distancia del punto $P_1(1, 2, 3)$ al: (*a*) origen, (*b*) eje x, (*c*) eje z, (*d*) plano xy, (*e*) punto $P_2(3, -1, 5)$.

   (*a*) $\mathbf{r} = \mathbf{OP}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $|\mathbf{r}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

   (*b*) $\mathbf{AP}_1 = \mathbf{AB} + \mathbf{BP}_1 = 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $|\mathbf{AP}_1| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

   (*c*) $\mathbf{DP}_1 = \mathbf{DE} + \mathbf{EP}_1 = 2\mathbf{j} + \mathbf{i}$; $|\mathbf{DP}_1| = \sqrt{5}$

   (*d*) $\mathbf{BP}_1 = 3\mathbf{k}$; $|\mathbf{BP}_1| = 3$

   (*e*) $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = (3 - 1)\mathbf{i} + (-1 - 2)\mathbf{j} + (5 - 3)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

   $|\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2| = \sqrt{4 + 9 + 4} = \sqrt{17}$

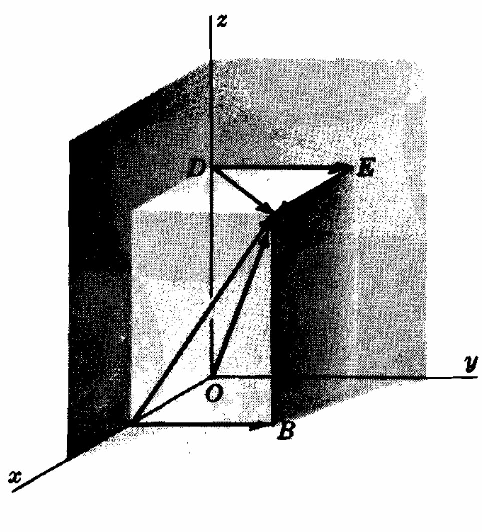

Fig. 61-9

2. Hallar el ángulo θ formado por los vectores que unen O con $P_1(1, 2, 3)$ y $P_2(2, -3, -1)$.

   $$\mathbf{r}_1 = \mathbf{OP}_1 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{OP}_2 = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

   $$\cos\theta = \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1|\,|\mathbf{r}_2|} = \frac{1(2) + 2(-3) + 3(-1)}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = -\frac{1}{2}, \quad \theta = 120^\circ$$

3. Hallar el ángulo $\alpha = \angle BAC$ del triángulo ABC cuyos vértices son $A(1, 0, 1)$, $B(2, -1, 1)$, $C(-2, 1, 0)$.

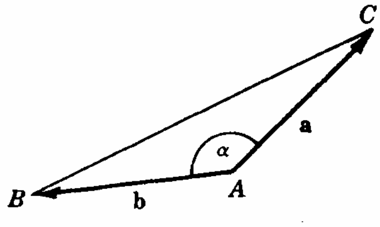

Fig. 61-10

$$\mathbf{a} = \mathbf{AC} = -3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = \mathbf{AB} = \mathbf{i}-\mathbf{j}$$

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{-3-1}{\sqrt{22}} = -0{,}85280, \qquad \alpha = 148°31'$$

4. Hallar los cosenos directores de $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Los cosenos directores son

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{i}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{3}{13}, \qquad \cos\beta = \frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{12}{13}, \qquad \cos\gamma = \frac{\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{4}{13}$$

5. Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ son dos vectores trazados desde un punto P y si

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

demostrar que $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta$, siendo θ el menor de los ángulos formados por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

Tenemos $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$ y

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \left\{\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}\right\}^2} = \frac{\sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \frac{|\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

Luego, $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \operatorname{sen}\mathbf{n}$ como queríamos demostrar.

6. Hallar el área del paralelogramo cuyos lados no paralelos son $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

De la Fig. 61-11, $h = |\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta$ y el área es $h\,|\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta$.

7. Sean $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$, respectivamente, las componentes de $\mathbf{a}$ paralela y perpendicular a $\mathbf{b}$, ver Fig. 61-12. Demostrar que

$$\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \text{ y } \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} = 0$$

Si θ es el ángulo formado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, será $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}| \cos\theta$ y $|\mathbf{a}_2| = |\mathbf{a}| \operatorname{sen}\theta$. Como $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}$ son coplanarios

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b} &= |\mathbf{a}_2|\,|\mathbf{b}| \operatorname{sen}\phi\,\mathbf{n} = |\mathbf{a}| \operatorname{sen}\theta\,|\mathbf{b}|\,\mathbf{n} \\ &= |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}\end{aligned}$$

Como $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{b}$ son paralelos, $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} = 0$

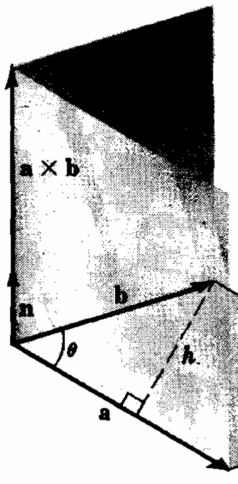

Fig. 61-11

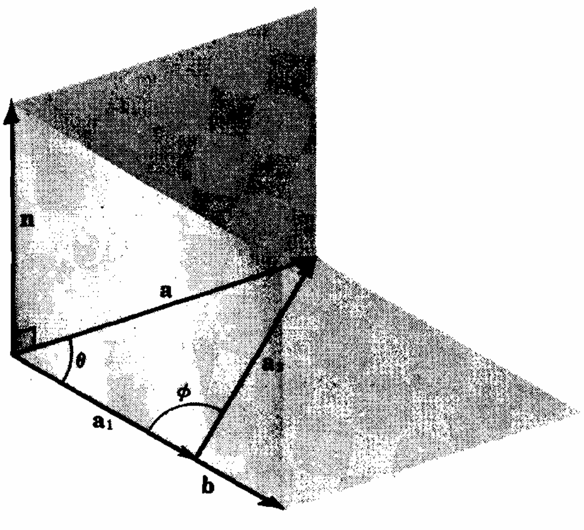

Fig. 61-12

8. Demostrar que $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$.

En la Fig. 61-13, el origen P de los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ está en el plano del papel, mientras que sus extremos están situados por delante de este plano. Los vectores $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{b}_1$ son, respectivamente, las componentes perpendiculares a $\mathbf{c}$ de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Por tanto, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1$, $\mathbf{a}_1\times\mathbf{c}$, $\mathbf{b}_1\times\mathbf{c}$ y $(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1)\times\mathbf{c}$, están en el plano del papel.

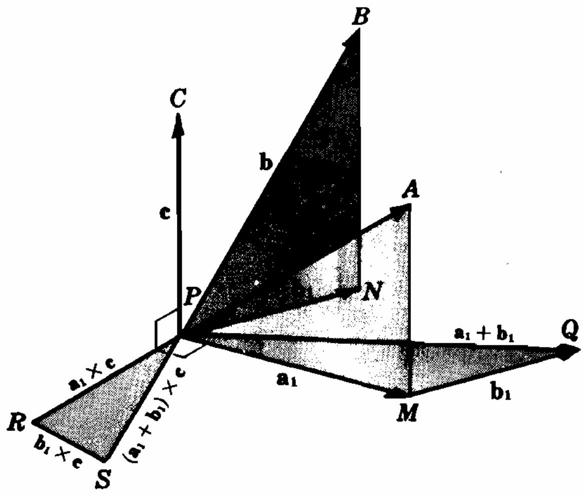

Fig. 61-13

En los triángulos PRS y PMQ,

$$\frac{RS}{PR}=\frac{|\mathbf{b}_1\times\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}_1\times\mathbf{c}|}=\frac{|\mathbf{b}_1|\,|\mathbf{c}|}{|\mathbf{a}_1|\,|\mathbf{c}|}=\frac{|\mathbf{b}_1|}{|\mathbf{a}_1|}=\frac{MQ}{PM};$$

con lo que PRS y PMQ son semejantes. Como PR es perpendicular a PM y RS lo es a MQ, PS es perpendicular a PQ y a $\mathbf{PS}=\mathbf{PQ}\times\mathbf{c}$. Así pues,

$$\mathbf{PS}=\mathbf{PQ}\times\mathbf{c}=\mathbf{PR}+\mathbf{RS}$$

o bien $(\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1)\times\mathbf{c}=\mathbf{a}_1\times\mathbf{c}+\mathbf{b}_1\times\mathbf{c}$

sustituyendo $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{b}_1$ por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, respectivamente (ver Problema 7), resulta lo que se trataba de demostrar.

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$$

9. Siendo $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$, demostrar que

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Aplicando la propiedad distributiva

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\times(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})\\
&= a_1\mathbf{i}\times(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}) + a_2\mathbf{j}\times(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}) + a_3\mathbf{k}\times(b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k})\\
&= (a_1b_2\mathbf{k}-a_1b_3\mathbf{j}) + (-a_2b_1\mathbf{k}+a_2b_3\mathbf{i}) + (a_3b_1\mathbf{j}-a_3b_2\mathbf{i})\\
&= (a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3-a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}\\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

10. Deducir el teorema de los senos de la trigonometría plana.

Consideremos el triángulo ABC cuyos lados son $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ de módulos a, b, c, respectivamente, y cuyos ángulos interiores son α, β, λ.

Tendremos

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = 0$$

Como $\quad \mathbf{a}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c} = 0 \quad$ o $\quad \mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$

y $\quad \mathbf{b}\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{b}\times\mathbf{a}+\mathbf{b}\times\mathbf{c} = 0 \quad$ o $\quad \mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$

Sea $\quad \mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{b}\times\mathbf{c}=\mathbf{c}\times\mathbf{a}$

$$|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\operatorname{sen}\gamma = |\mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\operatorname{sen}\alpha = |\mathbf{c}|\,|\mathbf{a}|\operatorname{sen}\beta$$

$$ab\operatorname{sen}\gamma = bc\operatorname{sen}\alpha = ca\operatorname{sen}\beta$$

y

$$\frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b}$$

11. Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, y $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$, demostrar que

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\cdot\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\cdot[(b_2c_3-b_3c_2)\mathbf{i} + (b_3c_1-b_1c_3)\mathbf{j} + (b_1c_2-b_2c_1)\mathbf{k}] \\
&= a_1(b_2c_3-b_3c_2) + a_2(b_3c_1-b_1c_3) + a_3(b_1c_2-b_2c_1) \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

12. Demostrar que $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = 0$.

Por *(12)*, $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{c} = 0$.

13. Si **a**, **b**, **c** son los vectores del Problema 11, demostrar que $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\times\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= (a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k})\times[(b_2c_3-b_3c_2)\mathbf{i} + (b_3c_1-b_1c_3)\mathbf{j} + (b_1c_2-b_2c_1)\mathbf{k}] \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3-b_3c_2 & b_3c_1-b_1c_3 & b_1c_2-b_2c_1 \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i}(a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3) \\
&\qquad + \mathbf{j}(a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1) \\
&\qquad\quad + \mathbf{k}(a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2) \\
&= \left\{\begin{array}{l} \mathbf{i}b_1(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3) \\ + \ \mathbf{j}b_2(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3) \\ + \ \mathbf{k}b_3(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3) \end{array}\right. - \left\{\begin{array}{l} \mathbf{i}c_1(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3) \\ + \ \mathbf{j}c_2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3) \\ + \ \mathbf{k}c_3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3) \end{array}\right. \\
&= (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - (c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \\
&= \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}
\end{aligned}$$

como queríamos demostrar.

14. La mínima distancia d entre dos rectas del espacio que se cruzan, l_1 y l_2, es la distancia de un punto cualquiera de l_1 al plano que, pasando por l_2 es paralelo a l_1; es decir, si P_1 es un punto de l_1 y P_2 de l_2, d es la proyección, prescindiendo del signo, de $\mathbf{P_1P_2}$ sobre una perpendicular común a l_1 y l_2.

Supongamos que l_1 pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y tiene la dirección de $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, y que l_2 pasa por $P_2(x_2, y_2, z_2)$ y tiene la dirección $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$.

Como $\mathbf{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$ y el vector $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ es perpendicular a l_1 y l_2, tendremos

$$d = \left|\frac{\mathbf{P_1P_2}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}\right| = \left|\frac{(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|}\right|$$

15. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P_0(1, 2, 3)$ y es paralela a $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. ¿Cuál de los puntos $A(3, 1, -1)$, $B(1/2, 9/4, 4)$, $C(2, 0, 1)$ está situado sobre dicha recta?

De (*17*), la ecuación vectorial es

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = k(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k})$$

o sea

(i) $$(x - 1)\mathbf{i} + (y - 2)\mathbf{j} + (z - 3)\mathbf{k} = k(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k})$$

la ecuación en coordenadas rectangulares es

(ii) $$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-4}$$

Aplicando (ii), se ve fácilmente que A y B pertenecen a la recta, y C, no.

En la ecuación vectorial (i), para ver si un punto pertenece a una recta, basta dar un valor a k e identificar componentes. El punto A pertenece a la recta porque

$$(3 - 1)\mathbf{i} + (1 - 2)\mathbf{j} + (-1 - 3)\mathbf{k} = k(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k})$$

para $k = 1$. Análogamente B pertenece a la recta, ya que

$$-\tfrac{1}{2}\mathbf{i} + \tfrac{1}{4}\mathbf{j} + \mathbf{k} = k(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k})$$

para $k = -\tfrac{1}{4}$. El punto C no pertenece a la recta porque

$$\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} = k(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k})$$

no se verifica ningún valor de k.

16. Hallar la ecuación del plano

(*a*) que pasa por $P_0(1, 2, 3)$ y es paralelo a $3x - 2y + 4z - 5 = 0$.

(*b*) que pasa por $P_0(1, 2, 3)$ y $P_1(3, -2, 1)$, y es perpendicular al plano $3x - 2y + 4z - 5 = 0$.

(*c*) que pasa por $P_0(1, 2, 3)$, $P_1(3, -2, 1)$ y $P_2(5, 0, -4)$.

Sea $P(x, y, z)$ un punto genérico del plano buscado.

(*a*) El vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ es normal al plano dado y al que se quiere hallar. La ecuación vectorial de este último es

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{a} = 0$$

y en coordenadas rectangulares es

$$3(x - 1) - 2(y - 2) + 4(z - 3) = 0$$

o sea $$3x - 2y + 4z - 11 = 0$$

(*b*) El vector $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ son paralelos al plano pedido; por tanto, $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}$ es normal a dicho plano. Su ecuación vectorial es

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}] = 0$$

La ecuación en coordenadas rectangulares es

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = [(x - 1)\mathbf{i} + (y - 2)\mathbf{j} + (z - 3)\mathbf{k}] \cdot [-20\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 8\mathbf{k}]$$

$$= -20(x - 1) - 14(y - 2) + 8(z - 3) = 0$$

o sea $$20x + 14y - 8z - 24 = 0$$

(*c*) El vector $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0 = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ son paralelos al plano pedido, por lo cual $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)$ es normal a dicho plano. Su ecuación vectorial es

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot [(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)] = 0$$

y la ecuación en coordenadas rectangulares es

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & -2 \\ 4 & -2 & -7 \end{vmatrix} = [(x - 1)\mathbf{i} + (y - 2)\mathbf{j} + (z - 3)\mathbf{k}] \cdot [24\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}]$$

$$= 24(x - 1) + 6(y - 2) + 12(z - 3) = 0$$

o sea $$4x + y + 2z - 12 = 0$$

17. Hallar la distancia d del punto $P_0(1, 2, 3)$ al plano π de ecuación $3x - 2y + 5z - 10 = 0$.

Un vector normal al plano es $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. Tomemos el punto $P_1(2, 3, 2)$, del plano π. La distancia d, prescindiendo del signo, es la proyección de $\mathbf{P_0 P_1}$ sobre $\mathbf{a}$. Por tanto,

$$d = \left|\frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right| = \left|\frac{(\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k})}{\sqrt{38}}\right| = \frac{2}{19}\sqrt{38}$$

Problemas propuestos

18. Hallar el módulo de los vectores

(*a*) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

(*b*) $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$.

(*c*) $\mathbf{c}$, que une $P_1(3, 4, 5)$ con $P_2(1, -2, 3)$. *Sol.* (*a*) $\sqrt{14}$, (*b*) $\sqrt{115}$, (*c*) $2\sqrt{11}$

19. Dados los vectores del Problema 18:

(*a*) Demostrar que **a** y **b** son perpendiculares.

(*b*) Hallar el menor de los ángulos formados por **a** y **c**. Idem de **b** y **c**.

(*c*) Hallar los ángulos que **b** forma con los ejes coordenados.

Sol. (*b*) 165°14′, 85°10′; (*c*) 73°45′, 117°47′, 32°56′.

20. Demostrar que: $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$; $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$.

21. Hallar el vector unitario en las direcciones de los vectores **a** y **b** del Problema 18.

22. Hallar los ángulos interiores β y γ del triángulo del Problema 3.
Sol. $\beta = 22°12'$, $\gamma = 90°16'$

23. Dado el cubo de arista unidad de la figura, hallar:

(*a*) el ángulo formado por su diagonal y una arista,

(*b*) el ángulo formado por su diagonal y la de una cara.

Sol. (*a*) 54°44′, (*b*) 35°16′ <

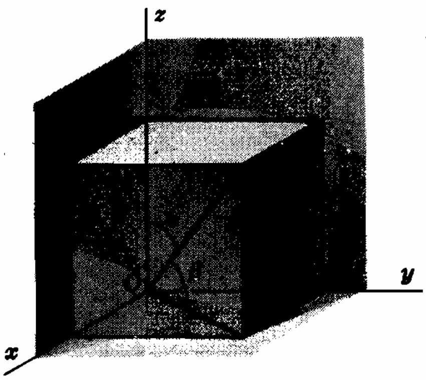

Fig. 61-14

24. Demostrar que la proyección escalar de **b** sobre **a** viene dada por $\dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$.

25. Demostrar que el vector **c** de la ecuación (3) es perpendicular a los **a** y **b**.

26. Siendo $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, calcular

(*a*) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

(*b*) $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = 6\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

(*c*) $\mathbf{c} \times \mathbf{a} = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$

(*d*) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

(*e*) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$

(*f*) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -2$

(*g*) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$

(*h*) $\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -11\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$

27. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, 1)$, $C(-2, 1, -1)$.
Ind. $|\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}| =$ doble área. *Sol.* $5\sqrt{3}$.

28. Hallar el volumen del paralelepípedo cuyas aristas son OA, OB, OC siendo $A(1, 2, 3)$, $B(1, 1, 2)$, $C(2, 1, 1)$.
Sol. 2.

29. Siendo $\mathbf{u} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{v} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, $\mathbf{w} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$, demostrar que

(*a*) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{b}$

(*b*) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{v} = 0$, $\mathbf{c} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{w} = 0$

(*c*) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})\}^2$

30. Demostrar que $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \{(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{a})\} = 2\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

31. Hallar el menor ángulo de intersección de los planos $5x - 14y + 2z - 8 = 0$ y $10x - 11y + 2z + 15 = 0$.
Ind. Hallar el ángulo formado por sus normales. *Sol.* 22°25′

32. Hallar la ecuación vectorial de la recta de intersección de los planos $x + y - z - 5 = 0$ y $4x - y - z + 2 = 0$.
Sol. $(x - 1)\mathbf{i} + (y - 5)\mathbf{j} + (z - 1)\mathbf{k} = k(-2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k})$, siendo $P_0(1, 5, 1)$ un punto de la recta.

33. Hallar la mínima distancia entre la recta que pasa por $A(2, -1, -1)$ y $B(6, -8, 0)$ y la que pasa por $C(2, 1, 2)$ y $D(0, 2, -1)$. *Sol.* $\sqrt{6}/6$

34. Definir una recta que pase por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ como el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ tales que $\mathbf{P_0P}$ y $\mathbf{OP_0}$ sean perpendiculares. Demostrar que su ecuación vectorial es de la forma $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{r}_0 = 0$.

35. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P_0(2, -3, 5)$ y

(*a*) es perpendicular a $7x - 4y + 2z - 8 = 0$.

(*b*) es paralela a la recta $x - y + 2z + 4 = 0$, $2x + 3y + 6z - 12 = 0$.

(*c*) pasa por $P_1(3, 6, -2)$.

Sol. (*a*) $\dfrac{x-2}{7} = \dfrac{y+3}{-4} = \dfrac{z-5}{2}$ (*b*) $\dfrac{x-2}{12} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-5}{-5}$, (*c*) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{9} = \dfrac{z-5}{-7}$

36. Hallar la ecuación del plano

(*a*) que pasa por $P_0(1, 2, 3)$ y es paralelo a $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

(*b*) que pasa por $P_0(2, -3, 2)$ y por la recta $6x + 4y + 3z + 5 = 0$, $2x + y + z - 2 = 0$.

(*c*) que pasa por $P_0(2, -1, -1)$ y $P_1(1, 2, 3)$ y es perpendicular a $2x + 3y - 5z - 6 = 0$.

Sol. (*a*) $4x + y + 9z - 33 = 0$, (*b*) $16x + 7y + 8z - 27 = 0$, (*c*) $9x - y + 3z - 16 = 0$.

37. Siendo $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, y $\mathbf{r}_2 = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ tres vectores de posición, demostrar que $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_0 = 0$. ¿Qué se puede decir de los extremos de estos vectores?
Sol. Son colineales.

38. Si P_0, P_1, P_2 son tres puntos no colineales y $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ son sus vectores de posición, calcular la posición de $\mathbf{r}_0 \times \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_0$ con respecto al plano $P_0P_1P_2$. *Sol.* Normal.

39. Demostrar que: (*a*) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.
(*b*) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

40. Demostrar que: (*a*) Las mediatrices de un triángulo se cortan en un punto.
(*b*) Las alturas de un triángulo se cortan en un punto.

41. Sean $A(1, 2, 3)$, $B(2, -1, 5)$ y $C(4, 1, 3)$ tres vértices del paralelogramo $ABCD$. Hallar: (*a*) las coordenadas de D, (*b*) el área de $ABCD$, (*c*) el área de la proyección ortogonal de $ABCD$ sobre cada uno de los planos coordenados.
Sol. (*a*) $D(3, 4, 1)$, (*b*) $2\sqrt{26}$, (*c*) 8, 6, 2.

42. Demostrar que el área de un paralelogramo en el espacio es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las áreas de las proyecciones del paralelogramo sobre los planos coordenados.

Capítulo 62

Derivación e integración vectorial

DERIVACION. Sean

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{i}f_1(t) + \mathbf{j}f_2(t) + \mathbf{k}f_3(t) &&= \mathbf{i}f_1 + \mathbf{j}f_2 + \mathbf{k}f_3 \\ \mathbf{s} &= \mathbf{i}g_1(t) + \mathbf{j}g_2(t) + \mathbf{k}g_3(t) &&= \mathbf{i}g_1 + \mathbf{j}g_2 + \mathbf{k}g_3 \\ \mathbf{u} &= \mathbf{i}h_1(t) + \mathbf{j}h_2(t) + \mathbf{k}h_3(t) &&= \mathbf{i}h_1 + \mathbf{j}h_2 + \mathbf{k}h_3 \end{aligned}$$

vectores cuyas componentes son funciones de una sola variable escalar t cuyas primeras y segundas derivadas son funciones continuas.

Se puede demostrar, como se hizo en el Capítulo 18 para los vectores en el plano, que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{s}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{s} + \mathbf{r}\cdot\frac{d\mathbf{s}}{dt} \tag{1}$$

Teniendo en cuenta las reglas de derivación de determinantes cuyos elementos son funciones de una sola variable,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{s}) = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ g_1' & g_2' & g_3' \end{vmatrix} \tag{2}$$

$$= \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{s} + \mathbf{r}\times\frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

y

$$\frac{d}{dt}\{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{u})\} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot(\mathbf{s}\times\mathbf{u}) + \mathbf{r}\cdot\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\times\mathbf{u}\right) + \mathbf{r}\cdot\left(\mathbf{s}\times\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right) \tag{3}$$

Estas fórmulas también se pueden establecer desarrollando los productos indicados antes de derivar.

De (*2*) se deduce

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{\mathbf{r}\times(\mathbf{s}\times\mathbf{u})\} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times(\mathbf{s}\times\mathbf{u}) + \mathbf{r}\times\frac{d}{dt}(\mathbf{s}\times\mathbf{u}) \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times(\mathbf{s}\times\mathbf{u}) + \mathbf{r}\times\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\times\mathbf{u}\right) + \mathbf{r}\times\left(\mathbf{s}\times\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

CURVAS EN EL ESPACIO. Consideremos la curva

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t) \tag{5}$$

siendo las primeras y segundas derivadas de $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$, funciones continuas. Sea el vector de posición de un punto genérico $P(x, y, z)$ de la curva

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Como se vio en el Capítulo 18, $\mathbf{t} = \dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ es el vector tangente unitario a la curva. Llamando $\mathbf{R}$ al vector de posición de un punto (X, Y, Z) de la tangente en P, la ecuación vectorial de esta recta es (ver Capítulo 61)

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\mathbf{t} \qquad (k, \text{ un escalar variable}) \tag{6}$$

y la ecuación en coordenadas rectangulares

$$\frac{X - x}{\dfrac{dx}{ds}} = \frac{Y - y}{\dfrac{dy}{ds}} = \frac{Z - z}{\dfrac{dz}{ds}}$$

siendo $\left[\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}\right]$ sus cosenos directores. En la ecuación correspondiente, (*2*) del Capítulo 59, los cosenos directores eran $\left[\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right]$

La ecuación vectorial del plano normal a la curva en el punto P viene dada por

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = 0 \tag{7}$$

siendo **R** el vector de posición de un punto genérico del plano.

También, como se vio en el Capítulo 18, $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$ es un vector perpendicular a **t**. Llamando **n** al vector unitario con la dirección y sentido de $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}$, tendremos

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = |K|\,\mathbf{n}$$

siendo $|K|$ el módulo de la curvatura en P. El vector unitario

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|K|}\frac{d\mathbf{t}}{ds} \tag{8}$$

se denomina *normal principal* a la curva en P.

El vector unitario **b** en P, definido por

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \tag{9}$$

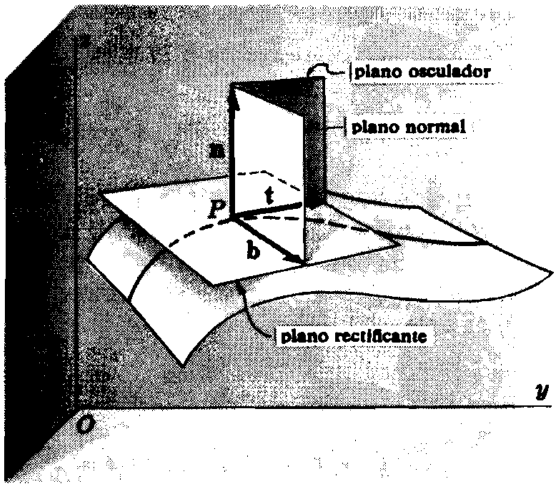

Fig. 62-1

recibe el nombre de *binormal* en P. Los tres vectores **t**, **n**, **b** forman en P un triedro trirrectángulo a derechas que constituye un sistema de coordenadas muy utilizado en el estudio de una curva en las proximidades de uno de sus puntos. (Ver Problemas 1-2.)

En un punto genérico P de una curva en el espacio los vectores **t**, **n**, **b** determinan tres planos mutuamente perpendiculares:

(i) el *plano osculador*, formado por **t** y **n**, de ecuación

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{b} = 0$$

(ii) el *plano normal*, formado por **n** y **b**, de ecuación

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = 0$$

(iii) el *plano rectificante*, formado por **t** y **b**, de ecuación

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = 0$$

En cada una de las ecuaciones, **R** es el vector de posición de un punto genérico de cada uno de los planos.

SUPERFICIES. La ecuación de una superficie es $F(x, y, z) = 0$ (ver Capítulo 59). Expresando x, y, z en función de dos variables independientes o parámetros u y v se obtienen las ecuaciones paramétricas, por ejemplo,

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v) \tag{10}$$

Si se sustituye u por una constante u_0 las ecuaciones (10) se transforman en

$$x = f_1(u_0, v), \quad y = f_2(u_0, v), \quad z = f_3(u_0, v) \tag{11}$$

que representan una curva particular de (curva u) la superficie. Análogamente, sustituyendo v por el valor constante v_0, las ecuaciones (10) se transforman en

$$x = f_1(u, v_0), \quad y = f_2(u, v_0), \quad z = f_3(u, v_0) \tag{12}$$

que representan otra curva particular de (curva v) la superficie. Ambas curvas se cortan en un punto de la superficie que se deduce al sustituir, simultáneamente, $u = u_0$, $v = v_0$ en (10).

El vector de posición de un punto genérico P de la superficie viene dado por

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{i}f_1(u, v) + \mathbf{j}f_2(u, v) + \mathbf{k}f_3(u, v) \tag{13}$$

Sean (*11*) y (*12*) las ecuaciones de las curvas u y v que pasan por P. En estas condiciones

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial v}f_1(u_0, v) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial v}f_2(u_0, v) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial v}f_3(u_0, v)$$

es un vector tangente a la curva u en P y

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial u}f_1(u, v_0) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial u}f_2(u, v_0) + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial u}f_3(u, v_0)$$

es un vector tangente a la curva v en dicho punto. Las dos tangentes determinan un plano que es, por consiguiente, el plano tangente a la superficie en el punto P. Es evidente que una normal a este plano viene dada por

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \tag{14}$$

El vector *normal unitario* a la superficie en P es

$$\mathbf{n} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|} \tag{15}$$

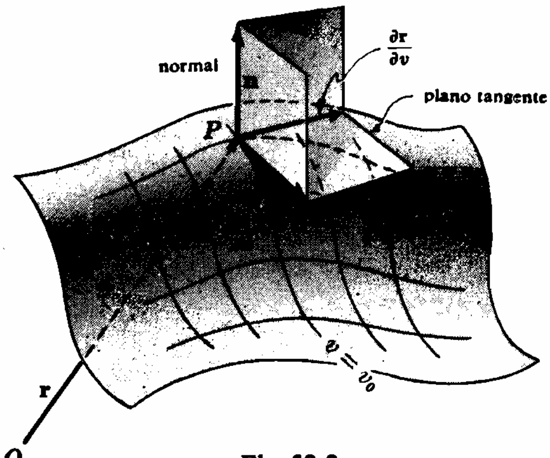

Fig. 62-2

Llamando $\mathbf{R}$ al vector de posición de un punto genérico de la normal a la superficie en P, resulta la ecuación vectorial de esta recta

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) = k\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) \tag{16}$$

Asimismo, llamando $\mathbf{R}$ al vector de posición de un punto genérico del plano tangente a la superficie en el punto P, resulta la ecuación vectorial de dicho plano de la forma

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) = 0 \tag{17}$$

[Ver problema 2]

OPERADOR ∇. En el Capítulo 60 hemos visto que la derivada de la función $z = f(x, y)$ en un punto cualquiera (x, y) en una dirección que forme un ángulo θ con el semieje x positivo, viene dada por

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta$$

El segundo miembro se puede expresar en la forma siguiente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\,\text{sen}\,\theta = \left(\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(\mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\,\text{sen}\,\theta) \qquad (18)$$

Ahora bien, $\mathbf{a} = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\,\text{sen}\,\theta$ es un vector unitario cuya dirección forma un ángulo θ con el semieje x positivo. El otro factor, expresado en la forma

$$\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)f$$

sugiere la definición de un operador diferencial vectorial, ∇ (nabla), dado por

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} \qquad (19)$$

En análisis vectorial la expresión $\nabla f = \mathbf{i}\dfrac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial f}{\partial y}$ recibe el nombre de *gradiente* de f y se escribe abreviadamente *grad f*. De (18) se deduce que la componente de ∇f en la dirección de un vector *unitario* **a** es la derivada de f en la dirección de dicho vector **a**.

Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ el vector de posición de $P(x, y)$. Como

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\left(\mathbf{i}\frac{dx}{ds} + \mathbf{j}\frac{dy}{ds}\right)$$
$$= \nabla f\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

y

$$\left|\frac{df}{ds}\right| = |\nabla f|\cos\phi$$

siendo ϕ el ángulo formado por los vectores ∇f y $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$, se desprende que $\dfrac{df}{ds}$ es máximo para $\cos\phi = 1$, es decir, cuando ∇f y $\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$ tienen la misma dirección. Por tanto, la derivada direccional máxima en P es $|\nabla f|$, y su dirección es la de ∇f. (Ver Problema 4.)

Dada la función $w = F(x, y, z)$,

$$\nabla F = \mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial z}$$

y la derivada de $F(x, y, z)$ en un punto arbitrario según la dirección $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ es

$$\frac{dF}{ds} = \nabla F\cdot\mathbf{a} \qquad (20)$$

Como en el caso de dos variables, $|\nabla F|$ es la derivada direccional máxima de $F(x, y, z)$ en el punto $P(x, y, z)$ y su dirección es la de ∇F. (Ver Problema 5.)

Consideremos, ahora, la superficie $F(x, y, z) = 0$. La ecuación del plano tangente a la superficie en uno de sus puntos $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z}$$
$$= [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}]\cdot\left[\mathbf{i}\frac{\partial F}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial F}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial z}\right] = 0 \qquad (21)$$

en donde las derivadas parciales están particularizadas en P_0. El primer factor es un vector arbitrario que pasa por P_0 y está contenido en el plano tangente; el segundo factor, ∇F en P_0, es normal al plano tangente, es decir, normal a la superficie en P_0. (Ver Problemas 6-7.)

DIVERGENCIA Y ROTACIONAL. La *divergencia* de un vector $\mathbf{F} = \mathbf{i}f_1\ (x, y, z) + \mathbf{j}f_2(x, y, z) + \mathbf{k}f_3$ (x, y, z), se define por

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \quad = \quad \nabla \cdot \mathbf{F} \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x} f_1 \ + \ \frac{\partial}{\partial y} f_2 \ + \ \frac{\partial}{\partial z} f_3 \tag{22}$$

El rotacional del vector **F** se define por

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\ \mathbf{F} \quad = \quad \nabla \times \mathbf{F} \quad &= \quad \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\ &= \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} f_3 - \frac{\partial}{\partial z} f_2\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} f_1 - \frac{\partial}{\partial x} f_3\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} f_2 - \frac{\partial}{\partial y} f_1\right)\mathbf{k} \end{aligned} \tag{23}$$

(Ver Problema 8.)

INTEGRACION. El estudio de la integración vectorial lo limitaremos aquí a los conceptos de integral de un vector y de integral curvilínea. Como ejemplo del primer concepto, sea

$$\mathbf{F}(u) \ = \ \mathbf{i} \cos u + \mathbf{j} \operatorname{sen} u + a u\, \mathbf{k}$$

un vector función de una variable escalar u. En estas condiciones

$$\mathbf{F}'(u) \quad = \quad -\,\mathbf{i} \operatorname{sen} u \ + \ \mathbf{j} \cos u \ + \ a\,\mathbf{k}$$

y

$$\begin{aligned} \int \mathbf{F}'(u)\, du \quad &= \quad \int (-\,\mathbf{i} \operatorname{sen} u \ + \ \mathbf{j} \cos u \ + \ a\,\mathbf{k})\, du \\ &= \quad \mathbf{i} \int -\operatorname{sen} u\, du \ + \ \mathbf{j} \int \cos u\, du \ + \ \mathbf{k} \int a\, du \\ &= \quad \mathbf{i} \cos u \ + \ \mathbf{j} \operatorname{sen} u \ + \ a u\,\mathbf{k} \ + \ \mathbf{c} \\ &= \quad \mathbf{F}(u) \ + \ \mathbf{c} \end{aligned}$$

siendo **c** un vector constante arbitrario independiente de u. También,

$$\int_{u=a}^{u=b} \mathbf{F}'(u)\, du \quad = \quad \Big[\mathbf{F}(u) + \mathbf{c}\Big]_{u=a}^{u=b} \quad = \quad \mathbf{F}(b) \ - \ \mathbf{F}(a)$$

(Ver Problemas 9-10.)

INTEGRAL CURVILINEA. Consideremos dos puntos del espacio, P_0 y P_1, unidos por un arco C que puede ser un segmento rectilíneo, una porción de una sola curva $x = g_1(t)$, $y = g_2(t)$, $z = g_3(t)$, o bien estar formado por varios subarcos de curvas distintas. En cualquier caso se supone que el arco C es continuo en todos sus puntos y que no se corta consigo mismo. Consideremos, además, una función vectorial

$$\mathbf{F} \ = \ \mathbf{F}(x, y, z) \ = \ \mathbf{i} f_1(x, y, z) + \mathbf{j} f_2(x, y, z) + \mathbf{k} f_3(x, y, z)$$

que en la región del espacio próximo a C y en particular en todos los puntos de C define un vector conocido (en módulo, dirección y sentido). Representemos por

$$\mathbf{r} \ = \ x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{24}$$

el vector de posición de un punto genérico $P(x, y, z)$ de C. La integral

$$\int_{C\ P_0}^{P_1} \left(\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right) ds \quad = \quad \int_{C\ P_0}^{P_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{25}$$

se denomina integral curvilínea, es decir, la integral a lo largo de la trayectoria C dada.

Supongamos que **F** es un vector representativo de una fuerza dada. El trabajo realizado al desplazar una partícula a lo largo de un camino elemental $d\mathbf{r}$ viene dado (ver Problema 9, Capítulo 18) por

$$|\mathbf{F}|\ |d\mathbf{r}| \cos\theta \ = \ \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

y el trabajo necesario para desplazar la partícula desde P_0 a P_1, a lo largo del arco C es

$$\int_{C\ P_0}^{P_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

De (*24*),

$$d\mathbf{r} \ = \ \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz$$

y (*25*) toma la forma

$$\int_{C\ P_0}^{P_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \ = \ \int_{C\ P_0}^{P_1} (f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz) \qquad (26)$$

(Ver Problema 11.)

Problemas resueltos

1. Una partícula se mueve sobre la curva $x = 4\cos t$, $y = 4\,\mathrm{sen}\,t$, $z = 6t$. Hallar el módulo de la velocidad y de la aceleración en el tiempo $t = 0$ y $t = \frac{1}{2}\pi$.

Sea $P(x, y, z)$ un punto de la curva y

$$\mathbf{r} \ = \ x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \ = \ 4\mathbf{i}\cos t + 4\mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,t + 6\mathbf{k}\,t$$

su vector de posición. Tendremos

$$\mathbf{v} \ = \ \frac{d\mathbf{r}}{dt} \ = \ -4\mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,t + 4\mathbf{j}\cos t + 6\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} \ = \ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \ = \ -4\mathbf{i}\cos t - 4\mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,t$$

Para $t = 0$: $\mathbf{v} = 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$; $|\mathbf{v}| = \sqrt{16+36} = 2\sqrt{13}$
$\mathbf{a} = -4\mathbf{i}$; $|\mathbf{a}| = 4$

Para $t = \frac{1}{2}\pi$: $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$; $|\mathbf{v}| = \sqrt{16+36} = 2\sqrt{13}$
$\mathbf{a} = -4\mathbf{j}$; $|\mathbf{a}| = 4$

2. En el punto (1, 1, 1) para $t = 1$ de la curva alabeada $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, calcular
   (*a*) las ecuaciones de la tangente y del plano normal,
   (*b*) el vector tangente unitario, la normal principal y la binormal,
   (*c*) las ecuaciones de la normal principal y de la binormal.

$$\mathbf{r} \ = \ t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \ = \ \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

$$\frac{ds}{dt} \ = \ \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| \ = \ \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\mathbf{t} \ = \ \frac{d\mathbf{r}}{ds} \ = \ \frac{d\mathbf{r}}{dt}\frac{dt}{ds} \ = \ \frac{\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

Para $t = 1$: $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{t} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$.

(*a*) Si $\mathbf{R}$ es el vector de posición de un punto genérico (X, Y, Z) de la tangente, su ecuación es

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\mathbf{t}$$

o
$$(X-1)\mathbf{i} + (Y-1)\mathbf{j} + (Z-1)\mathbf{k} = \frac{k}{\sqrt{14}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$$

y en coordenadas rectangulares

$$\frac{X-1}{1} = \frac{Y-1}{2} = \frac{Z-1}{3}$$

Si $\mathbf{R}$ es el vector de posición de un punto genérico (X, Y, Z) del plano normal, su ecuación vectorial es

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} = 0$$

o
$$[(X-1)\mathbf{i} + (Y-1)\mathbf{j} + (Z-1)\mathbf{k}] \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 0$$

y en coordenadas rectangulares

$$(X-1) + 2(Y-1) + 3(Z-1) = X + 2Y + 3Z - 6 = 0$$

[Ver Problema 2(*a*), Capítulo 59.]

(*b*)
$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{(-4t - 18t^3)\mathbf{i} + (2 - 18t^4)\mathbf{j} + (6t + 12t^3)\mathbf{k}}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^2}$$

Para $t = 1$: $\dfrac{d\mathbf{t}}{ds} = \dfrac{-11\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}}{98}$; $\left|\dfrac{d\mathbf{t}}{ds}\right| = \dfrac{1}{7}\sqrt{\dfrac{19}{14}} = |K|$. Por tanto

$$\mathbf{n} = \frac{1}{|K|}\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{-11\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}}{\sqrt{266}}$$

y
$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{266}}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -11 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{19}}(3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$$

(*c*) Si $\mathbf{R}$ es el vector de posición de un punto genérico (X, Y, Z) de la normal principal, su ecuación vectorial es

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k\mathbf{n}$$

es decir,
$$(X-1)\mathbf{i} + (Y-1)\mathbf{j} + (Z-1)\mathbf{k} = k\frac{-11\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}}{\sqrt{266}}$$

y en coordenadas rectangulares

$$\frac{X-1}{-11} = \frac{Y-1}{-8} = \frac{Z-1}{9}$$

Si $\mathbf{R}$ es el vector de posición de un punto genérico (X, Y, Z) de la binormal, su ecuación es

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} = k \cdot \mathbf{b}$$

es decir,
$$(X-1)\mathbf{i} + (Y-1)\mathbf{j} + (Z-1)\mathbf{k} = k\frac{3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{19}}$$

y en coordenadas rectangulares,

$$\frac{X-1}{3} = \frac{Y-1}{-3} = \frac{Z-1}{1}$$

9. Hallar la ecuación del plano tangente y de la normal a la superficie $x = 2(u+v)$, $y = 3(u-v)$, $z = uv$ en el punto $P(u = 2, v = 1)$.

$$\mathbf{r} = 2(u+v)\mathbf{i} + 3(u-v)\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + v\mathbf{k}, \qquad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + u\mathbf{k}$$

En P: $\mathbf{r} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = 9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$$

Las ecuaciones vectorial y en coordenadas rectangulares de la normal son

$$\mathbf{R} - \mathbf{r} \;=\; k\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

o
$$(X-6)\mathbf{i} + (Y-3)\mathbf{j} + (Z-2)\mathbf{k} \;=\; k(9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 12\mathbf{k})$$

y
$$\frac{X-6}{9} + \frac{Y-3}{-2} \;=\; \frac{Z-2}{-12}$$

Las ecuaciones vectorial y en coordenadas rectangulares del plano tangente son

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) \;=\; 0$$

es decir,
$$[(X-6)\mathbf{i} + (Y-3)\mathbf{j} + (Z-2)\mathbf{k}] \cdot [9\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 12\mathbf{k}] \;=\; 0$$

y
$$9X - 2Y - 12Z - 24 \;=\; 0$$

4. (*a*) Hallar la derivada de $f(x, y) = x^2 - 6y^2$ en el punto (7, 2) en la dirección $\theta = \frac{1}{4}\pi$.

(*b*) Hallar el máximo valor de la derivada direccional en el punto (7, 2).

(*a*)
$$\nabla f \;=\; \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)(x^2 - 6y^2) \;=\; \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 6y^2) + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2 - 6y^2)$$
$$= \; 2x\mathbf{i} - 12y\mathbf{j}$$

y
$$\mathbf{a} \;=\; \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\theta \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

En (7, 2): $\nabla f = 14\mathbf{i} - 24\mathbf{j}$ y

$$\nabla f \cdot \mathbf{a} \;=\; (14\mathbf{i} - 24\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right) \;=\; 7\sqrt{2} - 12\sqrt{2} \;=\; -5\sqrt{2}$$

es la derivada pedida.

(*b*) En (7, 2), $\nabla f = 14\mathbf{i} - 24\mathbf{j}$ y $|\nabla f| = \sqrt{14^2 + 24^2} = 2\sqrt{193}$ es la máxima derivada direccional, ya que

$$\frac{\nabla f}{|\nabla f|} \;=\; \frac{7}{\sqrt{193}}\mathbf{i} - \frac{12}{\sqrt{193}}\mathbf{j} \;=\; \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

la dirección es $\theta = 300°15'$. (Ver Problemas 2 y 6, Capítulo 60.)

5. (*a*) Hallar la derivada de $F(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ en $P(1, 1, -1)$ en la dirección $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

(*b*) Hallar el máximo valor de la derivada direccional en P.

$$\nabla F \;=\; \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2 - 2y^2 + 4z^2) \;=\; 2x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j} + 8z\mathbf{k}$$

En $(1, 1, -1)$, $\nabla F = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$.

(*a*) $\nabla F \cdot \mathbf{a} = (2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) = 8$

(*b*) En P, $|\nabla F| = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$. La dirección es $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$.

6. Dada la superficie $F(x, y, z) = x^2 + 3xyz + 2y^3 - z^3 - 5 = 0$ y uno de sus puntos $P_0(1, 1, 1)$, hallar

(*a*) un vector unitario normal a la superficie en P_0,

(*b*) la ecuación de la normal en P_0,

(*c*) la ecuación del plano tangente en P_0.

$$\nabla F \;=\; (3x^2 + 3yz)\mathbf{i} + (3xz + 6y^2)\mathbf{j} + (3xy - 3z^2)\mathbf{k}$$

En $P_0(1, 1, 1)$, $\nabla F = 6\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$.

(*a*) $\dfrac{\nabla F}{|\nabla F|} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \dfrac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$ es un vector unitario normal en P_0; otro es $-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{i} - \dfrac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{j}$.

(*b*) La ecuación de la normal es $\dfrac{X-1}{2} = \dfrac{Y-1}{3}$, $Z = 1$.

(*c*) La ecuación del plano tangente es $2(X-1) + 3(Y-1) = 2X + 3Y - 5 = 0$.

7. Hallar el ángulo de intersección de las superficies

$$F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \quad \text{y} \quad F_2 = x^2 + 2y^2 - z - 8 = 0$$

en el punto (2, 1, —2).

$$\nabla F_1 = \nabla(x^2 + y^2 + z^2 - 9) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$
$$\nabla F_2 = \nabla(x^2 + 2y^2 - z - 8) = 2x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

En (2, 1, —2) $\nabla F_1 = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ y $\nabla F_2 = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Como $\nabla F_1 \cdot \nabla F_2 = |\nabla F_1|\,|\nabla F_2| \cos\theta$, siendo θ el ángulo pedido, tendremos,

$$(4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) \cdot (4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}) = |4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}|\,|4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}| \cos\theta$$

de donde $\cos\theta = \frac{14}{99}\sqrt{33} = 0{,}81236$, y $\theta = 35°40'$.

8. Siendo $\mathbf{B} = xy^2\mathbf{i} + 2x^2yz\mathbf{j} - 3yz^2\mathbf{k}$, hallar (*a*) div **B**, (*b*) rot **B**.

(*a*)
$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \nabla\cdot\mathbf{B} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot(xy^2\mathbf{i} + 2x^2yz\mathbf{j} - 3yz^2\mathbf{k})$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2x^2yz) + \frac{\partial}{\partial z}(-3yz^2)$$
$$= y^2 + 2x^2z - 6yz$$

(*b*)
$$\text{rot }\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 & 2x^2yz & -3yz^2 \end{vmatrix}$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-3yz^2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x^2yz)\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(xy^2) - \frac{\partial}{\partial x}(-3yz^2)\right]\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x^2yz) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\right]\mathbf{k}$$
$$= -(3z^2 + 2x^2y)\mathbf{i} + (4xyz - 2xy)\mathbf{k}$$

9. Siendo $\mathbf{F}(u) = u\mathbf{i} + (u^2 - 2u)\mathbf{j} + (3u^2 + u^3)\mathbf{k}$, calcular (*a*) $\int \mathbf{F}(u)\,du$ y (*b*) $\int_0^1 \mathbf{F}(u)\,du$.

(*a*)
$$\int \mathbf{F}(u)\,du = \int [u\mathbf{i} + (u^2 - 2u)\mathbf{j} + (3u^2 + u^3)\mathbf{k}]\,du$$
$$= \mathbf{i}\int u\,du + \mathbf{j}\int (u^2 - 2u)\,du + \mathbf{k}\int (3u^2 + u^3)\,du$$
$$= \frac{u^2}{2}\mathbf{i} + \left(\frac{u^3}{3} - u^2\right)\mathbf{j} + \left(u^3 + \frac{u^4}{4}\right)\mathbf{k} + \mathbf{c}$$

siendo $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ con c_1, c_2, c_3 escalares arbitrarios.

(*b*)
$$\int_0^1 \mathbf{F}(u)\,du = \left[\frac{u^2}{2}\mathbf{i} + \left(\frac{u^3}{3} - u^2\right)\mathbf{j} + \left(u^3 + \frac{u^4}{4}\right)\mathbf{k}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{5}{4}\mathbf{k}$$

10. La aceleración de una partícula en el tiempo $t \geq 0$ viene dada por $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = e^t\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Si para $t = 0$, el desplazamiento es $\mathbf{r} = 0$ y la velocidad es $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, hallar **r** y **v** en el instante t.

$$\mathbf{v} = \int \mathbf{a}\,dt = \mathbf{i}\int e^t\,dt + \mathbf{j}\int e^{2t}\,dt + \mathbf{k}\int dt$$
$$= e^t\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}e^{2t}\mathbf{j} + t\mathbf{k} + \mathbf{c}_1$$

Para $t = 0$: $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{c}_1 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{c}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{j}$. De donde

$$\mathbf{v} = e^t\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}(e^{2t} + 1)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r} = \int \mathbf{v}\,dt = e^t\mathbf{i} + (\tfrac{1}{4}e^{2t} + \tfrac{1}{2}t)\mathbf{j} + \tfrac{1}{2}t^2\mathbf{k} + \mathbf{c}_2$$

Para $t = 0$: $\mathbf{r} = \mathbf{i} + \frac{1}{4}\mathbf{j} + \mathbf{c}_2 = 0$ y $\mathbf{c}_2 = -\mathbf{i} - \frac{1}{4}\mathbf{j}$. Por tanto,

$$\mathbf{r} = (e^t - 1)\mathbf{i} + (\tfrac{1}{4}e^{2t} + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4})\mathbf{j} + \tfrac{1}{2}t^2\mathbf{k}$$

11. Hallar el trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F} = (x + yz)\mathbf{i} + (y + xz)\mathbf{j} + (z + xy)\mathbf{k}$ para desplazar una partícula desde el origen a $C(1, 1, 1)$

(*a*) a lo largo de la recta OC

(*b*) a lo largo de la curva $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3$

(*c*) a lo largo de las rectas O a $A(1, 0, 0)$, A a $B(1, 1, 0)$, B a C.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= [(x + yz)\mathbf{i} + (y + xz)\mathbf{j} + (z + xy)\mathbf{k}]\cdot[\mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz] \\ &= (x + yz)\,dx + (y + xz)\,dy + (z + xy)\,dz\end{aligned}$$

(*a*) Para la recta OC, $x = y = z$ y $dx = dy = dz$.

La integral a calcular es

$$W = \int_{C\,(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 3\int_0^1 (x + x^2)\,dx = \left[\left(\frac{3}{2}x^2 + x^3\right)\right]_0^1 = \frac{5}{2}$$

(*b*) A lo largo de la curva: $x = t$, $dx = dt$; $y = t^2$, $dy = 2t\,dt$; $z = t^3$, $dz = 3t^2\,dt$. En O, $t = 0$; y en C, $t = 1$.

$$\begin{aligned}W &= \int_0^1 (t + t^5)\,dt + (t^2 + t^4)2t\,dt + (t^3 + t^3)3t^2\,dt \\ &= \int_0^1 (t + 2t^3 + 9t^5)\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{2}t^6\right]_0^1 = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

(*c*) De O a A: $y = z = 0$, $dy = dz = 0$ y x varía de 0 a 1.

De A a B: $x = 1$, $z = 0$, $dx = dz = 0$ e y varía de 0 a 1.

De B a C: $x = y = 1$, $dx = dy = 0$ y z varía de 0 a 1.

Ahora bien, para la distancia de O a A, $W_1 = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$; para la distancia de A o B, $W_2 = \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}$; para la distancia de B a C, $W_3 = \int_0^1 (z + 1)dz = \frac{3}{2}$. Por tanto, $W = W_1 + W_2 + W_3 = 5/2$.

En general, el valor de la integral curvilínea depende del camino de integración. En este caso, sin embargo, no es así, es decir, el valor de la integral resulta independiente del camino de integración. Se demuestra que una integral curvilínea $\int_C (f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz)$ es independiente del camino de integración siempre que exista una función $\phi(x, y, z)$ tal, que

$$d\phi = f_1\,dx + f_2\,dy + f_3\,dz$$

Obsérvese que el integrando de este problema es

$$(x + yz)\,dx + (y + xz)\,dy + (z + xy)\,dz = d\{\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + xyz\}$$

Problemas propuestos

12. Hallar $\dfrac{d\mathbf{s}}{dt}$ y $\dfrac{d^2\mathbf{s}}{dt^2}$, siendo:

(*a*) $\mathbf{s} = (t + 1)\mathbf{i} + (t^2 + t + 1)\mathbf{j} + (t^3 + t^2 + t + 1)\mathbf{k}$

(*b*) $\mathbf{s} = \mathbf{i}e^t\cos 2t + \mathbf{j}e^t\,\mathrm{sen}\,2t + t^2\mathbf{k}$

Sol. (*a*) $\mathbf{i} + (2t + 1)\mathbf{j} + (3t^2 + 2t + 1)\mathbf{k}$; $2\mathbf{j} + (6t + 2)\mathbf{k}$

(*b*) $e^t(\cos 2t - 2\,\mathrm{sen}\,2t)\mathbf{i} + e^t(\mathrm{sen}\,2t + 2\cos 2t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$

$e^t(-4\,\mathrm{sen}\,2t - 3\cos 2t)\mathbf{i} + e^t(-3\,\mathrm{sen}\,2t + 4\cos 2t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

13. Siendo: $\mathbf{a} = u\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + u^3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i}\cos u + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}\,u$, $\mathbf{c} = 3u^2\mathbf{i} - 4u\mathbf{k}$, calcular, en primer lugar, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ y hallar sus derivadas. Aplicando luego las fórmula directamente, hallar las derivadas.

14. Una partícula se mueve a lo largo de la curva $x = 3t^2$, $y = t^2 - 2t$, $z = t^3$, siendo t el tiempo. Hallar: (*a*) los módulos de la velocidad y de la aceleración en el instante $t = 1$, (*b*) las componentes de la velocidad y de la aceleración, en dicho instante $t = 1$, en la dirección del vector $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. *Sol.* (*a*) $|\mathbf{v}| = 3\sqrt{5}$, $|\mathbf{a}| = 2\sqrt{19}$; (*b*) 6, 22/3.

15. Hallar, mediante el cálculo vectorial, las ecuaciones de la tangente y del plano normal a las curvas del Problema 11, Capítulo 59.

16. Resolver el Problema 12, Capítulo 59, aplicando el cálculo vectorial.

17. Demostrar que las superficies $x = u$, $y = 5u - 3v^2$, $z = v$ y $x = u$, $y = v$, $z = \dfrac{uv}{4u - v}$ son perpendiculares en $P(1, 2, 1)$.

18. Hallar, aplicando el cálculo vectorial, las ecuaciones del plano tangente y de la normal a la superficie.

(*a*) $x = u$, $y = v$, $z = uv$ en el punto $(u, v) = (3, -4)$.

(*b*) $x = u$, $y = v$, $z = u^2 - v^2$ en el punto $(u, v) = (2, 1)$.

Sol. (*a*) $4X - 3Y + Z - 12 = 0$, $\dfrac{X-3}{-4} = \dfrac{Y+4}{3} = \dfrac{Z+12}{-1}$

(*b*) $4X - 2Y - Z - 3 = 0$, $\dfrac{X-2}{-4} = \dfrac{Y-1}{2} = \dfrac{Z-3}{1}$

19. (*a*) Hallar las ecuaciones de los planos osculador y rectificante a la curva del Problema 2 en el punto dado.

(*b*) Hallar las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante a $x = 2t - t^2$, $y = t^2$, $z = 2t + t^2$ en $t = 1$.

Sol. (*a*) $3X - 3Y + Z - 1 = 0$, $11X + 8Y - 9Z - 10 = 0$

(*b*) $X + 2Y - Z = 0$, $Y + 2Z - 7 = 0$, $5X - 2Y + Z - 6 = 0$.

20. Demostrar que la ecuación del plano osculador a una curva en P viene dado también por

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right) = 0$$

21. Resolver los Problemas 16 y 17, Capítulo 60, aplicando el cálculo vectorial.

22. Calcular $\displaystyle\int_a^b \mathbf{F}(u)\,du$, siendo

(*a*) $\mathbf{F}(u) = u^3\mathbf{i} + (3u^2 - 2u)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $a = 0$, $b = 2$

(*b*) $\mathbf{F}(u) = e^u\mathbf{i} + e^{-2u}\mathbf{j} + u\mathbf{k}$; $a = 0$, $b = 1$

Sol. (*a*) $4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, (*b*) $(e - 1)\mathbf{i} + \frac{1}{2}(1 - e^{-2})\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$.

23. La aceleración de una partícula en función del tiempo viene dada por $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = (t + 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t^2 - 2)\mathbf{k}$. Si para $t = 0$, el desplazamiento es $\mathbf{r} = 0$ y la velocidad es $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$, hallar $\mathbf{v}$ y $\mathbf{r}$ en función del tiempo t.

Sol. $\mathbf{v} = (\frac{1}{2}t^2 + t + 1)\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} + (\frac{1}{3}t^3 - 2t - 1)\mathbf{k}$, $\mathbf{r} = (\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t)\mathbf{i} + \frac{1}{12}t^4\mathbf{j} + (\frac{1}{12}t^4 - t^2 - t)\mathbf{k}$

24. En los casos siguientes, calcular el trabajo realizado por la fuerza dada $\mathbf{F}$ para mover una partícula desde $O(0, 0, 0)$ a $C(1, 1, 1)$ a lo largo de (i) la recta $x = y = z$, (ii) la curva $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, (iii) las rectas desde O a $A(1, 0, 0)$, A a $B(1, 1, 0)$, B a C.

(*a*) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$

(*b*) $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$

(*c*) $\mathbf{F} = (x + xyz)\mathbf{i} + (y + x^2z)\mathbf{j} + (z + x^2y)\mathbf{k}$

Sol. (*a*) 3, (*b*) 3, (*c*) 9/4, 33/14, 5/2.

25. Siendo $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, demostrar que (*a*) $\operatorname{div}\mathbf{r} = 3$, (*b*) $\operatorname{rot}\mathbf{r} = 0$.

26. Si $f = f(x, y, z)$ tiene derivadas parciales de al menos orden dos, demostrar que

(*a*) $\nabla \times \nabla f = 0$, (*b*) $\nabla \cdot (\nabla \times f) = 0$, (*c*) $\nabla \cdot \nabla f = \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f$.

Capítulo 63

Integrales doble e iterada

LA INTEGRAL SIMPLE, $\int_a^b f(x)\,dx$, de una función $y = f(x)$ continua en el intervalo finito $a \leq x \leq b$ del eje x, se definió en el Capítulo 33 de la forma siguiente:

(*a*) se divide el intervalo dado, $a \leq x \leq b$, en n subintervalos, $h_1, h_2, \ldots, h_n$, de amplitudes $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots, \Delta_n x$, respectivamente, siendo λ_n el mayor de los $\Delta_k x$.

(*b*) se eligen los puntos x_1 en h_1, x_2 en $h_2, \ldots, x_n$ en h_n y se forma la suma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x$

(*c*) se hace crecer el número de subintervalos de forma que $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$,

(*d*) $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x.$

INTEGRAL DOBLE. Consideremos una función $z = f(x, y)$ continua en una región finita R del plano xOy. Dividamos esta región (ver Fig. 63-1) en n subregiones $R_1, R_2, \ldots, R_n$, de áreas $\Delta_1 A, \Delta_2 A, \ldots, \Delta_n A$, respectivamente; en cada subregión R_k tomemos un punto $P_k(x_k, y_k)$ y formemos la suma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta_k A = f(x_1, y_1)\,\Delta_1 A + f(x_2, y_2)\,\Delta_2 A + \cdots + f(x_n, y_n)\,\Delta_n A \qquad (1)$$

Definimos el diámetro de una subregión como la mayor de las distancias entre dos puntos cualesquiera, interiores o en la periferia, de ella y llamemos λ_n al máximo diámetro de las subregiones. Si suponemos que el número de subregiones crece de forma que $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, se define la *integral doble* de la función $f(x, y)$ en la región R, por

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\,\Delta_k A \qquad (2)$$

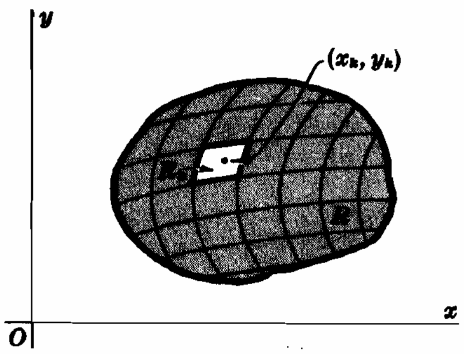

Fig. 63-1

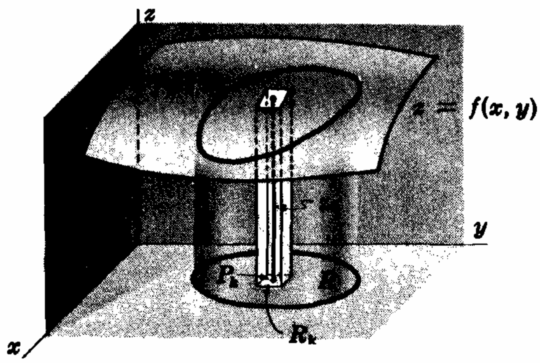

Fig. 63-2

Si $z = f(x, y)$ no se hace negativo en ningún punto de R (ver Fig. 63-2), la integral doble (*2*) se puede interpretar como un volumen. Un término cualquiera, $f(x_k, y_k)\,\Delta_k A$ de (*1*), representa el volumen de una columna vertical de bases paralelas de área $\Delta_k A$ y altura z_k, medida sobre la ver tical levantada desde el punto elegido P_k hasta la superficie $z = f(x, y)$. También representa, aproximadamente el volumen de una columna vertical cuyas bases son, la inferior, la subregión R_k y la superior, la proyección de R_k sobre la superficie. Así, pues, (*1*) es una aproximación del volumen «limitado por la superficie» (es decir, el volumen cuya base inferior está situada en el plano xOy y la superior es la superficie generada al mover una recta paralelamente al eje z que se apoya en el contorno de R) y (*2*) es una medida de dicho volumen.

El cálculo de una integral doble, por simple que sea, a base de ir realizando sumas presenta muchas dificultades y no lo emplearemos en este libro.

INTEGRAL ITERADA. Consideremos un volumen, definido como en la sección anterior, y supongamos que el contorno de R es tal, que toda recta paralela al eje x, o al eje y, no corta a la superficie en más de dos puntos. Tracemos (ver Fig. 63-3) las tangentes $x = a$ y $x = b$ al contorno y sean K y L los puntos de tangencia, y las tangentes $y = c$ e $y = d$ siendo M y N los puntos de contacto o respectivos. Supongamos que la ecuación del arco LMK sea $y = g_1(x)$, y la correspondiente al LNK, $y = g_2(x)$.

Dividamos el intervalo $a \leq x \leq b$ en m subintervalos, $h_1, h_2, \ldots, h_m$, de longitudes, $\Delta_1 x$, $\Delta_2 x, \ldots, \Delta_m x$, y tomemos en ellos los puntos $x = \xi_1, x = \xi_2, \ldots, x = \xi_{m-1}$ (como se hizo en el Capítulo 33). Asimismo, dividamos el intervalo $c \leq y \leq d$ en n subintervalos, $k_1, k_2, \ldots, k_n$, de longitudes, $\Delta_1 y, \Delta_2 y, \ldots, \Delta_n y$, y tomemos en ellos los puntos, $y = \eta_1, y = \eta_2, \ldots, y = \eta_{n-1}$. Sean λ_m y μ_n las longitudes de los mayores intervalos $\Delta_i x$ y $\Delta_j y$ respectivamente. Trazando las series de paralelas $x = \xi_1, x = \xi_2, \ldots, x = \xi_{m-1}$ e $y = \eta_1, y = \eta_2, \ldots, y = \eta_{n-1}$, habremos dividido la región R en un conjunto de rectángulos R_{ij} de áreas $\Delta_i x \cdot \Delta_j y$ y en otro conjunto de rectángulos incompletos que ignoramos. Si en cada subintervalo h_i elegimos un punto $x = x_i$, y en cada uno de los k_j otro $y = y_j$, en cada subregión R_{ij} quedará determinado un punto $P_{ij}(x_i, y_j)$. A cada subregión R_{ij} se le puede asociar, mediante la ecuación de la superficie, un número $z_{ij} = f(x_i, y_j)$ con lo que formamos la suma

$$\sum_{\substack{i=1,2,\ldots,m \\ j=1,2,\ldots,n}} f(x_i, y_j)\,\Delta_i x \cdot \Delta_j y \qquad (3)$$

Esta expresión (*3*) es un caso particular de la (*1*), ya que si se aumenta indefinidamente el número de rectángulos de forma que, tanto λ_m como μ_n tienden a cero, el límite de (*3*) coincide con la integral doble (*2*).

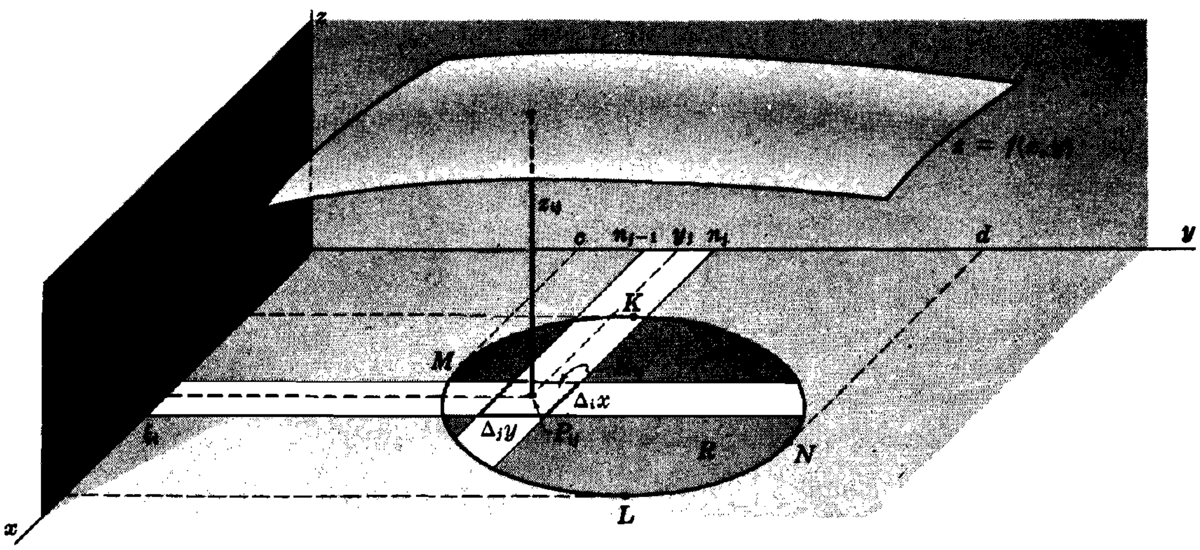

Fig. 63-3

Para hallar el límite anterior se elige uno de los intervalos, por ejemplo h_i, y se considera la suma

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta_j y\right\}\Delta_i x\,, \qquad (i \text{ fijo})$$

que es la contribución a la suma total de todos los rectángulos en los que una de las dimensiones es igual a h_i, es decir, la contribución de todos los rectángulos situados en la iésima columna. Cuando $n \to +\infty$, $\mu_n \to 0$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n} f(x_i, y_j)\,\Delta_j y\right\}\Delta_i x &= \left\{\int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i, y)\,dy\right\}\Delta_i x\\ &= \phi(x_i)\,\Delta_i x\end{aligned}$$

Sumando ahora las m columnas y haciendo tender a $m \to +\infty$, tendremos

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty}\sum_{i=1}^{m}\phi(x_i)\,\Delta_i x &= \int_a^b \phi(x)\,dx\\ &= \int_a^b\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx \;=\; \int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx\end{aligned} \tag{4}$$

Aunque en lo sucesivo no emplearemos el corchete, se debe sobrentender siempre que la fórmula (*4*) indica que hay que calcular dos integrales simples definidas, en un orden determinado: primero, la integral de $f(x, y)$ con respecto a y (considerando x constante) entre los límites $y = g_1(x)$, contorno inferior de R, e $y = g_2(x)$, contorno superior de R y, a continuación, se halla la integral de este resultado con respecto a x entre los límites $x = a$, punto extremo izquierdo de R y $x = b$, punto extremo derecho de R. La integral (*4*) recibe el nombre de *integral iterada* o *integral repetida.*

Se deja como ejercicio el cálculo de la suma planteando, en primer lugar, la contribución de los rectángulos de cada columna y, después, la de los rectángulos de todas las columnas, obteniéndose la integral iterada equivalente

$$\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy \tag{5}$$

siendo $x = h_1(y)$ y $x = h_2(y)$ las ecuaciones de los arcos MKN y MLN respectivamente.

En el Problema 1 se demuestra, por otro procedimiento, que la integral iterada (*4*) es una medida del volumen. Para el cálculo de integrales iteradas véanse los Problemas 2-6.

La mayor dificultad en el planteamiento de las integrales iteradas de los capítulos posteriores es hallar los límites de integración correspondientes a la región R. Aquí hemos considerado para el razonamiento una región muy sencilla; las regiones de los Problemas 7-9 son más complicadas.

Problemas resueltos

1. Supongamos que $z = f(x, y)$ es una función continua no negativa en la región R del plano xOy cuyo contorno está formado por los arcos de dos curvas $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$ que se cortan en los puntos K y L indicados en la Fig. 63-4. Se trata de hallar el volumen V limitado por esta superficie.

Sea $x = x_i$, siendo $a < x_i < b$, un plano que corta al contorno de R en los puntos $S[x_i, g_1(x_i)]$ y $T[x_i, g_2(x_i)]$, y a la superficie $z = f(x, y)$ según el arco UV a lo largo del cual $z = f(x_i, y)$. El área de la sección $STUV$ es

$$A(x_i) = \int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i, y)\,dy$$

Así, pues, el área de las secciones determinadas en el volumen por planos paralelos al yOz son funciones conocidas

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$$

de x, distancia del plano de sección al origen. Según lo dicho en el Capítulo 36, el volumen pedido será,

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

Esta es la integral iterada de la ecuación (*4*).

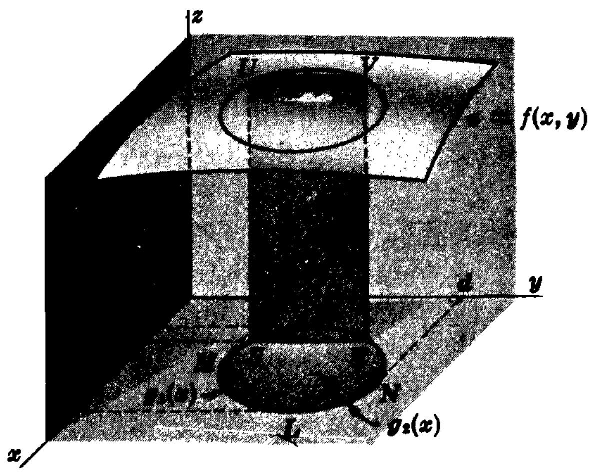

Fig. 63-4

2. $$\int_0^1\int_{x^2}^{x} dy\,dx = \int_0^1\Big[y\Big]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (x-x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

3. $$\int_1^2\int_y^{3y} (x+y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2+xy\right)\Big]_y^{3y} dy = \int_1^2 6y^2\,dy = 2y^3\Big]_1^2 = 14$$

4. $$\int_{-1}^2\int_{2x^2-2}^{x^2+x} x\,dy\,dx = \int_{-1}^2 (xy)\Big]_{2x^2-2}^{x^2+x} dx = \int_{-1}^2 (x^3+x^2-2x^3+2x)\,dx = \frac{9}{4}$$

5. $$\int_0^\pi\int_0^{\cos\theta} \rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\rho\,d\theta = \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\Big]_0^{\cos\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta$$

$$= \left(-\frac{1}{6}\cos^3\theta\right)\Big]_0^\pi = \frac{1}{3}$$

6. $$\int_0^{\pi/2}\int_2^{4\cos\theta} \rho^3\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4}\rho^4\right)\Big]_2^{4\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} (64\cos^4\theta - 4)\,d\theta$$

$$= \left[64\left(\frac{3\theta}{8}+\frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{4}+\frac{\mathrm{sen}\,4\theta}{32}\right) - 4\theta\right]_0^{\pi/2} = 10\pi$$

7. Hallar $\iint_R dA$ siendo R la región del primer cuadrante limitada por la parábola cúbica $y^2 = x^3$ y la recta $y = x$.

La recta y la parábola se cortan en los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$, que son los valores extremos de x e y en la región R.

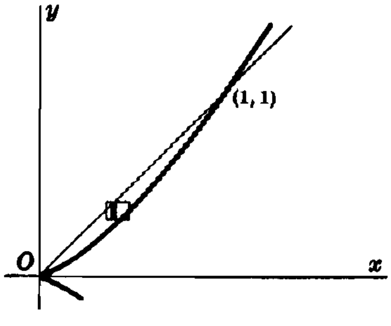

Fig. 63-5

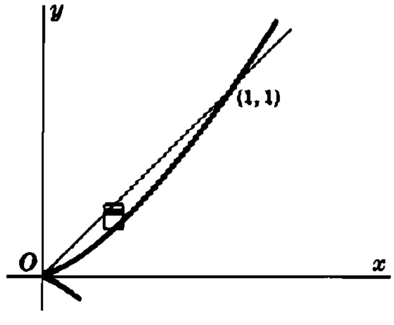

Fig. 63-6

Solución 1. Integrando primero por franjas horizontales (ver Fig. 63-5), es decir, con respecto a x, desde $x = y$ (la recta) hasta $x = y^{2/3}$ (la parábola), y después con respecto a y, desde $y = 0$ hasta $y = 1$, resulta:

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_y^{y^{2/3}} dx\,dy = \int_0^1 (y^{2/3} - y)\,dy = \left[\frac{3}{5}y^{5/3} - \frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

Solución 2. Integrando primero por franjas verticales (ver Fig. 63-6), es decir, con respecto a y, desde $y = x^{3/2}$ (la parábola) hasta $y = x$ (la recta), y después con respecto a x, desde $x = 0$ hasta $x = 1$, se obtiene

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_{x^{3/2}}^{x} dy\,dx = \int_0^1 (x - x^{3/2})\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1 = \frac{1}{10}$$

8. Hallar $\iint_R dA$ siendo R la región comprendida entre $y = 2x$ e $y = x^2$, situada a la izquierda de $x = 1$.

Integrando primero por franjas verticales (ver Fig. 63-7), tendremos

$$\iint_R dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{2x} dy\,dx = \int_0^1 (2x - x^2)\,dx = \frac{2}{3}$$

Si integramos por franjas horizontales (ver Fig. 63-8), se necesita calcular dos integrales iteradas. Llamando R_1 a la parte de R situada por debajo de AB y R_2 la situada por encima de AB, tendremos

$$\iint_R dA = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA = \int_0^1 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} dx\,dy + \int_1^2 \int_{y/2}^{1} dx\,dy = \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

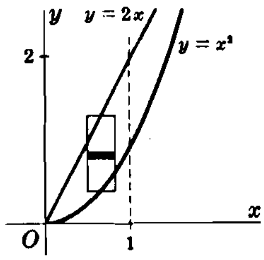

Fig. 63-7

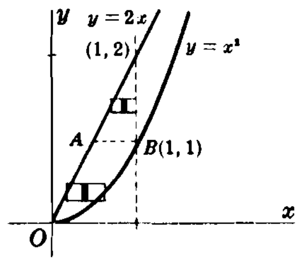

Fig. 63-8

9. Hallar $\iint_R x^2\,dA$ siendo R la región del primer cuadrante limitada por la hipérbola $xy = 16$ y las rectas $y = x$, $y = 0$ y $x = 8$ (Fig. 63-9).

De la Fig. 63-9 se deduce la conveniencia de dividir R en dos regiones y calcular una integral iterada en cada una de ellas. Llamando R_1 a la parte de R situada por encima de la recta $y = 2$ y R_2 la situada por debajo, tendremos

$$\iint_R x^2\,dA = \iint_{R_1} x^2\,dA + \iint_{R_2} x^2\,dA = \int_2^4 \int_y^{16/y} x^2\,dx\,dy + \int_0^2 \int_y^8 x^2\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_2^4 \left(\frac{16^3}{y^3} - y^3\right) dy + \frac{1}{3}\int_0^2 (8^3 - y^3)\,dy = 448$$

Se deja como ejercicio dividir R por la recta $x = 4$ y obtener

$$\iint_R x^2\,dA = \int_0^4 \int_0^x x^2\,dy\,dx + \int_4^8 \int_0^{16/x} x^2\,dy\,dx$$

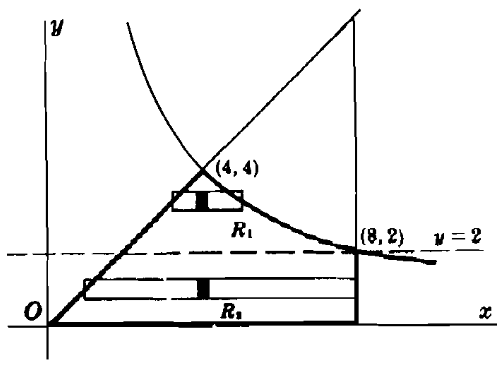

Fig. 63-9

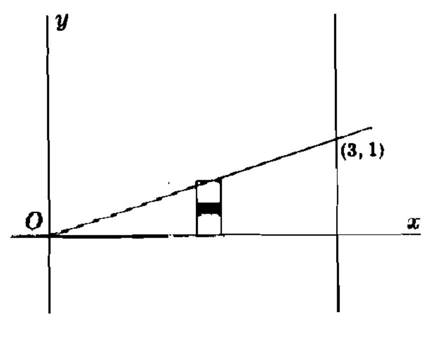

Fig. 63-10

10. Hallar $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy$ invertiendo, previamente, el orden de integración.

La integral dada no se puede hallar directamente porque $\int e^{x^2}\,dx$ no es una función elemental.

La región de integración R está limitada por las rectas $x = 3y$, $x = 3$ e $y = 0$. Para invertir el orden de integración, integramos primero con respecto a y, desde $y = 0$ hasta $y = x/3$, y después con respecto a x, desde $x = 0$ hasta $x = 3$. Así pues,

$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^3 \int_0^{x/3} e^{x^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^3 e^{x^2} y\Big]_0^{x/3} dx = \frac{1}{3}\int_0^3 e^{x^2} x\,dx = \frac{1}{6}e^{x^2}\Big]_0^3 = \frac{1}{6}(e^9 - 1)$$

Problemas propuestos

11. Hallar las integrales iteradas:

(*a*) $\int_0^1 \int_1^2 dx\,dy = 1$

(*b*) $\int_1^2 \int_0^3 (x + y)\,dx\,dy = 9$

(*c*) $\int_2^4 \int_1^2 (x^2 + y^2)\,dy\,dx = \frac{70}{3}$

(*d*) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2\,dy\,dx = \frac{1}{40}$

(*e*) $\int_1^2 \int_0^{y^{3/2}} x/y^2\,dx\,dy = \frac{3}{4}$

(*f*) $\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (y + y^3)\,dy\,dx = \frac{7}{60}$

(*g*) $\int_0^1 \int_0^{x^2} xe^y\,dy\,dx = \frac{1}{2}e - 1$

(*h*) $\int_2^4 \int_y^{8-y} y\,dx\,dy = \frac{32}{3}$

(*i*) $\int_0^{\text{Arc tag } 3/2} \int_0^{2 \sec\theta} \rho\,d\rho\,d\theta = 3$

(*j*) $\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^2 \cos\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{8}{3}$

(*k*) $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\text{tag}\,\theta \sec\theta} \rho^3 \cos^2\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{20}$

(*l*) $\int_0^{2\pi} \int_0^{1 - \cos\theta} \rho^3 \cos^2\theta\,d\rho\,d\theta = \frac{49}{32}\pi$

12. Hallar, mediante integrales iteradas, las siguientes integrales dobles, efectuando la integración en los dos órdenes en los casos que sean posibles.

(*a*) de x, en la región limitada por $y = x^2$ e $y = x^3$. *Sol.* 1/20

(*b*) de y, en la región de (*a*). *Sol.* 1/35

(*c*) de x^2, en la región limitada por $y = x$, $y = 2x$ y $x = 2$. *Sol.* 4

(*d*) de 1, en la región del primer cuadrante limitada por $2y = x^2$, $y = 3x$ y $x + y = 4$. *Sol.* 8/3; 46/3

(*e*) de y, en la región por encima de $y = 0$ limitada por $y^2 = 4x$ e $y^2 = 5 - x$. *Sol.* 5

(*f*) de $\dfrac{1}{\sqrt{2y - y^2}}$ en la región del primer cuadrante limitada por $x^2 = 4 - 2y$. *Sol.* 4

13. En los Problemas 11 (*a*)-(*h*), invertir el orden de integración y hallar las integrales iteradas que resultan.

Capítulo 64

Centro geométrico y momentos de inercia de areas planas

AREA PLANA MEDIANTE UNA INTEGRAL DOBLE. En el caso de que $f(x, y) = 1$, la integral definida en el Capítulo 63 adquiere la forma $\iint_R dA$, que, en unidades de volumen, es el correspondiente a un cilindro de altura unidad y, en unidades de superficie, representa el área de la región R.

(Ver Problemas 1-2.)

En coordenadas polares, $A = \iint_R dA = \int_\alpha^\beta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \rho\, d\rho\, d\theta$, donde $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, $\varrho_1(\theta)$, y $\varrho_2(\theta)$ se toman de forma que quede recorrida la región R.

(Ver Problemas 3-5.)

CENTRO GEOMETRICO. Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centroide de una región plana R de área $A = \iint_R dA$ satisfacen las relaciones

$$A \cdot \bar{x} = M_2 \qquad \text{y} \qquad A \cdot \bar{y} = M_2$$

o

$$\bar{x} \cdot \iint_R dA = \iint_R x\, dA \qquad \text{y} \qquad \bar{y} \cdot \iint_R dA = \iint_R y\, dA$$

(Ver Problemas 6-9.)

EL MOMENTO DE INERCIA de una región plana R con respecto a los ejes coordenados viene dado por

$$I_x = \iint_R y^2\, dA \qquad \text{e} \qquad I_y = \iint_R x^2\, dA$$

El momento de inercia polar (momento de inercia con respecto a una recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano del área) de una región plana R viene dada por

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2)\, dA$$

(Ver Problemas 10-12.)

Problemas resueltos

1. Hallar el área limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 2x + 3$.

Trazando franjas verticales (ver Fig. 64-1), tenemos

$$A = \int_{-1}^{3} \int_{x^2}^{2x+3} dy\, dx$$
$$= \int_{-1}^{3} (2x + 3 - x^2)\, dx$$
$$= 32/3 \text{ unidades de superficie}$$

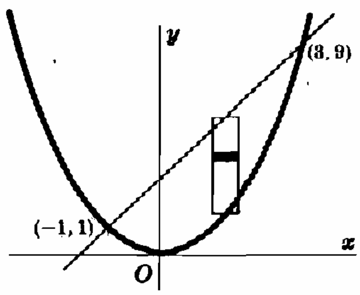

Fig. 64-1

2. Hallar el área comprendida entre las parábolas $y^2 = 4 - x$ e $y^2 = 4 - 4x$.

Integrando por franjas horizontales (ver Fig. 64-2) y teniendo en cuenta la simetría que se observa en la figura,

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^2 \int_{1-y^2/4}^{4-y^2} dx\, dy \\ &= 2\int_0^2 [(4-y^2) - (1-\tfrac{1}{4}y^2)]\, dy \\ &= 6\int_0^2 (1-\tfrac{1}{4}y^2)\, dy \\ &= 8 \text{ unidades de superficie.} \end{aligned}$$

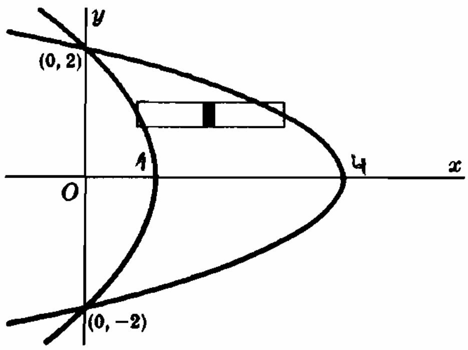

Fig. 64-2

3. Hallar el área exterior a la circunferencia $\varrho = 2$, e interior a la cardioide $\varrho = 2(1 + \cos\theta)$.

Dada la simetría, el área pedida es igual al doble del área barrida al variar θ desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Así pues,

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^{\pi/2} \int_2^{2(1+\cos\theta)} \rho\, d\rho\, d\theta \;=\; 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\rho^2\Big]_2^{2(1+\cos\theta)} d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2} (2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta \\ &= 4\left[2\,\text{sen}\,\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\text{sen}\,2\theta\right]_0^{\pi/2} \;=\; (\pi + 8)\,\text{unid.de sup.} \end{aligned}$$

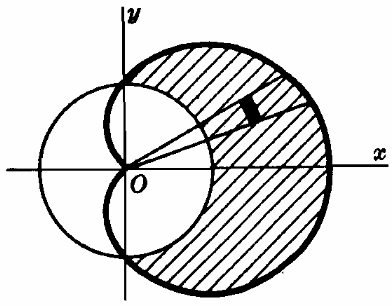

Fig. 64-3

4. Hallar el área interior a la circunferencia $\varrho = 4\,\text{sen}\,\theta$ y exterior a la lemniscata $\varrho^2 = 8\cos 2\theta$.

El área pedida es igual al doble de la correspondiente del primer cuadrante limitada por las dos curvas y la recta $\theta = \frac{1}{4}\pi$. Obsérvese que el arco AO de la lemniscata se genera al variar θ desde $\theta = \pi/6$ hasta $\theta = \pi/4$, mientras que el arco AB de la circunferencia lo hace al variar θ desde $\theta = \pi/6$ hasta $\theta = \pi/2$. Este área conviene dividirla en dos partes, una por debajo y otra por encima de la recta $\theta = \pi/4$. Así, pues,

$$\begin{aligned} A &= 2\int_{\pi/6}^{\pi/4} \int_{2\sqrt{2\cos 2\theta}}^{4\,\text{sen}\,\theta} \rho\, d\rho\, d\theta \;+\; 2\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{4\,\text{sen}\,\theta} \rho\, d\rho\, d\theta \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} (16\,\text{sen}^2\theta - 8\cos 2\theta)\, d\theta \;+\; \int_{\pi/4}^{\pi/2} 16\,\text{sen}^2\theta\, d\theta \\ &= (\tfrac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3} - 4) \text{ unidades de superficie} \end{aligned}$$

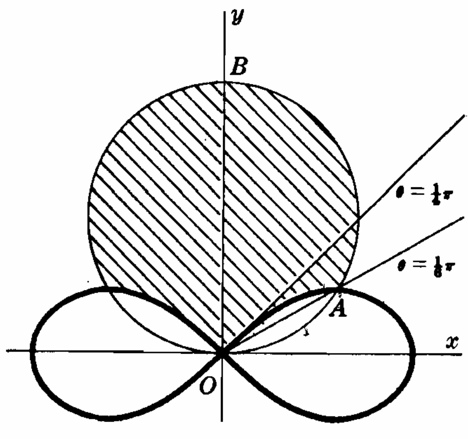

Fig. 64-4

5. Hallar $\quad N = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx.$

Como $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy,$

$$\begin{aligned} N^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, dy \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy \;=\; \iint_R e^{-(x^2+y^2)}\, dA \end{aligned}$$

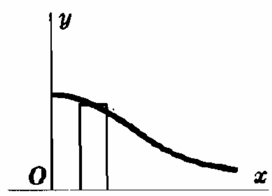

Fig. 64-5

Pasando a coordenadas polares ($x^2 + y^2 = \varrho^2$, $dA = \varrho\, d\varrho\, d\theta$),

$$N^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2} \cdot \rho\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \left\{ \lim_{a\to+\infty} (-\tfrac{1}{2}e^{-\rho^2})\Big]_0^a \right\} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

y $\quad N = \sqrt{\pi}/2.$

6. Hallar el centro geométrico del área plana limitada por la parábola $y = 6x - x^2$ y la recta $y = x$.

$$A = \iint_R dA = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} dy\,dx = \int_0^5 (5x - x^2)\,dx = \frac{125}{6}$$

$$M_y = \iint_R x\,dA = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} x\,dy\,dx = \int_0^5 (5x^2 - x^3)\,dx = \frac{625}{12}$$

$$M_x = \iint_R y\,dA = \int_0^5 \int_x^{6x-x^2} y\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^5 \{(6x - x^2)^2 - x^2\}\,dx = \frac{625}{6}$$

Luego, $\bar{x} = \dfrac{M_y}{A} = \dfrac{5}{2}$, $\bar{y} = \dfrac{M_x}{A} = 5$, y las coordenadas del centro geométrico son $(\frac{5}{2}, 5)$.

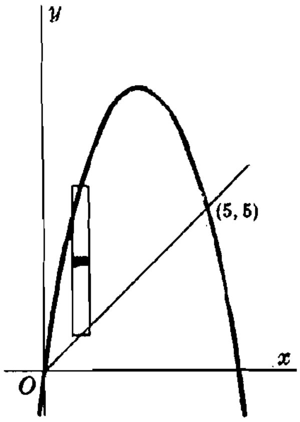

Fig. 64-6

7. Determinar el centro geométrico del área plana limitada por las parábolas $y = 2x - x^2$ e $y = 3x^2 - 6x$.

$$A = \iint_R dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dy\,dx = \int_0^2 (8x - 4x^2)\,dx = \frac{16}{3}$$

$$M_y = \iint_R x\,dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} x\,dy\,dx = \int_0^2 (8x^2 - 4x^3)\,dx = \frac{16}{3}$$

$$M_x = \iint_R y\,dA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} y\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \{(2x - x^2)^2 - (3x^2 - 6x)^2\}\,dx = -\frac{64}{15}$$

Luego, $\bar{x} = \dfrac{M_y}{A} = 1$, $\bar{y} = \dfrac{M_x}{A} = -\dfrac{4}{5}$, el centro geométrico es el punto $(1, -\frac{4}{5})$.

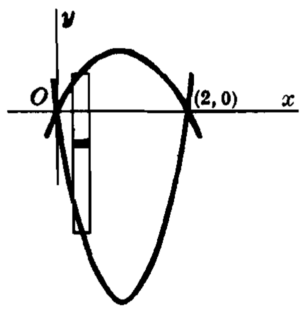

Fig. 64-7

8. Hallar el centro geométrico del área plana exterior a la circunferencia $\rho = 1$ e interior a la cardioide $\rho = 1 + \cos\theta$. (Ver Fig. 64-8.)

De la figura se deduce que $\bar{y} = 0$ y que es la que corresponde a la mitad situada por encima del eje polar. Para esta última área,

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/2} \int_1^{1+\cos\theta} \rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \{(1 + \cos\theta)^2 - 1^2\}\,d\theta = \frac{\pi + 8}{8}$$

$$M_y = \iint_R x\,dA = \int_0^{\pi/2} \int_1^{1+\cos\theta} (\rho\cos\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{3}{2}\theta + \frac{3}{4}\operatorname{sen}2\theta + 3\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta + \frac{3}{8}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen}2\theta + \frac{1}{32}\operatorname{sen}4\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{15\pi + 32}{48}$$

Las coordenadas del centro geométrico son $\left(\dfrac{15\pi + 32}{6(\pi + 8)}, 0\right)$.

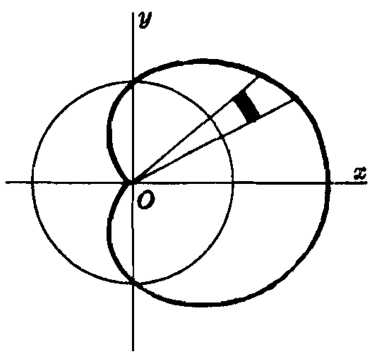

Fig. 64-8

9. Determinar el centro geométrico del área interior a $\rho = \operatorname{sen}\theta$ y exterior a $\rho = 1 - \cos\theta$. (Ver Fig. 64-9.)

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/2} \int_{1-\cos\theta}^{\operatorname{sen}\theta} \rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (2\cos\theta - 1 - \cos 2\theta)\,d\theta = \frac{4 - \pi}{4}$$

$$M_y = \iint_R x\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_{1-\cos\theta}^{\operatorname{sen}\theta} (\rho\cos\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^3\theta - 1 + 3\cos\theta - 3\cos^2\theta + \cos^3\theta)\cos\theta\,d\theta$$
$$= \frac{15\pi - 44}{48}$$

$$M_x = \iint_R y\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_{1-\cos\theta}^{\operatorname{sen}\theta} (\rho\operatorname{sen}\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^3\theta - 1 + 3\cos\theta - 3\cos^2\theta + \cos^3\theta)\operatorname{sen}\theta\,d\theta$$
$$= \frac{3\pi - 4}{48}$$

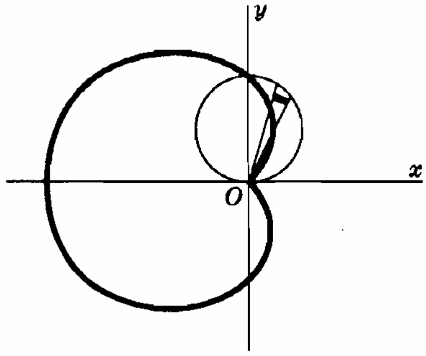

Fig. 64-9

Las coordenadas del centro geométrico son $\left(\dfrac{15\pi - 44}{12(4-\pi)}, \dfrac{3\pi - 4}{12(4-\pi)}\right)$

10. Hallar I_x, I_y e I_0 del área limitada por el lazo de $y^2 = x^2(2-x)$.

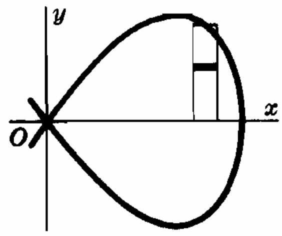

Fig. 64-10

$$A = \iint_R dA = 2\int_0^2\int_0^{x\sqrt{2-x}} dy\,dx = 2\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx$$
$$= -4\int_{\sqrt{2}}^0 (2z^2 - z^4)\,dz = -4\left[\frac{2}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5\right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{32\sqrt{2}}{15}$$

haciendo el cambio $2 - x = z^2$.

$$I_x = \iint_R y^2\,dA = 2\int_0^2\int_0^{x\sqrt{2-x}} y^2\,dy\,dx = \frac{2}{3}\int_0^2 x^3(2-x)^{3/2}\,dx$$
$$= -\frac{4}{3}\int_{\sqrt{2}}^0 (2-z^2)^3 z^4\,dz = -\frac{4}{3}\left[\frac{8}{5}z^5 - \frac{12}{7}z^7 + \frac{2}{3}z^9 - \frac{1}{11}z^{11}\right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{2048\sqrt{2}}{3465} = \frac{64}{231}A$$

$$I_y = \iint_R x^2\,dA = 2\int_0^2\int_0^{x\sqrt{2-x}} x^2\,dy\,dx = 2\int_0^2 x^3\sqrt{2-x}\,dx$$
$$= -4\int_{\sqrt{2}}^0 (2-z^2)^3 z^2\,dz = -4\left[\frac{8}{3}z^3 - \frac{12}{5}z^5 + \frac{6}{7}z^7 - \frac{1}{9}z^9\right]_{\sqrt{2}}^0 = \frac{1024\sqrt{2}}{315} = \frac{32}{21}A$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{13312\sqrt{2}}{3465} = \frac{416}{231}A.$$

11. Hallar I_x, I_y e I_0 del área del primer cuadrante exterior a la circunferencia $\rho = 2a$ e interior a la circunferencia $\rho = 4a\cos\theta$.

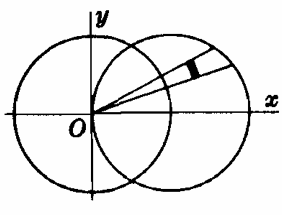

Fig. 64-11

$$A = \iint_R dA = \int_0^{\pi/3}\int_{2a}^{4a\cos\theta} \rho\,d\rho\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \{(4a\cos\theta)^2 - (2a)^2\}\,d\theta = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{3}a^2$$

$$I_x = \iint_R y^2\,dA = \int_0^{\pi/3}\int_{2a}^{4a\cos\theta} (\rho\operatorname{sen}\theta)^2\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/3}\{(4a\cos\theta)^4 - (2a)^4\}\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta$$
$$= 4a^4\int_0^{\pi/3}(16\cos^4\theta - 1)\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{4\pi + 9\sqrt{3}}{6}a^4 = \frac{4\pi + 9\sqrt{3}}{2(2\pi + 3\sqrt{3})}a^2A$$

$$I_y = \iint_R x^2\,dA = \int_0^{\pi/3}\int_{2a}^{4a\cos\theta} (\rho\cos\theta)^2\rho\,d\rho\,d\theta = \frac{12\pi + 11\sqrt{3}}{2}a^4 = \frac{3(12\pi + 11\sqrt{3})}{2(2\pi + 3\sqrt{3})}a^2A$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{20\pi + 21\sqrt{3}}{3}a^4 = \frac{20\pi + 21\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}}a^2A$$

12. Hallar I_x, I_y e I_0 del área del círculo $\varrho = 2(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)$.

Como $x^2 + y^2 = \varrho^2$,

$$I_0 = \iint_R (x^2+y^2)\,dA = \int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}\int_0^{2(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)} \rho^2\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= 4\int_{-\frac{1}{4}\pi}^{\frac{3}{4}\pi} (\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)^4\,d\theta$$

$$= 4\left[\frac{3}{2}\theta - \cos 2\theta - \frac{1}{8}\operatorname{sen}4\theta\right]_{-1/4\,\pi}^{3/4\,\pi} = 6\pi = 3A$$

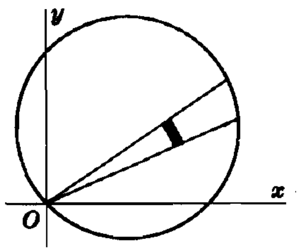

Fig. 64-12

De la Fig. 64-12, se deduce que $I_x = I_y$. Luego $I_x = I_y = \frac{1}{2}I_0 = \frac{3}{2}A$.

Problemas propuestos

13. Hallar mediante una integral doble las áreas siguientes:

(*a*) la limitada por $3x + 4y = 24$, $x = 0$, $y = 0$. *Sol.* 24 un. sup.
(*b*) la limitada por $x + y = 2$, $2y = x + 4$, $y = 0$. *Sol.* 6 un. sup.
(*c*) la limitada por $x^2 = 4y$, $8y = x^2 + 16$. *Sol.* 32/3 un. sup.
(*d*) la interior a $\varrho = 2(1 - \cos\theta)$. *Sol.* 6π un. sup.
(*e*) la limitada por $\varrho = \operatorname{tag}\theta\sec\theta$ y $\theta = \pi/3$. *Sol.* $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ un. sup.
(*f*) la exterior a $\varrho = 4$ e interior a $\varrho = 8\cos\theta$. *Sol.* $8(\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3})$ un. sup.

14. Determinar el centro geométrico de las áreas siguientes:

(*a*) la del Problema 13(*a*). *Sol.* (8/3, 2)
(*b*) la del primer cuadrante del Problema 13(*c*). *Sol.* (3/2, 8/5)
(*c*) la del primer cuadrante limitada por $y^2 = 6x$, $y = 0$, $x = 6$. *Sol.* (18/5, 9/4)
(*d*) la limitada por $y^2 = 4x$, $x^2 = 5 - 2y$, $x = 0$. *Sol.* (13/40, 26/15)
(*e*) la del primer cuadrante limitada por $x^2 - 8y + 4 = 0$, $x^2 = 4y$, $x = 0$. *Sol.* (3/4, 2/5)
(*f*) la del Problema 13(*e*). *Sol.* $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, 6/5)$
(*g*) la del primer cuadrante del Problema 13(*f*). *Sol.* $\left(\dfrac{16\pi + 6\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}}, \dfrac{22}{2\pi + 3\sqrt{3}}\right)$

15. Demostrar que si $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [g_2^2(\theta) - g_1^2(\theta)]\,d\theta = \int_\alpha^\beta\int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \rho\,d\rho\,d\theta = \iint_R dA$, se verifica

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

16. Hallar I_x e I_y de las áreas siguientes:

(*a*) la del Problema 13(*a*). *Sol.* $I_x = 6A$, $I_y = \frac{32}{3}A$
(*b*) la limitada por $y^2 = 8x$ y la ordenada del punto $x = 2$. *Sol.* $I_x = \frac{16}{5}A$, $I_y = \frac{12}{7}A$
(*c*) la limitada por $y = x^2$ e $y = x$. *Sol.* $I_x = \frac{3}{14}A$, $I_y = \frac{3}{10}A$
(*d*) la limitada por $y = 4x - x^2$ e $y = x$. *Sol.* $I_x = \frac{459}{70}A$, $I_y = \frac{27}{10}A$

17. Hallar I_x e I_y de un lazo de $\varrho^2 = \cos 2\theta$. *Sol.* $I_x = \left(\dfrac{\pi}{16} - \dfrac{1}{6}\right)A$, $I_y = \left(\dfrac{\pi}{16} + \dfrac{1}{6}\right)A$

18. Hallar I_0 de las áreas siguientes:

(*a*) un lazo de $\varrho = \operatorname{sen}2\theta$. *Sol.* $\frac{3}{8}A$ (*b*) la limitada por $\varrho = 1 + \cos\theta$. *Sol.* $\frac{35}{24}A$

Capítulo 65

Volumen limitado por una superficie

Integral doble

EL VOLUMEN LIMITADO POR UNA SUPERFICIE de ecuación $z = f(x, y)$, o bien $z = f(\varrho, \theta)$, es decir, el volumen de una columna vertical cuya base superior está en la superficie y la base inferior en el plano xOy, viene definido por la integral doble $V = \iint_R z\,dA$, siendo R la región que constituye la base inferior de la columna.

Problemas resueltos

1. Hallar el volumen en el primer octante comprendido entre los planos $z = 0$ y $z = x + y + 2$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

De la Fig. 65-1 se deduce que hemos de integrar $z = x + y + 2$ según el cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 16$ en el plano xOy. Por consiguiente,

$$V = \iint_R z\,dA = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} (x + y + 2)\,dy\,dx = \int_0^4 (x\sqrt{16-x^2} + 8 - \tfrac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{16-x^2})\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}(16-x^2)^{3/2} + 8x - \frac{x^3}{6} + x\sqrt{16-x^2} + 16 \operatorname{arc\,sen} \frac{1}{4}x\right]_0^4 = \left(\frac{128}{3} + 8\pi\right) \text{unidades de volumen}$$

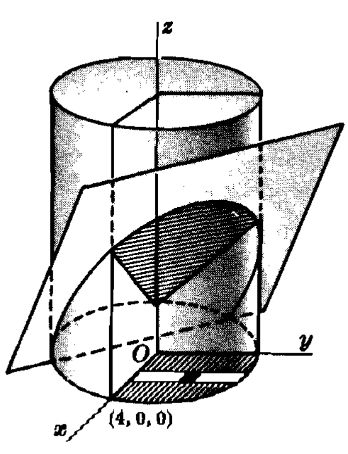

Fig. 65-1

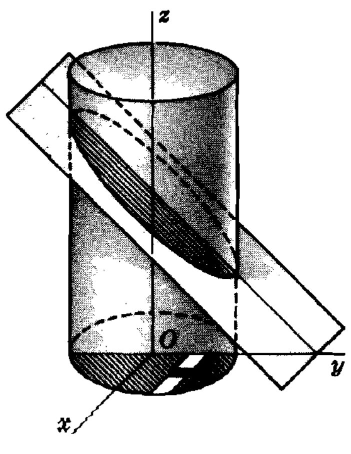

Fig. 65-2

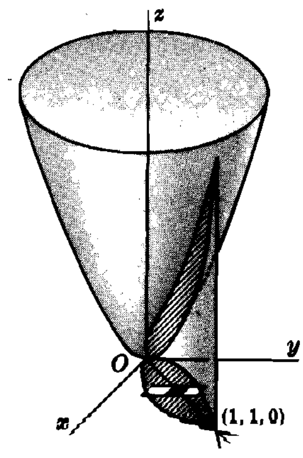

Fig. 65-3

2. Hallar el volumen limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $y + z = 4$ y $z = 0$.

De la Fig. 65-2 se deduce que hemos de integrar $z = 4 - y$ según el cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 4$ en el plano xOy. Por consiguiente,

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y)\,dx\,dy = 2\int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y)\,dx\,dy = 16\pi \text{ unidades de volumen}$$

3. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $x^2 + 4y^2 = z$, el plano $z = 0$ y los cilindros $y^2 = x$ y $x^2 = y$ (ver Fig. 65-3).

El volumen pedido se obtiene por integración de $z = x^2 + 4y^2$ en la región R común a las parábolas $y^2 = x$ y $x^2 = y$ en el plano xOy. Por consiguiente,

$$V = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + 4y^2)\, dy\, dx = \int_0^1 \left(x^2y + \frac{4}{3}y^3\right)\Big]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \frac{3}{7} \text{ unidades de volumen}$$

4. Hallar el volumen de la porción de cilindro $4x^2 + y^2 = a^2$ comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = my$ (ver Fig. 65-4).

El volumen se obtiene integrando $z = my$ según la mitad de la elipse $4x^2 + y^2 = a^2$. Así pues,

$$V = 2\int_0^{a/2} \int_0^{\sqrt{a^2-4x^2}} my\, dy\, dx = m\int_0^{a/2} y^2\Big]_0^{\sqrt{a^2-4x^2}} dx = \frac{ma^3}{3} \text{ unidades de volumen}$$

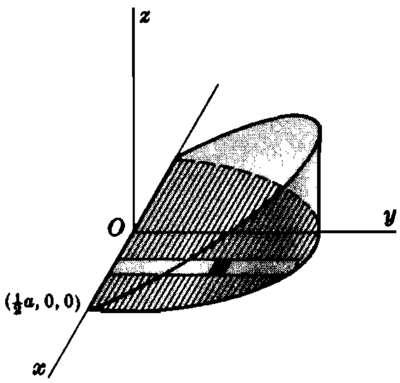

Fig. 65-4

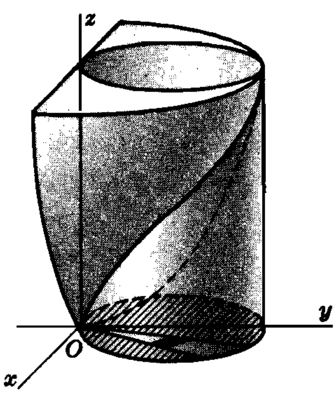

Fig. 65-5

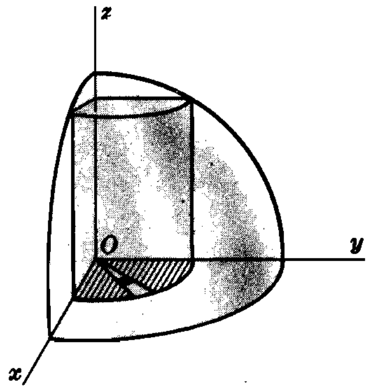

Fig. 65-6

5. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$, el cilindro $x^2 + y^2 = 8y$ y el plano $z = 0$ (ver Fig. 65-5).

El volumen pedido se obtiene integrando $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ según el círculo $x^2 + y^2 = 8y$. En coordenadas cilíndricas, el volumen se obtiene al integrar $z = \frac{1}{4}\rho^2$ en el círculo $\rho = 8 \operatorname{sen} \theta$. Por tanto,

$$V = \iint_R z\, dA = \int_0^{\pi} \int_0^{8 \operatorname{sen} \theta} z\rho\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \int_0^{8 \operatorname{sen} \theta} \rho^3\, d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^{\pi} \rho^4\Big]_0^{8 \operatorname{sen} \theta} d\theta = 256\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^4 \theta\, d\theta = 96\pi \text{ unidades de volumen}$$

6. Hallar el volumen que se elimina cuando a una esfera de radio $2a$ se le practica un taladro de radio a de forma que el eje del orificio sea un diámetro de la esfera (ver Fig. 65-6).

De la figura se deduce que el volumen pedido es igual a ocho veces el correspondiente al del primer cuadrante limitado por el cilindro $\rho^2 = a^2$, la esfera $\rho^2 + z^2 = 4a^2$ y el plano $z = 0$. Este último volumen se obtiene integrando $z = \sqrt{4a^2 - \rho^2}$ en un cuadrante del círculo $\rho = a$. Por tanto,

$$V = 8\int_0^{\pi/2} \int_0^{a} \sqrt{4a^2 - \rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} (8a^3 - 3\sqrt{3}\, a^3)\, d\theta = \frac{4}{3}(8 - 3\sqrt{3})a^3\pi \text{ unid. de vol.}$$

Problemas propuestos

7. Hallar el volumen limitado por $9x^2 + 4y^2 + 36z = 36$ y el plano $z = 0$. *Sol.* 3π unidades de volumen.

8. Hallar el volumen limitado por $z = 3x$ y por encima del área del primer cuadrante limitada por $x = 0$, $y = 0$, $x = 4$, y $x^2 + y^2 = 25$. *Sol.* 98 unidades de volumen.

9. Hallar el volumen del primer octante limitado por $x^2 + z = 9$, $3x + 4y = 24$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. *Sol.* 1 485/16 unidades de volumen.

10. Hallar el volumen del primer octante limitado por $xy = 4z$, $y = x$ y $x = 4$. *Sol.* 8 un. vol.

11. Hallar el volumen del primer octante limitado por $x^2 + y^2 = 25$ y $z = y$. *Sol.* 125/3 un. vol.

12. Hallar el volumen común a los cilindros $x^2 + y^2 = 16$ y $x^2 + z^2 = 16$. *Sol.* 1 024/3 un. vol.

13. Hallar el volumen del primer octante interior a $y^2 + z^2 = 9$ y exterior a $y^2 = 3x$. *Sol.* $27\pi/16$ un. vol.

14. Hallar el volumen del primer octante limitado por $x^2 + z^2 = 16$ y $x - y = 0$. *Sol.* 64/3 un. vol.

15. Hallar el volumen delante de $x = 0$ y común a $y^2 + z^2 = 4$ e $y^2 + z^2 + 2x = 16$. *Sol.* 28π un. vol.

16. Hallar el volumen interior a $\varrho = 2$ y exterior al cono $z^2 = \varrho^2$. *Sol.* $32\pi/3$ un. vol.

17. Hallar el volumen interior a $y^2 + z^2 = 2$ y exterior a $x^2 - y^2 - z^2 = 2$. *Sol.* $8\pi(4 - \sqrt{2})/3$ un. vol.

18. Hallar el volumen común a $\varrho^2 + z^2 = a^2$ y $\varrho = a \operatorname{sen} \theta$. *Sol.* $2(3\pi - 4)a^3/9$ un. vol.

19. Hallar el volumen interior a $x^2 + y^2 = 9$, limitado inferiormente por $x^2 + y^2 + 4z = 16$ y superiormente por $z = 4$. *Sol.* $81\pi/8$ un. vol.

20. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $4x^2 + y^2 = 4z$ y el plano $z - y = 2$. *Sol.* 9π un. vol.

21. Hallar el volumen generado al girar la cardioide $\varrho = 2(1 - \cos \theta)$ alrededor del eje polar.
Sol. $V = 2\pi \int\int y\, \varrho\, d\varrho\, d\theta = 64\pi/3$ un. vol.

22. Hallar el volumen generado al girar un pétalo de $\varrho = \operatorname{sen} 2\theta$ alrededor de su eje. *Sol.* $32\pi/105$ un. vol.

23. En una esfera de radio 2 (unidades de longitud) se practica un taladro de sección cuadrada de lado igual a 2 (unidades de longitud), siendo su eje un diámetro de la esfera. Demostrar que el volumen eliminado es $\frac{4}{3}(2\sqrt{2} + 19\pi - 54 \operatorname{arc\,tag} \sqrt{2})$ unidades de volumen.

Capítulo 66

Area de una superficie

Integral doble

EN EL CALCULO DE LA LONGITUD DE UN ARCO se efectúan las operaciones siguientes: (1) Se proyecta el arco sobre uno de los ejes coordenados determinando un cierto intervalo sobre el eje y (2) se integra la función $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, si la proyección se realiza sobre el eje x, o bien $\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$, si la proyección se realiza sobre el eje y, en el intervalo anterior.

Para calcular el área S de una porción R' de una superficie $z = f(x, y)$ se sigue un procedimiento análogo:

(1) Se proyecta R' sobre uno de los planos coordenados determinando una región R en dicho plano.

(2) Se integra, en la región R la función

$$S = \iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA, \text{ si } R' \text{ se proyecta sobre } xOy$$

$$S = \iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dA, \text{ si } R' \text{ se proyecta sobre } yOz$$

$$S = \iint_R \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dA, \text{ si } R' \text{ se proyecta sobre } zOx$$

Problemas resueltos

1. Sea R' una región de área S sobre la superficie $z = f(x,y)$. Por el contorno de R' pasa un cilindro vertical (ver Fig. 66-1) que corta al plano xOy según la región R. Se divide R en n subregiones ΔA_i (de áreas ΔA_i) y sea ΔS_i el área de la proyección de ΔA_i sobre R'. Se elige un punto P_i en cada subregión ΔS_i y se traza en él, el plano tangente a la superficie, siendo ΔT_i el área de la proyección de ΔA_i sobre este plano tangente. El valor ΔT_i es una aproximación del área ΔS_i.

El ángulo formado por el plano xOy y el plano tangente en P_i es igual al ángulo γ_i formado por el eje z, $[0, 0, 1]$ y la normal, $\left[-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right] = \left[-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1\right]$ a la superficie en P_i. Es decir,

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1}}$$

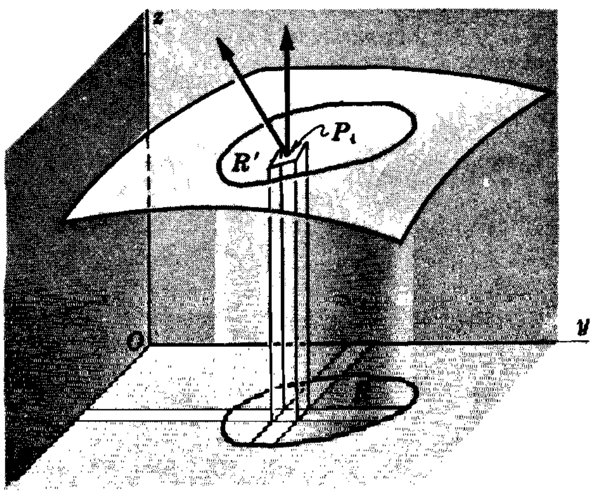

Fig. 66-1

Por tanto (ver Fig. 66-2),

$$\Delta T_i \cdot \cos\gamma_i = \Delta A_i \text{ y } \Delta T_i = \sec\gamma_i \cdot \Delta A_i$$

Luego, una aproximación de S es $\sum_{i=1}^{n} \Delta T_i = \sum_{i=1}^{n} \sec\gamma_i \cdot \Delta A_i$, y

$$S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \sec\gamma_i \cdot \Delta A_i = \iint_R \sec\gamma \cdot dA$$

$$= \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

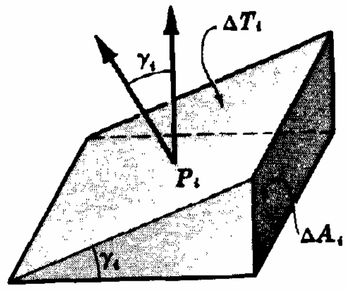

Fig. 66-2

2. Hallar el área de la porción del cono $x^2 + y^2 = 3z^2$ situada por encima del plano xOy e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 4y$.

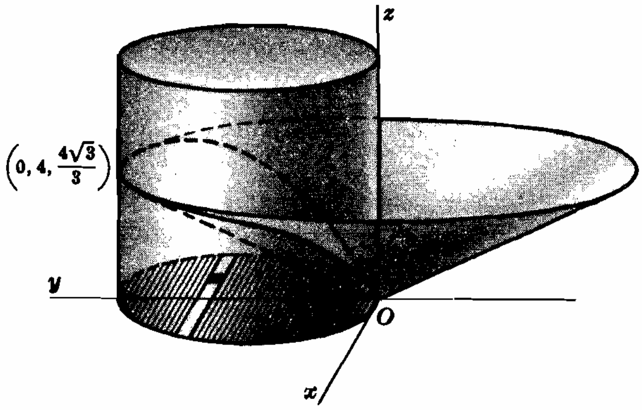

Fig. 66-3

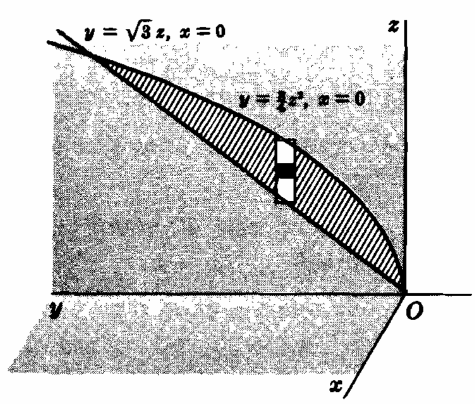

Fig. 66-4

Solución 1. La proyección del área pedida (ver Fig. 66-3) sobre el plano xOy es la región R limitada por el círculo $x^2 + y^2 = 4y$. Para el cono,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3}\cdot\frac{x}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3}\cdot\frac{y}{z},\quad \text{y}\quad 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{9z^2 + x^2 + y^2}{9z^2} = \frac{12z^2}{9z^2} = \frac{4}{3}$$

$$S = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA = \int_0^4 \int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} \frac{2}{\sqrt{3}}\, dx\, dy = 2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} dx\, dy$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^4 \sqrt{4y - y^2}\, dy = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi \text{ unidades de superficie}$$

Solución 2. La proyección de la mitad del área pedida, sobre el plano yOz, es la región R limitada por la recta $y = \sqrt{3}\,z$ y la parábola $y = \frac{3}{4}z^2$; esta ecuación se obtiene eliminando x en las ecuaciones de las dos superficies. Para el cono,

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x},\quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{3z}{x},\quad \text{y}\quad 1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2 + 9z^2}{x^2} = \frac{12z^2}{x^2} = \frac{12z^2}{3z^2 - y^2}$$

Luego,

$$S = 2\int_0^4 \int_{y/\sqrt{3}}^{2\sqrt{y}/\sqrt{3}} \frac{2\sqrt{3}\,z}{\sqrt{3z^2 - y^2}}\, dz\, dy = \frac{4\sqrt{3}}{3}\int_0^4 \left[\sqrt{3z^2 - y^2}\right]_{y/\sqrt{3}}^{2\sqrt{y}/\sqrt{3}} dy = \frac{4\sqrt{3}}{3}\int_0^4 \sqrt{4y - y^2}\, dy$$

Solución 3. Empleando coordenadas cilíndricas en la *Solución 1*, hemos de integrar la función $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ $= \frac{2}{\sqrt{3}}$ a lo largo de la región R limitada por la circunferencia $\rho = 4 \operatorname{sen}\theta$. Así pues,

$$S = \iint_R \frac{2}{\sqrt{3}}\, dA = \int_0^\pi \int_0^{4\operatorname{sen}\theta} \frac{2}{\sqrt{3}}\,\rho\, d\rho\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^\pi \left[\rho^2\right]_0^{4\operatorname{sen}\theta} d\theta$$

$$= \frac{16}{\sqrt{3}}\int_0^\pi \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi \text{ unidades de superficie}$$

3. Hallar el área de la porción del cilindro $x^2 + z^2 = 16$ situada dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ (Fig. 66-5).

En la figura, se representa la octava parte del área pedida, y su proyección sobre el plano xOy constituida por un cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 16$. Para el cilindro $x^2 + z^2 = 16$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \text{y} \quad 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2+z^2}{z^2} = \frac{16}{16-x^2}$$

Luego,

$$S = 8\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \frac{4}{\sqrt{16-x^2}}\, dy\, dx = 32\int_0^4 dx = 128 \text{ unidades de superficie}$$

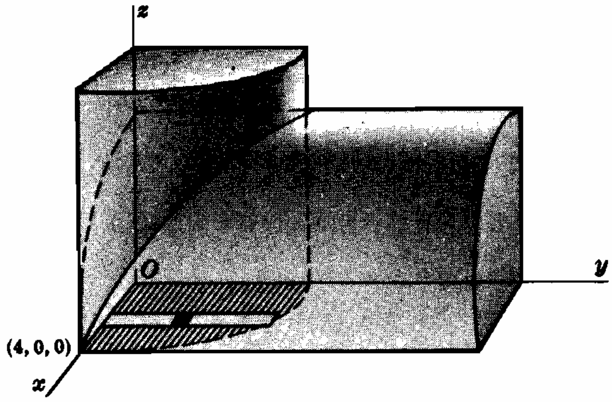

Fig. 66-5

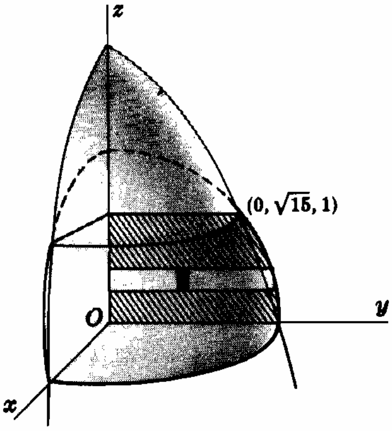

Fig. 66-6

4. Hallar el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ exterior al paraboloide $x^2 + y^2 + z = 16$ (Fig. 66-6).

En la figura, se representa la cuarta parte del área pedida, y su proyección sobre el plano yOz constituida por la región R limitada por la circunferencia $y^2 + z^2 = 16$, los ejes y y z y la recta $z = 1$. Para la esfera,

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{z}{x}, \quad \text{y} \quad 1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2} = \frac{16}{16-y^2-z^2}$$

Luego

$$S = 4\iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dA = 4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{16-z^2}} \frac{4}{\sqrt{16-y^2-z^2}}\, dy\, dz$$

$$= 16\int_0^1 \left[\operatorname{arc\,sen} \frac{y}{\sqrt{16-z^2}}\right]_0^{\sqrt{16-z^2}} dz = 16\int_0^1 \frac{1}{2}\pi\, dz = 8\pi \text{ unidades de superficie}$$

5. Hallar el área de la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 6y$ situada dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ (Fig. 66-7).

En la figura, se representa la cuarta parte del área pedida, su proyección sobre el plano yOz constituida por la región R limitada por los ejes z e y y la parábola $z^2 + 6y = 36$. Esta última ecuación resulta de eliminar x en las ecuaciones de las dos superficies. Para el cilindro,

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{3-y}{x}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = 0$$

y

$$1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2+9-6y+y^2}{x^2} = \frac{9}{6y-y^2}$$

Luego

$$S = 4\int_0^6 \int_0^{\sqrt{36-6y}} \frac{3}{\sqrt{6y-y^2}}\, dz\, dy$$

$$= 12\int_0^6 \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{y}}\, dy = 144 \text{ unidades de superficie}$$

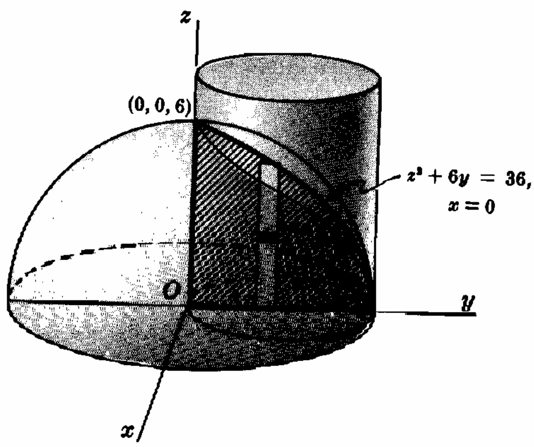

Fig. 66-7

Problemas propuestos

6. Hallar el área de la porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ interior al prisma vertical cuya base es el triángulo limitado por las rectas $y = x$, $x = 0$ e $y = 1$ en el plano xOy. *Sol.* $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ unidades de superficie.

7. Hallar el área de la porción del plano $x + y + z = 6$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
Sol. $4\sqrt{3}\pi$ un. sup.

8. Hallar el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 6y$.
Sol. $72(\pi - 2)$ un. sup.

9. Hallar el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ interior al paraboloide $x^2 + y^2 = z$.
Sol. 4π un. sup.

10. Hallar el área de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ entre los planos $z = 2$ y $z = 4$.
Sol. 20π un. sup.

11. Hallar el área de la porción de la esfera $z = xy$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$.
Sol. $2\pi(2\sqrt{2} - 1)/3$ un. sup.

12. Hallar el área de la superficie del cono $x^2 + y^2 - 9z^2 = 0$ encima del plano $z = 0$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 = 6y$.
Sol. $3\sqrt{10}\pi$ un. sup.

13. Hallar el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ interior al cilindro elíptico $2x^2 + y^2 = 25$.
Sol. 50π un.sup.

14. Hallar el área de la superficie de $x^2 + y^2 - az = 0$ que está situada directamente encima de la lemniscata $4\varrho^2 = a^2 \cos 2\theta$.
Sol. $S = \dfrac{4}{a}\displaystyle\iint \sqrt{4\rho^2 + a^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = \dfrac{a^2}{3}\left\{\dfrac{5}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right\}$ un. sup.

15. Hallar el área de la superficie de $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está situada directamente encima de la cardioide $\varrho = 1 - \cos\theta$.
Sol. $8[\pi - \sqrt{2} - \ln(\sqrt{2} + 1)]$ un. sup.

Capítulo 67

Integral triple

LA INTEGRAL TRIPLE $\iiint\limits_R f(x, y, z)\, dV$ de una función de tres variables independientes extendida a una región cerrada R de puntos (x, y, z), de volumen V, en la cual la función es uniforme y continua no es más que una generalización del concepto de integral simple y doble.

En el caso de que $f(x, y, z) = 1$, la integral $\iiint\limits_R f(x, y, z)\, dV$ representa la medida del volumen de la región R.

CALCULO DE LA INTEGRAL TRIPLE $\iiint\limits_R f(x, y, z)\, dV$ en coordenadas rectangulares.

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy, \quad \text{etc.}$$

tomando los límites de integración de forma que cubran la región R.

CALCULO DE LA INTEGRAL TRIPLE $\iiint\limits_R f(\rho, \theta, z)\, dV$ en coordenadas cilíndricas.

$$\iiint\limits_R f(\rho,\theta,z)\,dV = \int_\alpha^\beta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho,\theta,z)\,\rho\,dz\,d\rho\,d\theta$$

tomando los límites de integración de forma que cubran la región R.

CALCULO DE LA INTEGRAL TRIPLE $\iiint\limits_R f(\rho, \phi, \theta)\, dV$ en coordenadas esféricas.

$$\iiint\limits_R f(\rho,\phi,\theta)\,dV = \int_\alpha^\beta \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} \int_{\rho_1(\phi,\theta)}^{\rho_2(\phi,\theta)} f(\rho,\phi,\theta)\,\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

tomando los límites de integración de forma que cubran la región R.

CENTRO GEOMETRICO Y MOMENTOS DE INERCIA. Las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y}, z)$ del *centro geométrico de un volumen* satisfacen las relaciones

$$\bar{x}\iiint\limits_R dV = \iiint\limits_R x\,dV, \quad \bar{y}\iiint\limits_R dV = \iiint\limits_R y\,dV,$$

$$\bar{z}\iiint\limits_R dV = \iiint\limits_R z\,dV$$

Los *momentos de inercia de un volumen* con respecto a los ejes coordenados vienen dados por

$$I_x = \iiint\limits_R (y^2+z^2)\,dV, \quad I_y = \iiint\limits_R (z^2+x^2)\,dV,$$

$$I_z = \iiint\limits_R (x^2+y^2)\,dV$$

Problemas resueltos

1. Consideremos la función $f(x, y, z)$, continua en una región R del espacio. Cortando a R por una serie de planos paralelos, $x = \xi_i$, $y = \eta_j$ y $z = \zeta_k$, dicha región queda dividida en paralelepípedos rectos de volumen $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j \cdot \Delta z_k$, y en cierto número de paralelepípedos incompletos que ignoramos. En cada uno de los paralelepípedos completos se elige un punto $P_{ijk}(x_i, y_j, z_k)$ al que corresponde el valor $f(x_i, y_j, z_k)$, y formamos la suma

(i) $$\sum_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n\\ k=1,\ldots,p}} f(x_i, y_j, z_k)\cdot\Delta V_{ijk} \quad = \quad \sum_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n\\ k=1,\ldots,p}} f(x_i, y_j, z_k)\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k$$

La integral triple de $f(x, y, z)$ extendida a la región R es, por definición, el límite de (i) cuando el número de paralelepípedos crece indefinidamente de forma que las tres dimensiones de cada uno de ellos tiendan a cero.

Para hallar este límite, se pueden sumar, en primer lugar, todos los paralelepípedos que tienen dos dimensiones iguales a $\Delta_i x$ y $\Delta_j y$ considerando i y j constantes, y calcular el límite cuando $\Delta_k z \to 0$. Así pues,

$$\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=1}^{p} f(x_i, y_j, z_k)\,\Delta_k z\,\Delta_i x\,\Delta_j y \quad = \quad \int_{z_1}^{z_2} f(x_i, y_j, z)\,dz\,\Delta_i x\,\Delta_j y$$

Ahora bien, estas son las columnas de las subregiones de la base consideradas en el Capítulo 23; por consiguiente,

$$\lim_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty\\ p\to+\infty}}\sum_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n\\ k=1,\ldots,p}} f(x_i, y_j, z_k)\cdot\Delta V_{ijk} \quad = \quad \iiint_R f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy \quad = \quad \iiint_R f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

2. Hallar.

(*a*) $$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{2-x} xyz\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left\{\int_0^{2-x} xyz\,dz\right\}dy\right]dx$$

$$= \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\left\{\frac{xyz^2}{2}\Bigg|_{z=0}^{z=2-x}\right\}dy\right]dx \quad = \quad \int_0^1\left[\int_0^{1-x}\frac{xy(2-x)^2}{2}\,dy\right]dx$$

$$= \int_0^1\left[\frac{xy^2(2-x)^2}{4}\Bigg|_{y=0}^{y=1-x}\right]dx \quad = \quad \frac14\int_0^1(4x-12x^2+13x^3-6x^4+x^5)\,dx \quad = \quad \frac{13}{240}$$

(*b*) $$\int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_0^2 z\,\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,dz\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^1\frac{z^2}{2}\Bigg|_0^2\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\rho\,d\theta \quad = \quad 2\int_0^{\pi/2}\int_0^1\rho^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\rho\,d\theta$$

$$= \frac23\int_0^{\pi/2}\rho^3\Bigg|_0^1\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta \quad = \quad -\frac23\cos\theta\Bigg|_0^{\pi/2} \quad = \quad 2/3$$

(*c*) $$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\phi}\mathrm{sen}\,2\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta \quad = \quad 2\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/4}\mathrm{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta \quad = \quad 2\int_0^{\pi}(1-\tfrac12\sqrt2)\,d\theta \quad = \quad (2-\sqrt2)\pi$$

3. Hallar la integral triple de $F(x, y, z) = z$ extendida a la región R del primer octante limitada por los planos $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$, $2y + x = 6$ y el cilindro $y^2 + z^2 = 4$ (ver Figura 67-1).

Integremos primero con respecto a z, desde $z = 0$ (plano xOy) hasta $z = \sqrt{4-y^2}$ (cilindro); luego, lo hacemos con respecto a x, desde $x = 2 - y$ hasta $x = 6 - 2y$, y finalmente con respecto a y, desde $y = 0$ hasta $y = 2$. En estas condiciones,

$$\iiint_R z\,dV \quad = \quad \int_0^2\int_{2-y}^{6-2y}\int_0^{\sqrt{4-y^2}} z\,dz\,dx\,dy \quad = \quad \int_0^2\int_{2-y}^{6-2y}(\tfrac12 z^2)\Big]_0^{\sqrt{4-y^2}}dx\,dy$$

$$= \frac12\int_0^2\int_{2-y}^{6-2y}(4-y^2)\,dx\,dy \quad = \quad \frac12\int_0^2(4-y^2)x\Big]_{2-y}^{6-2y}dy \quad = \quad \frac{26}{3}$$

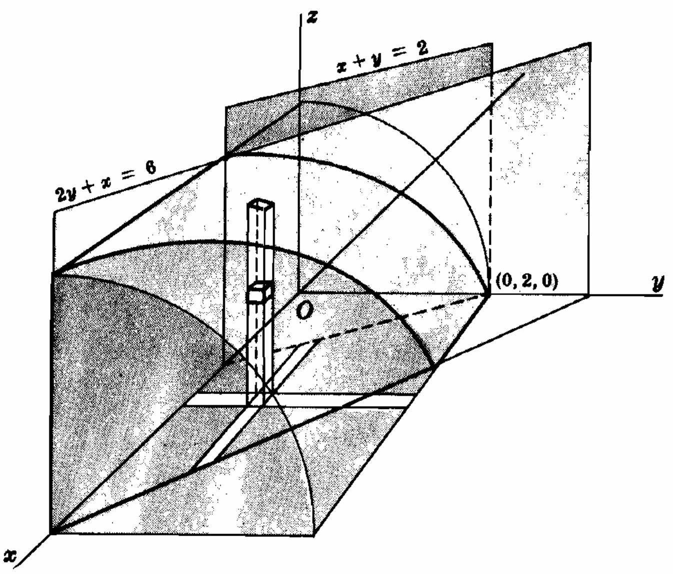

Fig. 67-1

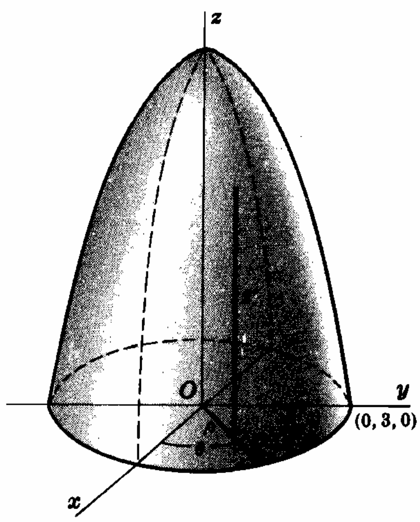

Fig. 67-2

4. Hallar la integral triple de $f(\varrho, \theta, z) = \varrho^2$ extendida a la región R limitada por el paraboloide $\varrho^2 = 9 - z$ y el plano $z = 0$ ver Figura 67-2).

Integramos primero con respecto a z, desde $z = 0$ hasta $z = 9 - \varrho^2$, a continuación con respecto a ϱ, desde $\varrho = 0$ hasta $\varrho = 3$, y finalmente con respecto a θ, desde $\theta = 0$ hasta $\theta = 2\pi$. Por tanto,

$$\iiint_R \rho^2\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-\rho^2} \rho^2(\rho\, dz\, d\rho\, d\theta) = \int_0^{2\pi}\int_0^3 \rho^3(9-\rho^2)\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{9}{4}\rho^4 - \tfrac{1}{6}\rho^6\right)\Big]_0^3 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{243}{4}\, d\theta = \frac{243}{2}\pi$$

5. Demostrar que las integrales (*a*) $4\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\int_{(x^2+y^2)/4}^4 dz\, dy\, dx$, (*b*) $4\int_0^4\int_0^{2\sqrt{z}}\int_0^{\sqrt{4z-x^2}} dy\, dx\, dz$, y (*c*) $4\int_0^4\int_{y^2/4}^4\int_0^{\sqrt{4z-y^2}} dx\, dz\, dy$ representan el mismo volumen.

(*a*) En este caso, z varía entre $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ y $z = 4$; es decir, el volumen está limitado inferiormente por el paraboloide $4z = x^2 + y^2$, y superiormente por el plano $z = 4$. Al variar y y x, se recorre un cuadrante del círculo $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$, la proyección de la curva de intersección del paraboloide con el plano $z = 4$ sobre el plano xOy. Por tanto, la integral proporciona el volumen limitado por el paraboloide y por el plano $z = 4$.

(*b*) En este caso, y varía desde $y = 0$ hasta $y = \sqrt{4z - x^2}$; es decir, el volumen está limitado a la izquierda por el plano zOx, y a la derecha por el paraboloide $y^2 = 4z - x^2$. Al variar x y z se recorre la mitad del área limitada por la parábola $x^2 = 4z$, $y = 0$, la curva de intersección del paraboloide con el plano zOx y el plano $z = 4$. La región R es la de (*a*).

(*c*) El volumen está limitado por detrás por el plano yOz y por delante por el paraboloide $4z = x^2 + y^2$. Al variar z e y se recorre la mitad del área limitada por la parábola $y^2 = 4z$, $x = 0$, la curva de intersección del paraboloide y el plano yOz y por el plano $z = 4$. La región R es la de (*a*).

6. Hallar la integral triple de $F(\varrho, \phi, \theta) = 1/\varrho$ extendida a la región R del primer octante limitada por los conos $\phi = \frac{1}{4}\pi$ y $\phi = \text{arc tag } 2$ y la esfera $\varrho = \sqrt{6}$ (Figura 67-3).

Integramos primero con respecto a ϱ, desde $\varrho = 0$ hasta $\varrho = \sqrt{6}$; a continuación, lo hacemos con respecto a ϕ, desde $\phi = \frac{1}{4}\pi$ hasta $\phi = \text{arc tag } 2$, y finalmente con respecto a θ, desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Así pies,

$$\iiint_R \frac{1}{\rho}\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\text{arc tag } 2}\int_0^{\sqrt{6}} \frac{1}{\rho}\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= 3\int_0^{\pi/2}\int_{\pi/4}^{\text{arc tag } 2} \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta = -3\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)d\theta = \frac{3\pi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

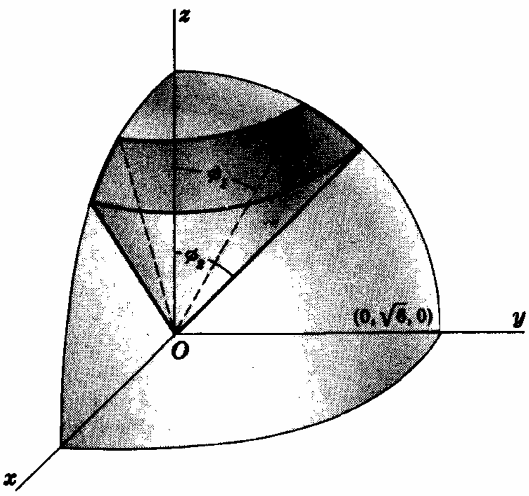

Fig. 67-3

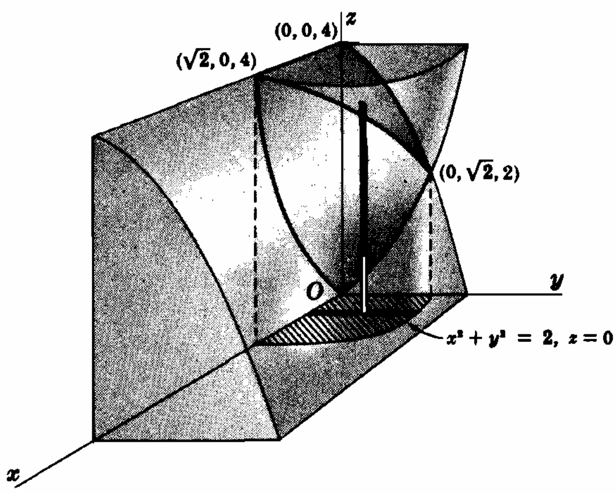

Fig. 67-4

7. Hallar el volumen limitado por el paraboloide $z = 2x^2 + y^2$ y el cilindro $z = 4 - y^2$ (Figura 67-4).

Integremos en primer lugar con respecto a z, desde $z = 2x^2 + y^2$ hasta $z = 4 - y^2$; a continuación con respecto a y, desde $y = 0$ hasta $y = \sqrt{2 - x^2}$ (la ecuación $x^2 + y^2 = 2$ se obtiene eliminando z en las ecuaciones de las dos superficies), y finalmente con respecto a x, desde $x = 0$ hasta $x = \sqrt{2}$ (obtenido al sustituir $y = 0$ en $x^2 + y^2 = 2$) determinando así la cuarta parte del volumen pedido. Por tanto,

$$V = 4\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}}\int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz\,dy\,dx = 4\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}} \{(4-y^2) - (2x^2+y^2)\}\,dy\,dx$$

$$= 4\int_0^{\sqrt{2}}\left(4y - 2x^2y - \frac{2y^3}{3}\right)\Big]_0^{\sqrt{2-x^2}} dx = \frac{16}{3}\int_0^{\sqrt{2}}(2-x^2)^{3/2}\,dx = 4\pi \text{ unidades de volumen}$$

8. Hallar el volumen interior al cilindro $\varrho = 4\cos\theta$ limitado superiormente por la esfera $\varrho^2 + z^2 = 16$, e inferiormente por el plano $z = 0$ (Figura 67-5).

Integremos primero con respecto a z, desde $z = 0$ hasta $z = \sqrt{16 - \varrho^2}$; a continuación lo hacemos con respecto a ϱ, desde $\varrho = 0$ hasta $\varrho = 4\cos\theta$, y finalmente con respecto a θ, desde $\theta = 0$ hasta $\theta = \pi$, obteniendo así el volumen pedido. En estas condiciones,

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{4\cos\theta}\int_0^{\sqrt{16-\rho^2}} \rho\,dz\,d\rho\,d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{4\cos\theta} \rho\sqrt{16-\rho^2}\,d\rho\,d\theta$$

$$= -\frac{64}{3}\int_0^{\pi}(\operatorname{sen}^3\theta - 1)\,d\theta = \frac{64}{9}(3\pi - 4) \text{ unidades de volumen}$$

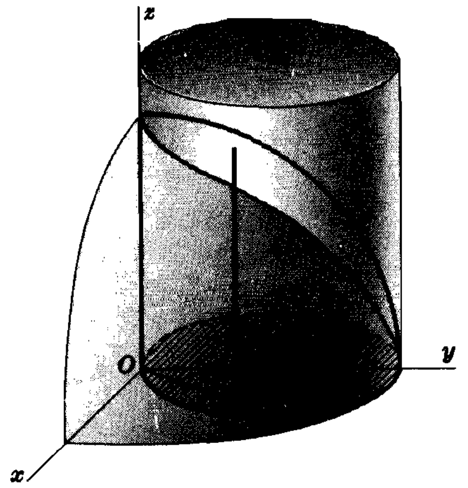

Fig. 67-5

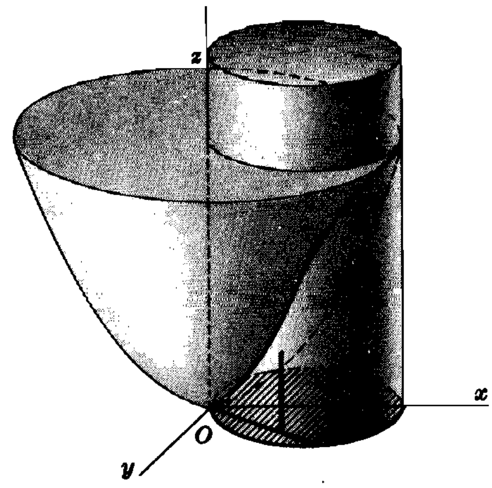

Fig. 67-6

9. Determinar las coordenadas del centro geométrico del volumen interior al cilindro $\varrho = 2\cos\theta$ limitado superiormente por el paraboloide $z = \varrho^2$, e inferiormente por el plano $z = 0$ (Fig. 67-6).

$$V = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \rho^3\, d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \rho^4\Big]_0^{2\cos\theta} d\theta = 8\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

$$M_{yz} = \iiint_R x\, dV = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2} \rho\cos\theta\cdot\rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \rho^4\cos\theta\, d\rho\, d\theta = \frac{64}{5}\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\, d\theta = 2\pi, \quad \text{y} \quad \bar{x} = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{4}{3}$$

Por simetría, $\bar{y} = 0$.

$$M_{xy} = \iiint_R z\, dV = 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta}\int_0^{\rho^2} z\cdot\rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} \rho^5\, d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^6\theta\, d\theta = \frac{5}{3}\pi, \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{10}{9}$$

Así pues, las coordenadas del centro geométrico (4/3, 0, 10/9),

10. Dado un cono recto circular de radio r y altura h, determinar (*a*) el centro geométrico, (*b*) el momento de inercia con respecto a su eje, (*c*) el momento de inercia con respecto a una recta cualquiera que pase por su vértice y sea perpendicular a su eje, (*d*) el momento de inercia con respecto a una recta cualquiera que pase por el centro geométrico y sea perpendicular al eje, (*e*) el momento de inercia con respecto a un diámetro de la base.

Considerando el cono como se representa en la Fig. 67-7, su ecuación es $\varrho = \dfrac{r}{h}z$. Por tanto,

$$V = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{r}\int_{\frac{h}{r}\rho}^{h} \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{r}\left(h\rho - \frac{h}{r}\rho^2\right) d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}hr^2\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{3}\pi h r^2$$

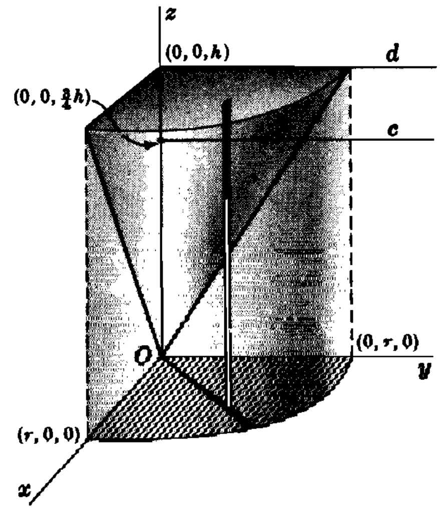

Fig. 67-7

(*a*) El centro geométrico está situado en el eje z.

$$M_{xy} = \iiint_R z\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r\int_{\frac{h}{r}\rho}^{h} z\,\rho\,dz\,d\rho\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^r \left(h^2\rho - \frac{h^2}{r^2}\rho^3\right)d\rho\,d\theta = \frac{1}{2}h^2r^2\int_0^{\pi/2}d\theta = \frac{1}{4}\pi h^2r^2$$

y $\bar{z} = \dfrac{M_{xy}}{V} = \dfrac{3}{4}h$. Luego, las coordenadas del centro geométrico son $(0,0,\frac{3}{4}h)$.

(*b*) $$I_z = \iiint_R (x^2+y^2)\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r\int_{\frac{h}{r}\rho}^{h}\rho^2\cdot\rho\,dz\,d\rho\,d\theta = \frac{1}{10}\pi hr^4 = \frac{3}{10}r^2V$$

(*c*) Tomando la recta como eje y.

$$I_y = \iiint_R (x^2+z^2)\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r\int_{\frac{h}{r}\rho}^{h}(\rho^2\cos^2\theta + z^2)\,\rho\,dz\,d\rho\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^r \left\{\left(h\rho^3 - \frac{h}{r}\rho^4\right)\cos^2\theta + \frac{1}{3}\left(h^3\rho - \frac{h^3}{r^3}\rho^4\right)\right\}d\rho\,d\theta$$

$$= \frac{1}{5}\pi hr^2\left(h^2+\frac{1}{4}r^2\right) = \frac{3}{5}\left(h^2+\frac{1}{4}r^2\right)V$$

(*d*) Sea c la recta que pasa por el centroide y es paralela al eje y. Por el teorema de Steiner,

$$I_y = I_c + V(\tfrac{3}{4}h)^2 \qquad \text{y} \qquad I_c = \tfrac{3}{5}(h^2+\tfrac{1}{4}r^2)V - \tfrac{9}{16}h^2V = \tfrac{3}{80}(h^2+4r^2)V$$

(*e*) Sea d el diámetro de la base del cono, tomado paralelo al eje y. Tendremos

$$I_d = I_c + V(\tfrac{1}{4}h)^2 = \tfrac{3}{80}(h^2+4r^2)V + \tfrac{1}{16}h^2V = \tfrac{1}{20}(2h^2+3r^2)V$$

11. Hallar el volumen limitado por el cono $\phi = \frac{1}{4}\pi$ y la esfera $\rho = 2a\cos\phi$ (Ver Figura 67-8).

$$V = 4\iiint_R dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2a\cos\phi}\rho^2\,\text{sen}\,\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= \frac{32a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\cos^3\phi\,\text{sen}\,\phi\,d\phi\,d\theta = 2a^3\int_0^{\pi/2}d\theta = \pi a^3 \text{ unidades de volumen}$$

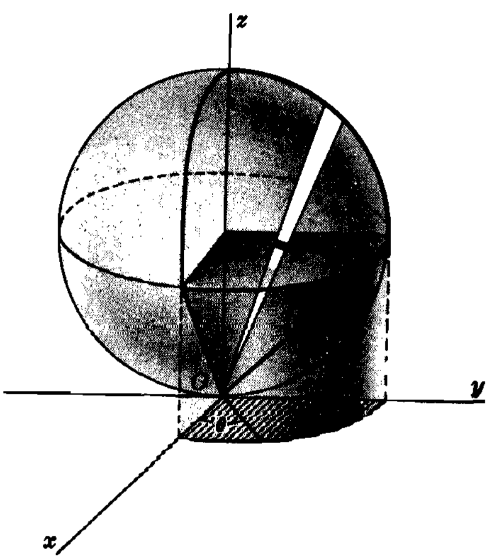

Fig. 67-8

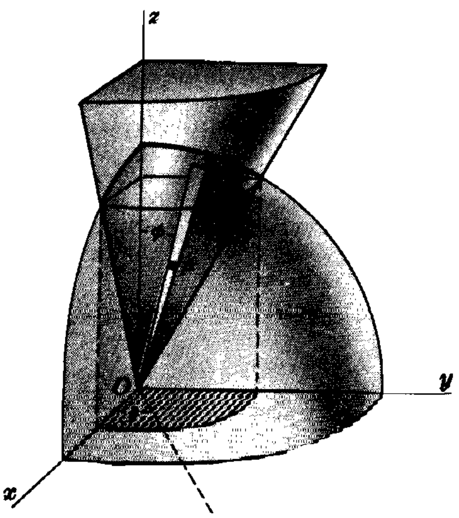

Fig. 67-9

12. Determinar el centro geométrico del volumen limitado por un cono de ángulo en el vértice igual a 60° y una esfera de radio 2 cuyo centro está en el vértice del cono. (Ver Figura 67-9.)

Tomando las superficies como se indican en la figura, $\bar{x} = \bar{y} = 0$. En coordenadas esféricas, la ecuación del cono es $\phi = \pi/6$, y la correspondiente a la esfera es $\rho = 2$.

$$V = \iiint_R dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6}\int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta = \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$= -\frac{32}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right)\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{8\pi}{3}(2 - \sqrt{3})$$

$$M_{xy} = \iiint_R z\, dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6}\int_0^2 \rho\cos\phi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} 2\phi\, d\phi\, d\theta = \pi, \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{V} = \frac{3(2+\sqrt{3})}{8}.$$

13. Hallar el momento de inercia con respecto al eje z del volumen del Problema 12.

$$I_z = \iiint_R (x^2 + y^2)\, dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6}\int_0^2 \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{128}{5}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}^3\phi\, d\phi\, d\theta = \frac{128}{5}\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{8}\sqrt{3}\right)\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{8\pi}{15}(16 - 9\sqrt{3}) = \frac{5 - 2\sqrt{3}}{5}V$$

Problemas propuestos

14. Hallar las integrales triples siguientes:

(*a*) $\displaystyle\int_0^1\int_1^2\int_2^3 dz\, dx\, dy = 1$

(*b*) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x}\int_0^{xy} dz\, dy\, dx = 1/24$

(*c*) $\displaystyle\int_0^6\int_0^{12-2y}\int_0^{4-2y/3-x/3} x\, dz\, dx\, dy = 144 = \int_0^{12}\int_0^{6-x/2}\int_0^{4-2y/3-x/3} x\, dz\, dy\, dx$

(*d*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-z^2}} (16-\rho^2)^{1/2}\rho z\, d\rho\, dz\, d\theta = \frac{256}{5}\pi$

(*e*) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^5 \rho^4 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = 2500\pi$

15. (*a*) Hallar la integral del Problema 14(*b*) cambiando el orden a $dz\, dx\, dy$.

(*b*) Hallar la integral del Problema 14(*c*) cambiando el orden a $dx\, dy\, dz$ y también a $dy\, dz\, dx$.

16. Hallar los volúmenes siguientes, por medio de una integral triple y empleando coordenadas rectangulares:

(*a*) interior a $x^2 + y^2 = 9$, encima de $z = 0$, y debajo de $x + z = 4$. *Sol.* 36π un. vol.

(*b*) limitado por planos coordenados y $6x + 4y + 3z = 12$. *Sol.* 4 un. vol.

(*c*) interior a $x^2 + y^2 = 4x$, encima de $z = 0$, y debajo de $x^2 + y^2 = 4z$. *Sol.* 6π un. vol.

17. Hallar los volúmenes siguientes, por medio de una integral triple y empleando coordenadas cilíndricas:

(*a*) Problema 5.

(*b*) Problema 16(*c*).

(*c*) inferior a $\rho^2 = 16$, encima de $z = 0$, y debajo de $2z = y$. *Sol.* 64/3 un. vol.

18. Determinar el centro geométrico de los volúmenes siguientes:

(*a*) interior a $z^2 = xy$ y encima del triángulo $y = x$, $y = 0$, $x = 4$. en el plano $z = 0$. *Sol.* $(3, 9/5, 9/8)$

(*b*) Problema 16(*b*). *Sol.* $(1/2, 3/4, 1)$

(*c*) volumen del primer octante del Problema 16(*a*). *Sol.* $\left(\dfrac{64 - 9\pi}{16(\pi - 1)}, \dfrac{23}{8(\pi - 1)}, \dfrac{73\pi - 128}{32(\pi - 1)}\right)$

(*d*) Problema 16(*c*). *Sol.* $(8/3, 0, 10/9)$

(*e*) Problema 17(*c*). *Sol.* $(0, 3\pi/4, 3\pi/16)$

19. Hallar los momentos de inercia I_x, I_y, I_z de los volúmenes siguientes:

(*a*) Problema 5. *Sol.* $I_x = I_y = \frac{32}{3}V$, $I_z = \frac{16}{3}V$

(*b*) Problema 16(*b*) *Sol.* $I_x = \frac{5}{2}V$, $I_y = 2V$, $I_z = \frac{13}{10}V$

(*c*) Problema 16(*c*) *Sol.* $I_x = \frac{55}{18}V$, $I_y = \frac{175}{18}V$, $I_z = \frac{80}{9}V$

(*d*) limitado por $z = \varrho^2$ y el plano $z = 2$. *Sol.* $I_x = I_y = \frac{7}{3}V$, $I_z = \frac{2}{3}V$

20. Demostrar que, en coordenadas cilíndricas, la integral triple de una función $f(\varrho, \theta, z)$ extendida a una región R se puede representar por

$$\int_\alpha^\beta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} \int_{z_1(\rho,\theta)}^{z_2(\rho,\theta)} f(\rho, \theta, z)\, \rho\, dz\, d\rho\, d\theta$$

Ind. Considérese (ver Fig. 67-10) una subregión genérica de R limitada por dos cilindros cuyo eje sea Oz y de radios ϱ y $\varrho = \Delta\varrho$, dos planos horizontales que pasen por los puntos $(0, 0, z)$ y $(0, 0, z + \Delta z)$ y dos planos verticales que pasen por el eje Oz y formen con el plano xOz los ángulos θ y $\theta + \Delta\theta$. Tómese $\Delta v = (\varrho\Delta\theta)\, \Delta\varrho \cdot \Delta z$ como una aproximación de este volumen.

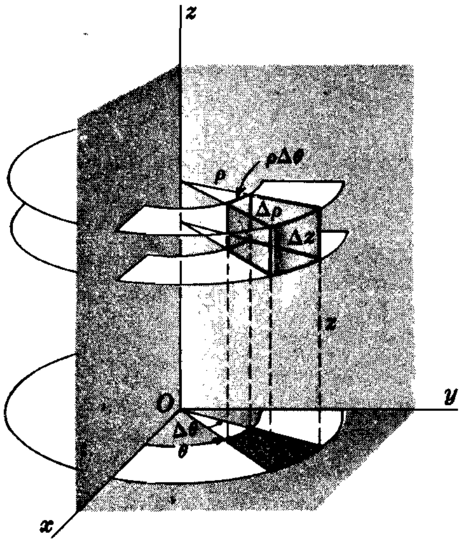

Fig. 67-10

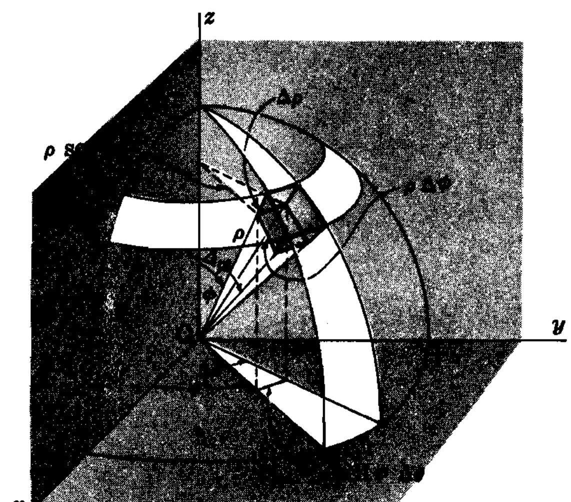

Fig. 67-11

21. Demostrar que, en coordenadas esféricas, la integral triple de una función $f(\varrho, \phi, \theta)$ extendida a una región R se puede representar por

$$\int_\alpha^\beta \int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} \int_{\rho_1(\phi,\theta)}^{\rho_2(\phi,\theta)} f(\rho, \phi, \theta)\, \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

Ind. Considérese (ver Fig. 67-11) una subregión genérica de R limitada por dos esferas de centro O y radios ϱ y $\varrho + \Delta\varrho$, dos conos de vértices O, eje Oz y semiángulo en el vértice ϕ y $\phi + \Delta\phi$, y dos planos verticales que pasen por el eje Oz y formen con el plano zO y los ángulos θ y $\theta + \Delta\theta$. Tómese

$$\Delta V = (\varrho\, \Delta\phi)(\varrho \operatorname{sen}\phi\, \Delta\theta)(\Delta\varrho) = \varrho^2 \operatorname{sen}\phi\, \Delta\varrho\, \Delta\phi\, \Delta\theta$$

como una aproximación de este volumen.

Capítulo 68

Cuerpos de densidad variable

LOS CUERPOS HOMOGENEOS con los que hemos tratado en los capítulos anteriores se consideraron como figuras geométricas de densidad $\delta = 1$. La masa de un sólido homogéneo de volumen V y densidad δ viene dada por $m = \delta V$.

La masa elemental dm de un sólido no homogéneo cuya densidad varía de punto a punto viene dada por:

$\delta(x, y)\, ds$ para una línea material (por ejemplo, una varilla fina),

$\delta(x, y)\, dA$ para una superficie material (por ejemplo, una hoja de metal delgada),

$\delta(x, y, z)\, dV$ para un sólido material.

Problemas resueltos

1. Hallar la masa de una varilla semicircular sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional a su distancia al diámetro que une sus extremos.

Tomando la varilla como se indica en la Fig. 68-1, $\delta(x, y) = ky$.

Por tanto, de $x^2 + y^2 = r^2$,

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \frac{r}{y}\, dx$$

y

$$m = \int \delta(x, y)\, ds = \int_{-r}^{r} ky \cdot \frac{r}{y}\, dx = kr \int_{-r}^{r} dx = 2kr^2 \text{ unidades}$$

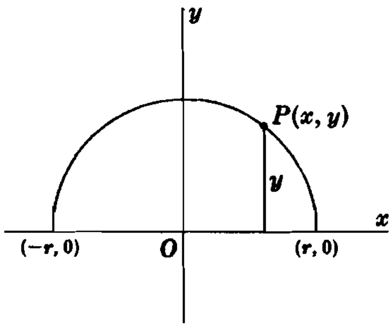

Fig. 68-1

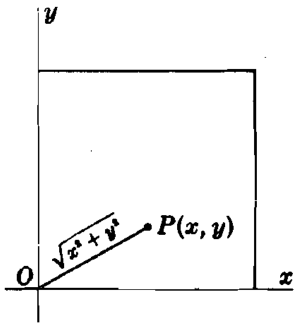

Fig. 68-2

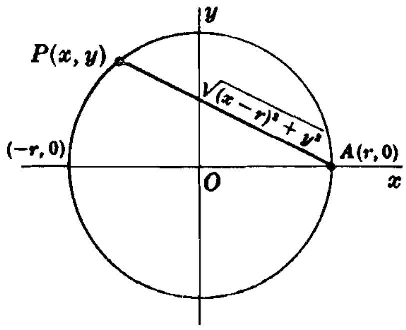

Fig. 68-3

2. Hallar la masa de una placa cuadrada de lado a sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de su distancia a un vértice (Fig. 68-2).

Tomando el cuadrado como se indica en la figura, de forma que uno de sus vértices coincida con el origen, $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$, y

$$m = \iint_R \delta(x, y)\, dA = \int_0^a \int_0^a k(x^2 + y^2)\, dx\, dy = k \int_0^a \left(\tfrac{1}{3}a^3 + ay^2\right) dy = \tfrac{2}{3}ka^4 \text{ unidades}$$

3. Hallar la masa de un plato circular de radio r sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional al cuadrado de su distancia a un punto de la circunferencia (Fig. 68-3).

Tomando el círculo como se indica en la figura, llamando $A(r, 0)$ al punto fijo elegido sobre la circunferencia $\delta(x, y) = k\{(x - r)^2 + y^2\}$, y

$$m \;=\; \iint_R \delta(x,y)\,dA \;=\; 2\int_{-r}^{r}\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} k\{(x-r)^2 + y^2\}\,dy\,dx \;=\; \frac{3}{2}k\pi r^4 \text{ unidades}$$

4. Determinar el centro de masas de un plato cuyo contorno es un arco de la parábola $y^2 = 8x$ limitada por la ordenada en el punto $x = 2$, sabiendo que la densidad en cada punto es igual a su distancia a dicha ordenada. Ver Fig. 68-4.

Será, $\delta(x, y) = 2 - x$ y por simetría $\bar{y} = 0$. Para la mitad superior de la placa.

$$m \;=\; \iint_R \delta(x,y)\,dA \;=\; \int_0^4\int_{y^2/8}^{2} k(2-x)\,dx\,dy \;=\; k\int_0^4\left(2 - \frac{y^2}{4} + \frac{y^4}{128}\right)dy \;=\; \frac{64}{15}k,$$

$$M_y \;=\; \iint_R \delta(x,y)\,x\,dA \;=\; \int_0^4\int_{y^2/8}^{2} k(2-x)\,x\,dx\,dy \;=\; k\int_0^4\left(\frac{4}{3} - \frac{y^4}{64} + \frac{y^6}{24\cdot 64}\right)dy \;=\; \frac{128}{35}k$$

y $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{6}{7}$. Las coordenadas del centro de masas son $(\frac{6}{7}, 0)$

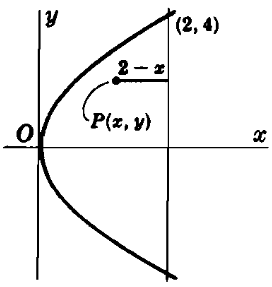

Fig. 68-4

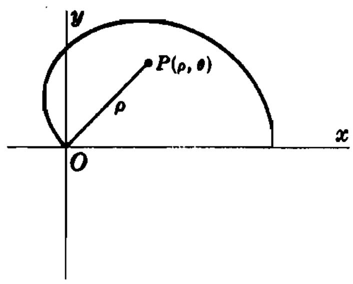

Fig. 68-5

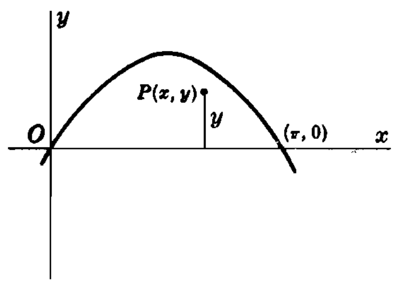

Fig. 68-6

5. Determinar el centro de masas de un plato cuyo borde presenta la forma de media cardioide de ecuación $\rho = 2(1 + \cos\theta)$, sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional a su distancia al polo (Fig. 68-5).

$$m \;=\; \iint_R \delta(\rho,\theta)\,dA \;=\; \int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} k\rho\cdot\rho\,d\rho\,d\theta \;=\; \frac{8}{3}k\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^3\,d\theta \;=\; \frac{20}{3}k\pi,$$

$$M_x \;=\; \iint_R \delta(\rho,\theta)\,y\,dA \;=\; \int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} k\rho\cdot\rho\,\text{sen}\,\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=\; 4k\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4\,\text{sen}\,\theta\,d\theta \;=\; \frac{128}{5}k,$$

$$M_y \;=\; \iint_R \delta(\rho,\theta)\,x\,dA \;=\; \int_0^{\pi}\int_0^{2(1+\cos\theta)} k\rho\cdot\rho\cos\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta \;=\; 14k\pi$$

Luego $\bar{x} = \dfrac{M_y}{m} = \dfrac{21}{10}$, $\bar{y} = \dfrac{M_x}{m} = \dfrac{96}{25\pi}$, y las coordenadas del centro de masas son $\left(\dfrac{21}{10}, \dfrac{96}{25\pi}\right)$.

6. Hallar el momento de inercia, con respecto al eje x, de un plato cuyo contorno es un arco de la curva $y = \text{sen}\,x$ y el eje x, sabiendo que la densidad de cada punto es proporcional a su distancia al eje x (Fig. 68-6).

$$m \;=\; \iint_R \delta(x,y)\,dA \;=\; \int_0^{\pi}\int_0^{\text{sen}\,x} ky\,dy\,dx \;=\; \frac{1}{2}k\int_0^{\pi}\text{sen}^2 x\,dx \;=\; \frac{1}{4}k\pi$$

y

$$I_x \;=\; \iint_R \delta(x,y)\,y^2\,dA \;=\; \int_0^{\pi}\int_0^{\text{sen}\,x} ky\cdot y^2\cdot dy\,dx \;=\; \frac{1}{4}k\int_0^{\pi}\text{sen}^4 x\,dx \;=\; \frac{3}{32}k\pi \;=\; \frac{3}{8}m$$

7. Hallar la masa de una esfera de radio r sabiendo que la densidad en cada punto es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro (Fig. 68-7).

Tomando la esfera como indica la figura, $\delta(x, y, z) = \dfrac{k}{x^2 + y^2 + z^2} = \dfrac{k}{\rho^2}$ y

$$m = \iiint_R \delta(x,y,z)\,dV = 8\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{r} \frac{k}{\rho^2}\cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= 8kr\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta = 8kr\int_0^{\pi/2} d\theta = 4k\pi r \text{ unidades}$$

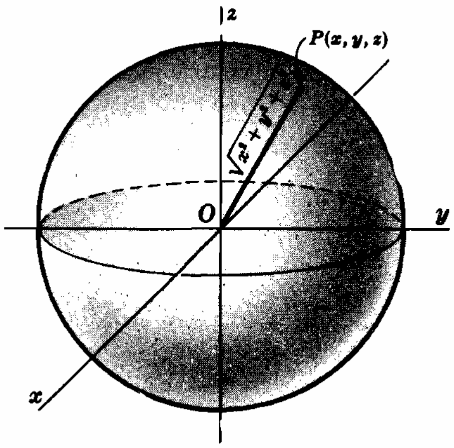

Fig. 68-7

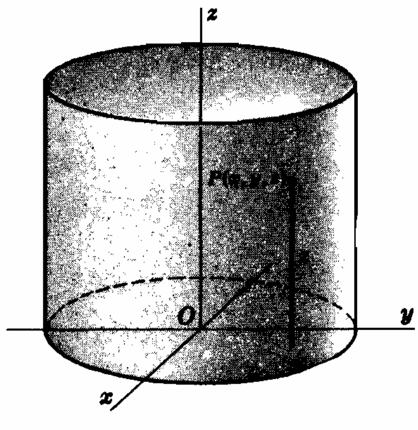

Fig. 68-8

8. Determinar el centro de masas de un cilindro circular recto de radio r y altura h sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional a su distancia a la base (Fig. 68-6).

Tomando el cilindro como se indica en la figura, su ecuación es $\rho = r$, y el volumen a considerar corresponde a la porción de cilindro comprendido entre los planos $z = 0$ y $z = h$. Evidentemente, el centro de masas está situado en el eje z.

$$m = \iiint_R \delta(z,\rho,\theta)\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{r}\int_0^{h} kz\cdot\rho\, dz\, d\rho\, d\theta = 2kh^2\int_0^{\pi/2}\int_0^{r} \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= kh^2r^2\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{2}k\pi h^2r^2,$$

$$M_{xy} = \iiint_R \delta(z,\rho,\theta)\,z\,dV = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{r}\int_0^{h} kz^2\cdot\rho\, dz\, d\rho\, d\theta = \frac{4}{3}kh^3\int_0^{\pi/2}\int_0^{r} \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}kh^3r^2\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{3}k\pi h^3r^2 \quad \text{y} \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{2}{3}h$$

Las coordenadas del centro de masas son $(0, 0, \frac{2}{3}h)$.

Problemas propuestos

9. Hallar la masa de:

(*a*) una barra recta de longitud a, sabiendo que la densidad en cada punto es proporcional a su distancia a uno de los extremos. *Sol.* $\frac{1}{2}ka^2$.

(*b*) un plato en forma de triángulo rectángulo de catetos a y b, siendo la densidad en cada punto proporcional a la suma de sus distancias a los catetos. *Sol.* $\frac{1}{6}kab(a+b)$.

(*c*) un plato circular de radio a, siendo la densidad de cada punto proporcional a su distancia al centro. *Sol.* $\frac{2}{3}ka^3\pi$.

(*d*) un plato de forma elíptica de ecuación $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, siendo la densidad de cada punto proporcional a la suma de sus distancias a los ejes. *Sol.* $\frac{4}{3}kab(a+b)$.

(*e*) un cilindro circular de altura b y radio de la base a, siendo la densidad en cada punto proporcional al cuadrado de su distancia al eje. *Sol.* $\frac{1}{2}ka^4b\pi$.

(*f*) una esfera de radio a, siendo la densidad en cada punto proporcional a su distancia a un plano diametral fijo. *Sol.* $\frac{1}{2}ka^4\pi$.

(*g*) un cono circular de altura b y radio de la base a, siendo la densidad en cada punto proporcional a su distancia al eje. *Sol.* $\frac{1}{6}ka^3b\pi$.

(*h*) una superficie esférica, siendo la densidad en cada punto proporcional a su distancia a un plano diametral fijo. *Sol.* $2ka^3\pi$.

10. Determinar el centro de masas de:

(*a*) un cuadrante de 9(*c*). *Sol.* $(3a/2\pi, 3a/2\pi)$.

(*b*) un cuadrante de un plato circular de radio a, siendo la densidad en cada punto igual a su distancia a uno de los radios límites (eje x). *Sol.* $(3a/8, 3a\pi/16)$.

(*c*) un cubo de arista a, siendo la densidad en cada punto igual a la suma de sus distancias a tres aristas adyacentes (ejes coordenados). *Sol.* $(5a/9, 5a/9, 5a/9)$.

(*d*) un octante de una esfera de radio a, siendo la densidad en cada punto igual a su distancia a una de las caras planas. *Sol.* $(16a/15\pi, 16a/15\pi, 8a/15)$.

(*e*) un cono circular recto de altura b y radio de la base a, siendo la densidad en cada punto igual a su distancia a la base. *Sol.* $(0, 0, 2b/5)$.

11. Hallar el momento de inercia de:

(*a*) un plato cuadrado de lado a, con respecto a un lado, siendo la densidad en cada punto igual al cuadrado de su distancia a un extremo de dicho lado. *Sol.* $^{7}/_{15}\,a^2m$.

(*b*) un plato circular de radio a, con respecto a su centro, siendo la densidad en cada punto igual al cuadrado de su distancia al centro. *Sol.* $\frac{2}{3}a^2m$.

(*c*) un cubo de arista a, con respecto a una arista, siendo la densidad en cada punto igual al cuadrado de su distancia a un extremo de dicha arista. *Sol.* $^{38}/_{45}a^2m$.

(*d*) un cono circular recto de altura b y radio de la base a, con respecto a su eje, siendo la densidad en cada punto igual a su distancia al eje. *Sol.* $^{2}/_{5}a^2m$.

(*e*) el cono de (*d*), siendo la densidad en cada punto igual a su distancia a la base. *Sol.* $\frac{1}{3}a^2m$.

Capítulo 69

Ecuaciones diferenciales

UNA ECUACION DIFERENCIAL es aquella en cuyos términos figuran derivadas o diferenciales; por ejemplo, $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0$, $\quad dy = (x + 2y)\,dx$, etc.

El *orden* de una ecuación diferencial es el correspondiente al de la derivada de mayor índice que figura en ella. La primera de las ecuaciones anteriores es de segundo orden y la segunda es de primer orden. Ambas son *lineales* o de primer grado.

Una *solución* de una ecuación diferencial es toda relación entre las variables en la que no figuran ni derivadas ni diferenciales y que satisface idénticamente a la ecuación. La *solución general* de una ecuación diferencial de orden n es aquella solución que contiene el máximo número ($= n$) de constantes arbitrarias.

(Ver Problemas 1-3.)

ECUACION DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN. Es de la forma $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$. Si una ecuación de este tipo se puede escribir en la forma particular $f_1(x) \cdot g_2(y)\,dx + f_2(x) \cdot g_1(y)\,dy = 0$, las variables son *separables* y la solución viene dada por

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx + \int \frac{g_1(y)}{g_2(y)}\,dy = C$$

(Ver Problemas 4-6.)

Una función $f(x, y)$ es ***homogénea de grado n***, si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$. La ecuación $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es ***homogénea***, si $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas del mismo grado.

La sustitución

$$y = vx, \qquad dy = v\,dx + x\,dv$$

transforma la ecuación homogénea en otra cuyas variables, x e y, son separables.

(Ver Problemas 7-9.)

ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES se pueden resolver, rápidamente, si se advierte en ellas la presencia de combinaciones de términos integrables.

Otras ecuaciones, cuya solución no es inmediata por el método anterior, se pueden resolver multiplicándolas por un factor adecuado, función de x e y, que recibe el nombre de *factor integrante* de la ecuación.

(Ver Problemas 10-14.)

La ecuación diferencial lineal de primer orden $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, siendo P y Q funciones de x solamente, tiene como factor integrante $\xi(x) = e^{\int P\,dx}$. (Ver Problemas 15-17.

Una ecuación de la forma $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$, siendo $n \neq 0{,}1$ y P y Q funciones de x únicamente se reduce a otra lineal mediante la sustitución

$$y^{1-n} = z, \qquad y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}$$

(Ver Problemas 18-19.)

Problemas resueltos

1. Demostrar que (*a*) $y = 2e^x$, (*b*) $y = 3x$ y (*c*) $y = C_1 e^x + C_2 x$, siendo C_1 y C_2 constantes arbitrarias, son soluciones de la ecuación diferencial $y''(1-x) + y'x - y = 0$.

(*a*) Derivando dos veces la función $y = 2e^x$ resulta, $y' = 2e^x$ e $y'' = 2e^x$. Sustituyendo en la ecuación diferencial dada, se obtiene la identidad $2e^x(1-x) + 2e^x x - 2e^x = 0$.

(*b*) Derivando dos veces $y = 3x$ resulta, $y' = 3$ e $y'' = 0$. Sustituyendo en la ecuación diferencial dada se llega a la identidad $0(1-x) + 3x - 3x = 0$.

(*c*) Derivando dos veces $y = C_1e^x + C_2x$ resulta, $y' = C_1 e^x + C_2$ e $y'' = C_1 e^x$. Sustituyendo en la ecuación diferencial dada, se llega a la identidad $C_1 e^x(1-x) + (C_1 e^x + C_2)x - (C_1 e^x + C_2 x) = 0$.

La solución (*c*) es la *solución general* de la ecuación diferencial, ya que contiene el número apropiado de constantes arbitrarias. Las soluciones (*a*) y (*b*) reciben el nombre de *soluciones particulares*, puesto que ambas se pueden obtener para determinados valores de las constantes arbitrarias de la solución general.

2. Hallar la ecuación diferencial cuya solución general es

$$(a)\quad y = Cx^2 - x \qquad \text{y} \qquad (b)\quad y = C_1x^3 + C_2x + C_3$$

(*a*) Dirivando $y = Cx^2 - x$ obtenemos $y' = 2Cx - 1$. Despejando, $C = \frac{1}{2}\left(\frac{y'+1}{x}\right)$ y sustituyendo en la relación dada (solución general) resulta $y = \frac{1}{2}\left(\frac{y'+1}{x}\right)x^2 - x$ o sea $y'x = 2y + x$.

(*b*) Derivando tres veces $y = C_1 x^3 + C_2 x + C_3$ resulta, $y' = 3C_1 x^2 + C_2$, $y'' = 6C_1 x$, $y''' = 6C_1$. Por tanto, $y'' = xy'''$ es la ecuación pedida.

Obsérvese que la relación dada es una solución de la ecuación $y^{\text{iv}} = 0$, pero no es su solución general, ya que solamente contiene tres constantes arbitrarias.

3. Hallar la ecuación diferencial de todas las parábolas cuyo eje principal es el eje Ox.

La ecuación de una familia de parábolas es $y^2 = Ax + B$, siendo A y B constantes arbitrarias.

Derivando dos veces, obtenemos $2yy' = A$ y $2yy'' + 2y'^2 = 0$.

Luego $2yy'' + 2y'^2 = 0$ es la ecuación pedida.

4. Resolver $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)} = 0$.

Operando, $xy^2(1+x^2)dy + (1+y^3)dx = 0$ ó $\dfrac{y^2}{1+y^3}dy + \dfrac{1}{x(1+x^2)}dx = 0$ que es una ecuación de variables separadas. Luego

$$\frac{y^2\,dy}{1+y^3} + \frac{dx}{x} - \frac{x\,dx}{1+x^2} = 0,$$

$$\frac{1}{3}\ln|1+y^3| + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = c,$$

$$2\ln|1+y^3| + 6\ln|x| - 3\ln(1+x^2) = 6c,$$

$$\ln\frac{x^6(1+y^3)^2}{(1+x^2)^3} = 6c \qquad \text{y} \qquad \frac{x^6(1+y^3)^2}{(1+x^2)^3} = e^{6c} = C.$$

5. Resolver $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$.

Tendremos $\dfrac{dy}{1+y^2} = \dfrac{dx}{1+x^2}$. Luego arc tag y = arc tag x + arc tag C e

$$y = \operatorname{tag}(\operatorname{arc\,tag} x + \operatorname{arc\,tag} C) = \frac{x+C}{1-Cx}$$

6. Resolver $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2 y}{\operatorname{sen}^2 x}$.

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}, \quad \sec^2 y\, dy = \csc^2 x\, dx, \quad \text{y} \quad \operatorname{tag} y = -\cot x + C$$

7. Resolver $2xy\, dy = (x^2 - y^2)\, dx$.

La ecuación es homogénea de segundo grado. Haciendo el cambio $y = vx$, $dy = v\, dx + x\, dv$ obtenemos $2x \cdot vx(v\, dx + x\, dv) = (x^2 - v^2x^2)\, dx$ o sea $\frac{2v\, dv}{1 - 3v^2} = \frac{dx}{x}$.

Luego $-\frac{1}{3}\ln|1 - 3v^2| = \ln|x| + \ln c$, $\quad \ln|1 - 3v^2| + 3\ln|x| + \ln C' = 0 \quad$ ó $\quad C'|x^3(1 - 3v^2)| = 1$.

Ahora bien $\pm C'x^3(1 - 3v^2) = Cx^3(1 - 3v^2) = 1$ y, haciendo $v = y/x$, $C(x^3 - 3xy^2) = 1$.

8. Resolver $x \operatorname{sen}\frac{y}{x}(y\, dx + x\, dy) + y\cos\frac{y}{x}(x\, dy - y\, dx) = 0$.

La ecuación es homogénea de segundo grado. Haciendo el cambio $y = vx$, $dy = v\, dx + x\, dv$ obtenemos

$$x \operatorname{sen} v\,(vx\, dx + x^2\, dv + vx\, dx) + vx\cos v\,(x^2\, dv + vx\, dx - vx\, dx) = 0$$

$$\operatorname{sen} v\,(2v\, dx + x\, dv) + xv\cos v\, dv = 0, \qquad \frac{\operatorname{sen} v + v\cos v}{v \operatorname{sen} v}\, dv + 2\frac{dx}{x} = 0$$

Luego $\ln|v \operatorname{sen} v| + 2\ln|x| = \ln C'$, $\quad x^2 \cdot v \cdot \operatorname{sen} v = C$, $\quad$ y $\quad xy \operatorname{sen} y/x = C$.

9. Resolver $(x^2 - 2y^2)\, dy + 2xy\, dx = 0$.

La ecuación es homogénea de segundo grado. Haciendo el cambio de variable correspondiente, obtenemos

$$(1 - 2v^2)(v\, dx + x\, dv) + 2v\, dx = 0, \qquad \frac{1 - 2v^2}{v(3 - 2v^2)}\, dv + \frac{dx}{x} = 0, \qquad \frac{dv}{3v} - \frac{4v\, dv}{3(3 - 2v^2)} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\tfrac{1}{3}\ln|v| + \tfrac{1}{3}\ln|3 - 2v^2| + \ln|x| = \ln c, \qquad \ln|v| + \ln|3 - 2v^2| + 3\ln|x| = \ln C'$$

Luego $vx^3(3 - 2v^2) = C$ y $y(3x^2 - 2y^2) = C$.

10. Resolver $(x^2 + y)\, dx + (y^3 + x)\, dy = 0$.

Integrando $x^2\, dx + (y\, dx + x\, dy) + y^3\, dy = 0$ término a término, obtenemos $\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^4}{4} = C$.

11. Resolver $(x + e^{-x} \operatorname{sen} y)\, dx - (y + e^{-x}\cos y)\, dy = 0$.

Integrando $x\, dx - y\, dy - (e^{-x}\cos y\, dy - e^{-x} \operatorname{sen} y\, dx) = 0$, término a término, obtenemos

$$\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2 - e^{-x} \operatorname{sen} y = C$$

12. Resolver $x\, dy - y\, dx = 2x^3\, dx$.

La expresión $x\, dy - y\, dx$ nos lleva a $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2}$. Luego, multiplicando la ecuación dada por $\xi(x) = \frac{1}{x^2}$

$\frac{x\, dy - y\, dx}{x^2} = 2x\, dx$ y $\frac{y}{x} = x^2 + C$ o $y = x^3 + Cx$.

13. Resolver $x\, dy + y\, dx = 2x^2y\, dx$.

La expresión $x\, dy + y\, dx$ nos lleva a $d(\ln xy) = \frac{x\, dy + y\, dx}{xy}$. Luego, multiplicando la ecuación dada por $\xi(x, y) = \frac{1}{xy}$, $\frac{x\, dy + y\, dx}{xy} = 2x\, dx$ y $\ln|xy| = x^2 + C$.

14. Resolver $x\, dy + (3y - e^x)\, dx = 0$.

Multiplicando la ecuación por $\xi(x) = x^2$ obtenemos $x^3\, dy + 3x^2y\, dx = x^2e^x\, dx$.

Luego, $x^3y = \int x^2e^x\, dx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$.

15. Resolver $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2}{x} y = 6x^3$.

Aquí $P(x) = \dfrac{2}{x}$, $\int P(x)\,dx = \ln x^2$, y $\xi(x) = e^{\ln x^2} = x^2$.

Multiplicando la ecuación dada por $\xi(x) = x^2$ obtenemos $x^2\,dy + 2xy\,dx = 6x^5\,dx$. Luego, $x^2y = x^6 + C$.

Nota 1. Después de multiplicar por el factor integrante, los términos del primer miembro de la ecuación que resulta forman una *combinación integrable*.

Nota 2. El factor integrante de una ecuación dada no es único. En este problema, x^2, $3x^2$, $\frac{1}{2}x^2$, etc., son todos ellos factores integrantes. Es decir, hemos utilizado la integral particular más sencilla de $P(x)\,dx$ en lugar de la integral general $\ln x^2 + \ln C = Cx^2$.

16. Resolver $\operatorname{tag} x \dfrac{dy}{dx} + y = \sec x$.

Tendremos $\dfrac{dy}{dx} + y \cot x = \csc x$, $\int P(x)\,dx = \int \cot x\,dx = \ln |\operatorname{sen} x|$ y $\xi(x) = e^{\ln |\operatorname{sen} x|} = |\operatorname{sen} x|$.

Luego $\operatorname{sen} x \left(\dfrac{dy}{dx} + y \cot x\right) = \operatorname{sen} x \csc x$, $\operatorname{sen} x\,dy + y \cos x\,dx = dx$, y $y \operatorname{sen} x = x + C$.

17. Resolver $\dfrac{dy}{dx} - xy = x$.

Aquí $P(x) = -x$, $\int P(x)\,dx = -\frac{1}{2}x^2$, y $\xi(x) = e^{-1/2x^2}$.

Luego, $e^{-1/2x^2}\,dy - xye^{-1/2x^2}\,dx = xe^{-1/2x^2}\,dx$, $ye^{-1/2x^2} = -e^{-1/2x^2} + C$, e $y = Ce^{1/2x^2} - 1$.

18. Resolver $\dfrac{dy}{dx} + y = xy^2$.

La ecuación es de la forma $\dfrac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ con $n = 2$.

Haciendo el cambio $y^{1-n} = y^{-1} = z$, $y^{-2}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{dz}{dx}$. (Es conveniente escribir la ecuación en la forma $y^{-2}\dfrac{dy}{dx} + y^{-1} = x$.) Luego, $-\dfrac{dz}{dx} + z = x$ o $\dfrac{dz}{dx} - z = -x$.

El factor integrante es $\xi(x) = e^{\int P dx} = e^{-\int dx} = e^{-x}$. Por tanto, $e^{-x}dz - ze^{-x}dx = -xe^{-x}dx$ y $ze^{-x} = xe^{-x} + e^{-x} + C$. Finalmente, como $z = y^{-1}$, $\dfrac{1}{y} = x + 1 + Ce^x$.

19. Resolver $\dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{tag} x = y^3 \sec x$.

Ponemos la ecuación en la forma $y^{-3}\dfrac{dy}{dx} + y^{-2} \operatorname{tag} x = \sec x$.

Haciendo el cambio $y^{-2} = z$, $y^{-3}\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{dz}{dx}$ obtenemos $\dfrac{dz}{dx} - 2z \operatorname{tag} x = -2 \sec x$.

El factor integrante es $\xi(x) = e^{-2\int \operatorname{tag} x\,dx} = \cos^2 x$. Luego, $\cos^2 x\,dz - 2z \cos x \operatorname{sen} x\,dx = -2 \cos x\,dx$, $z \cos^2 x = -2 \operatorname{sen} x + C$, y $\dfrac{\cos^2 x}{y^2} = -2 \operatorname{sen} x + C$.

20. Se dispara una bala contra una masa de arena. Suponiendo que la resistencia sea igual a la raíz cuadrada de la velocidad de la bala, calcular el tiempo que tardará en detenerse totalmente si su velocidad, al penetrar en la arena, es de 49 metros por segundo.

Sea v la velocidad de la bala t segundos después de haberse introducido en la arena.

La retardación será $= -\dfrac{dv}{dt} = \sqrt{v}$ o $\dfrac{dv}{\sqrt{v}} = -dt$ y $2\sqrt{v} = -t + C$.

Para $t = 0$, $v = 49$ y $c = 2\sqrt{49} = 14$. Por tanto, $2\sqrt{v} = -t + 14$ es la ecuación del movimiento de la bala. Para $v = 0$, $t = 14$; es decir, la bala se detiene a los 14 segundos de incidir en la arena.

21. Un depósito contiene 500 litros de salmuera siendo la cantidad de sal en solución igual a 100 kilogramos. Se introduce en el depósito una corriente de agua que contiene 100 gramos de sal por litro a una velocidad de 15 litros por minuto. La mezcla se mantiene uniforme mediante una agitación adecuada y se la extrae del depósito a la misma velocidad anterior. Hallar la cantidad de sal que contendrá el depósito al cabo de 90 minutos.

Sea q (kilogramos) la sal que hay en el depósito al cabo de t minutos, y $\frac{dq}{dt}$ la velocidad de variación de dicha cantidad con el tiempo t.

En cada minuto llegan al depósito 1,5 kg de sal, y salen de él $0{,}03q$ kg. Por tanto, $\frac{dq}{dt} = 1{,}5 - 0{,}03q$, $\frac{dq}{1{,}5 - 0{,}03q} = dt$, $\frac{\ln(0{,}03q - 1{,}5)}{0{,}03} = -t + C$.

Para $t = 0$, $q = 100$ y $C = \frac{\ln 1{,}5}{0{,}03}$; por consiguiente, $\ln(0{,}03q - 1{,}5) = -0{,}03t + \ln 1{,}5$, $0{,}02q - 1 = e^{-0{,}03t}$ y $q = 50 + 50e^{-0{,}03\,t}$. Para $t = 90$, $q = 50 + 50e^{-2{,}7} = 53{,}35$ kg.

22. Bajo ciertas condiciones, el azúcar en agua se transforma en dextrosa a una velocidad proporcional, en cada instante, a la cantidad de azúcar sin transformar. Sabiendo que para $t = 0$ la cantidad de azúcar es de 75 gramos, y que al cabo de 30 minutos se han transformado 8 gramos, hallar la cantidad transformada al cabo de una hora y media.

Sea q la cantidad transformada en t minutos.

Tendremos $\frac{dq}{dt} = k(75 - q)$, $\frac{dq}{75 - q} = k\,dt$, y $\ln(75 - q) = -kt + C$.

Para $t = 0$, $q = 0$ y $C = \ln 75$; por tanto, $\ln(75 - q) = -kt + \ln 75$.

Para $t = 30$, $q = 8$, $30k = \ln 75 - \ln 67$, y $k = 0{,}0038$. Es decir, $q = 75(1 - e^{-0{,}0038t})$.

Para $t = 90$, $q = 75(1 - e^{-0{,}034}) = 21{,}6$ gramos.

Problemas propuestos

23. Hallar la ecuación diferencial cuya solución general es:

(a) $y = Cx^2 + 1$ (c) $y = Cx^2 + C^2$ (e) $y = C_1 + C_2x + C_3x^2$ (g) $y = C_1 \operatorname{sen} x + C_2 \cos x$

(b) $y = C^2x + C$ (d) $xy = x^3 - C$ (f) $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ (h) $y = C_1e^x \cos(3x + C_2)$

Sol. (a) $xy' = 2(y - 1)$ (c) $4x^2y = 2x^3y' + (y')^2$ (e) $y''' = 0$ (g) $y'' + y = 0$

(b) $y' = (y - xy')^2$ (d) $xy' + y = 3x^2$ (f) $y'' - 3y' + 2y = 0$ (h) $y'' - 2y' + 10y = 0$

24. Resolver:

(a) $y\,dy - 4x\,dx = 0$ *Sol.* $y^2 = 4x^2 + C$

(b) $y^2\,dy - 3x^5\,dx = 0$ *Sol.* $2y^3 = 3x^6 + C$

(c) $x^3y' = y^2(x - 4)$ *Sol.* $x^2 - xy + 2y = Cx^2y$

(d) $(x - 2y)\,dy + (y + 4x)\,dx = 0$ *Sol.* $xy - y^2 + 2x^2 = C$

(e) $(2y^2 + 1)y' = 3x^2y$ *Sol.* $y^2 + \ln|y| = x^3 + C$

(f) $xy'(2y - 1) = y(1 - x)$ *Sol.* $\ln|xy| = x + 2y + C$

(g) $(x^2 + y^2)\,dx = 2xy\,dy$ *Sol.* $x^2 - y^2 = Cx$

(h) $(x + y)\,dy = (x - y)\,dx$ *Sol.* $x^2 - 2xy - y^2 = C$

(i) $x(x + y)\,dy - y^2\,dx = 0$ *Sol.* $y = Ce^{-y/x}$

(j) $x\,dy - y\,dx + xe^{-y/x}\,dx = 0$ *Sol.* $e^{y/x} + \ln|Cx| = 0$

(k) $dy = (3y + e^{2x})\,dx$ *Sol.* $y = (Ce^x - 1)e^{2x}$

(l) $x^2y^2\,dy = (1 - xy^3)\,dx$ *Sol.* $2x^3y^3 = 3x^2 + C$

25. La tangente y la normal a una curva en un punto $P(x, y)$, cortan al eje x en T y N, y al eje y en S y M, respectivamente. Hallar la familia de curvas que satisfacen la condición:

(a) $TP = PS$ (b) $NM = MP$ (c) $TP = OP$ (d) $NP = OP$.

Sol. (a) $xy = C$ (b) $2x^2 + y^2 = C$ (c) $xy = C$, $y = Cx$ (d) $x^2 \pm y^2 = C$

26. Resolver el Problema 21 suponiendo que al depósito llega agua pura a razón de 15 litros por minuto y que la mezcla sale a la misma velocidad. *Sol.* 6,7 kg.

27. Resolver el Problema 26 suponiendo que la mezcla sale a razón de 20 litros por minuto.

Ind. $dq = -\frac{4q}{100 - t}dt$ *Sol.* 0,01 kp

Capítulo 70

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

LOS TIPOS DE ECUACIONES diferenciales de segundo orden que vamos a considerar son:

(*1*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ (Ver Problema 1.)

(*2*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \dfrac{dy}{dx}\right)$ (Ver Problemas 2-3.)

(*3*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(y)$ (Ver Problemas 4-5.)

(*4*) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + P\dfrac{dy}{dx} + Qy = R$, siendo P y Q constantes y R una constante o una función de x solamente. (Ver Problemas 6-11.)

Si la ecuación característica $m^2 + Pm + Q = 0$ tiene dos raíces *distintas*, m_1 y m_2, la solución general de $\dfrac{d^2y}{dx^2} + P\dfrac{dy}{dx} + Qy = 0$ es $y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$. Si las dos raíces son iguales, $m_1 = m_2 = m$, la solución general es $C_1e^{mx} + C_2xe^{mx}$.

La solución general de $\dfrac{d^2y}{dx^2} + P\dfrac{dy}{dx} + Qy = 0$ (ecuación homogénea) recibe el nombre de *función complementaria* de la ecuación $\dfrac{d^2y}{dx^2} + P\dfrac{dy}{dx} + Qy = R(x)$. Si $f(x)$ satisface a esta última ecuación (solución particular), la solución general es $y =$ función complementaria $+f(x)$.

Problemas resueltos

1. Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} = xe^x + \cos x$.

Tenemos $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = xe^x + \cos x$, $\dfrac{dy}{dx} = \displaystyle\int (xe^x + \cos x)\,dx = xe^x - e^x + \operatorname{sen} x + C_1$, e $y = xe^x\ 2e^x - \cos x + C_1x + C_2$

2. Resolver $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} = a$.

Hacemos $p = \dfrac{dy}{dx}$; entonces $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx}$ y la ecuación dada toma la forma $x^2\dfrac{dp}{dx} + xp = a$ o $x\,dp + p\,dx = \dfrac{a}{x}dx$.

Luego, $xp = a \ln |x| + C_1$, $x\dfrac{dy}{dx} = a \ln |x| + C_1$, $dy = a \ln |x| \dfrac{dx}{x} + C_1\dfrac{dx}{x}$ e $y = \frac{1}{2}a \ln^2 |x| + C_1 \ln |x| + C_2$.

3. Resolver $xy'' + y' + x = 0$.

Hacemos $p = \dfrac{dy}{dx}$. Con lo cual $\dfrac{d^2y}{dp^2} = \dfrac{dp}{dx}$ y la ecuación dada toma la forma

$$x\frac{dp}{dx} + p + x = 0 \text{ o } x\,dp + p\,dx = -x\,dx$$

Luego, $xp = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$, $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{C_1}{x}$ e $y = -\frac{1}{4}x^2 + C_1 \ln |x| + C_2$.

4. Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2y = 0.$

Como $\dfrac{d}{dx}(y'^2) = 2y'y''$, multiplicando la ecuación dada por $2y'$ obtenemos

$$2y'y'' = 4yy', \qquad y'^2 = 4\int yy'\,dx = 4\int y\,dy = 2y^2 + C_1$$

Luego, $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{2y^2 + C_1}, \qquad \dfrac{dy}{\sqrt{2y^2 + C_1}} = dx, \qquad \ln|\sqrt{2}\,y + \sqrt{2y^2 + C_1}| = \sqrt{2}\,x + \ln C_2'$

y

$$\sqrt{2}\,y + \sqrt{2y^2 + C_1} = C_2 e^{\sqrt{2}x}$$

5. Resolver $y'' = -\dfrac{1}{y^3}$

Multiplicando por $2y'$ obtenemos $2y'y'' = -\dfrac{2y'}{y^3}$. Luego,

$$(y')^2 = \frac{1}{y^2} + C_1, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 + C_1y^2}}{y}, \qquad \frac{y\,dy}{\sqrt{1 + C_1y^2}} = dx, \qquad \sqrt{1 + C_1y^2} = C_1x + C_2$$

y

$$(C_1x + C_2)^2 - C_1y^2 = 1$$

6. Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0.$

Tendremos $m^2 + 3m - 4 = 0$ y $m = 1, -4$. La solución general es $y = C_1e^x + C_2e^{-4x}$.

7. Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} = 0.$

Tenemos $m^2 + 3m = 0$ y $m = 0, -3$. La solución general es $y = C_1 + C_2e^{-3x}$.

8. Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 13y = 0.$

Aquí $m^2 - 4m + 13 = 0$ y las raíces son $m_1 = 2 + 3i$ y $m_2 = 2 - 3i$. La solución general es

$$y = C_1e^{(2+3i)x} + C_2e^{(2-3i)x} = e^{2x}(C_1e^{3ix} + C_2e^{-3ix})$$

Como $e^{iax} = \cos ax + i \operatorname{sen} ax$, tendremos $e^{3ix} = \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x$, $e^{-3ix} = \cos 3x, - i \operatorname{sen} 3x$, y la solución se puede dar en la forma

$$\begin{aligned} y &= e^{2x}\{C_1(\cos 3x + i \operatorname{sen} 3x) + C_2(\cos 3x - i \operatorname{sen} 3x)\} \\ &= e^{2x}\{(C_1 + C_2)\cos 3x + i(C_1 - C_2)\operatorname{sen} 3x\} \\ &= e^{2x}(A\cos 3x + B \operatorname{sen} 3x) \end{aligned}$$

9. Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

Tenemos $m^2 - 4m + 4 = 0$ y $m = 2, 2$. La solución general es $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$.

10. Resolver $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} - 4y = 0.$

Según el Problema 6, la función complementaria es $y = C_1e^x + C_2e^{-4x}$.

Para encontrar una solución particular de la ecuación obsérvese que el segundo miembro es $R(x) = x^2$. Esto nos sugiere que la integral particular ha de contener un término en x^2, y, quizá, otros términos obtenidos por derivación sucesiva. Suponiendo que es de la forma $y = Ax^2 + Bx + C$, en donde A, B y C son constantes a determinar.

Sustituyendo $y = Ax^2 + Bx + C$, $y' = 2Ax + B$, $y'' = 2A$, en la ecuación diferencial obtenemos

$$2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2, \qquad -4Ax^2 + (6A - 4B)x + (2A + 3B - 4C) = x^2$$

Como esto es una identidad en x, $-4A = 1$, $6A - 4B = 0$, $2A + 3B - 4C = 0$.

Luego $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{3}{8}$, $C = -\frac{13}{32}$, e $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}$ es una integral particular.

Por tanto, la solución general es $y = C_1e^x + C_2e^{-4x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}x - \frac{13}{32}$.

11. Hallar la solución de la ecuación diferencial $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} - 3y = \cos x$.

En este caso, la ecuación característica es $m^2 - 2m - 3 = 0$ y sus soluciones, $m = -1, 3$; la función complementaria es $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$. El segundo miembro de la ecuación diferencial nos hace pensar que una integral particular sea de la forma $A\cos x + B\,\text{sen}\,x$.

Sustituyendo $y = A\cos x + B\,\text{sen}\,x$, $y' = B\cos x - A\,\text{sen}\,x$, $y'' = -A\cos x - B\,\text{sen}\,x$, en la ecuación diferencial, obtenemos

$$(-A\cos x - B\,\text{sen}\,x) - 2(B\cos x - A\,\text{sen}\,x) - 3(A\cos x + B\,\text{sen}\,x) = \cos x$$
$$-2(2A + B)\cos x + 2(A - 2B)\,\text{sen}\,x = \cos x$$

Luego $-2(2A + B) = 1$, $A - 2B = 0$, y $A = -\frac{1}{5}$, $B = -{}^1/_{10}$.

La solución general es $C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - \frac{1}{5}\cos x - {}^1/_{10}\,\text{sen}\,x = y$.

12. La ecuación del movimiento de vibración de un cuerpo unido a un resorte es $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 16s = 0$, siendo la elongación del muelle en el instante t. Si para $t = 0$, $s = 2$ y $\dfrac{ds}{dt} = 1$, hallar s en función de t.

Tenemos $m^2 + 16 = 0$, $m = \pm 4i$, y la solución general es $s = A\cos 4t + B\,\text{sen}\,4t$.

Para $t = 0$, $s = 2 = A$, por tanto $s = 2\cos 4t + B\,\text{sen}\,4t$.

Para $t = 0$, $ds/dt = 1 = -8\,\text{sen}\,4t + 4B\cos 4t = 4B$ y $B = \frac{1}{4}$.

Luego, la ecuación es $s = 2\cos 4t + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,4t$.

13. La intensidad de corriente en cierto circuito eléctrico viene dada por $\dfrac{d^2I}{dt^2} + 4\dfrac{dI}{dt} + 2504I = 110$. Si para $t = 0$, es $I = 0$ y $\dfrac{dI}{dt} = 0$, hallar I en función de t.

$m^2 + 4m + 2504 = 0$; $m = -2 + 50i$, $-2 - 50i$; la función complementaria es $e^{-2t}(A\cos 50t + B\,\text{sen}\,50t)$.

La integral particular es $I = 110/2504 = 0{,}044$.

Por tanto, la solución general es $I = e^{-2t}(A\cos 50t + B\,\text{sen}\,50t) + 0{,}044$.

Para $t = 0$, $I = 0 = A + 0{,}044$; luego $A = -0{,}044$.

Para $t = 0$, $\dfrac{dI}{dt} = 0 = e^{-2t}[(-2A + 50B)\cos 50t - (2B + 50A)\,\text{sen}\,50t] = -2A + 50B$.

De donde $B = -0{,}0018$ y la relación pedida es $I = -e^{-2t}(0{,}044\cos 50t + 0{,}0018\,\text{sen}\,50t) + 0{,}044$.

14. Una cadena de 4 metros de longitud comienza a deslizar por una superficie, sin rozamiento, en el momento en que pende verticalmente un tramo de 1 metro de longitud. Hallar (*a*) su velocidad cuando abandona la superficie el último trozo de cadena y (*b*) el tiempo que tarda en abandonar la superficie.

Sea s la longitud de cadena que cuelga en el instante t.

(*a*) La fuerza F que obliga a deslizar a la cadena es el peso de la parte que cuelga.

Fuerza = masa × aceleración = $ms'' = \frac{1}{4}mgs$ o $s'' = \frac{1}{4}gs$.

$2s's'' = \frac{1}{2}gss'$ y $(s')^2 = \frac{1}{4}gs^2 + C_1$.

Para $t = 0$, $s = 1$ y $s' = 0$. Luego $C_1 = -\frac{1}{4}g$ y $s' = \frac{1}{2}\sqrt{g}\cdot\sqrt{s^2 - 1}$.

Para $s = 4$, $s' = \frac{1}{2}\sqrt{15g}$ m/seg.

(*b*) $\dfrac{ds}{\sqrt{s^2 - 1}} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,dt$ y $\ln|s + \sqrt{s^2 - 1}| = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,t + C_2$.

Para $t = 0$, $s = 1$. Luego $C_2 = 0$ y $\ln(s + \sqrt{s^2 - 1}) = \frac{1}{2}\sqrt{g}\,t$.

Para $s = 4$, $t = \dfrac{2}{\sqrt{g}}\ln(4 + \sqrt{15})$ sec.

15. Una motora de 245 kilogramos de masa lleva una velocidad de 20 metros por segundo cuando se desconecta el motor (en el instante $t = 0$). La resistencia del agua es proporcional a su velocidad y vale 100 kilopondios en $t = 0$. Hallar el espacio recorrido hasta que la velocidad sea de 5 metros por segundo.

Sea s el espacio recorrido por la motora al cabo de t segundos.

$$ms'' = -Ks' \quad \text{o} \quad s'' = -ks'$$

Para determinar k: Para $t = 0$, $s' = 20$, $s'' = \dfrac{\text{fuerza}}{\text{masa}} = -\dfrac{100g}{245} = -4$ y $k = \dfrac{1}{5}$.

$s'' = \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{v}{5}$, $\ln v = -\dfrac{1}{5}t + C_1$, y $v = C_1e^{-t/5}$.

Para $t = 0$, $v = 20$. Luego $C_1 = 20$, $v = \dfrac{ds}{dt} = 20e^{-t/5}$ y $s = -100e^{-t/5} + C_2$.

Para $t = 0$, $s = 0$. Luego $C_2 = 100$ y $s = 100(1 - e^{-t/5})$.

Para $v = 5 = 20e^{-t/5}$, $s = 100(1 - \frac{1}{4}) = 75$ m.

Problemas propuestos

Resolver:

16. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 3x + 2$ *Sol.* $y = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + C_1x + C_2$

17. $e^{2x}\dfrac{d^2y}{dx^2} = 4(e^{4x} + 1)$ *Sol.* $y = e^{2x} + e^{-2x} + C_1x + C_2$

18. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -9\,\text{sen}\,3x$ *Sol.* $y = \text{sen}\,3x + C_1x + C_2$

19. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 4x = 0$ *Sol.* $y = x^2 + C_1x^4 + C_2$

20. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 2x - x^2$ *Sol.* $y = x^3/3 + C_1e^x + C_2$

21. $x\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 8x^3$ *Sol.* $y = x^4 + C_1x^2 + C_2$

22. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ *Sol.* $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

23. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$ *Sol.* $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}$

24. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} = 0$ *Sol.* $y = C_1 + C_2e^x$

25. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ *Sol.* $y = C_1xe^x + C_2e^x$

26. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$ *Sol.* $y = C_1\cos 3x + C_2\,\text{sen}\,3x$

27. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$ *Sol.* $y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\,\text{sen}\,2x)$

28. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$ *Sol.* $y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\,\text{sen}\,x)$

29. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 3y = 6x + 23$ *Sol.* $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + 2x + 5$

30. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^{3x}$ *Sol.* $y = C_1\,\text{sen}\,2x + C_2\cos 2x + e^{3x}/13$

31. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 9y = x + e^{2x}$ *Sol.* $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + e^{2x} + \dfrac{x}{9} + \dfrac{2}{27}$

32. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = \cos 2x - 2\,\text{sen}\,2x$ *Sol.* $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{2}{5}\,\text{sen}\,2x$

33. Una partícula de masa m, en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la velocidad, está sometida a una fuerza atractiva proporcional al desplazamiento. Hallar la ecuación del movimiento si para $t = 0$, $s = 0$ y $s' = v_0$.

Ind. Aquí $m\dfrac{d^2s}{dt^2} = -k_1\dfrac{ds}{dt} - k_2s$ o sea $\dfrac{d^2s}{dt^2} + 2b\dfrac{ds}{dt} + c^2s = 0$, $b > 0$.

Sol. Si $b^2 = c^2$, $s = v_0te^{-bt}$.

Si $b^2 < c^2$, $s = \dfrac{v_0}{\sqrt{c^2 - b^2}}e^{-bt}\,\text{sen}\,\sqrt{c^2 - b^2}\,t$.

Si $b^2 > c^2$, $s = \dfrac{v_0}{2\sqrt{b^2 - c^2}}(e^{(-b+\sqrt{b^2-c^2})t} - e^{(-b-\sqrt{b^2-c^2})t})$.

INDICE

LIBROS SERIE SCHAUM PUBLICADOS EN ESPAÑOL

ALGEBRA ELEMENTAL
2700 Problemas Resueltos
Por Barnett Rich, Ph.D.,
Jefe del Depto. de Matemáticas, Brooklyn Tech. H. S.

ALGEBRA LINEAL
600 Problemas Resueltos
Por Seymour Lipschutz, Ph. D.,
Profesor Asociado de Matemáticas, Temple University

ALGEBRA MODERNA
425 Problemas Resueltos
Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Dickinson College

ALGEBRA SUPERIOR
1940 Problemas Resueltos
Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst.

ANALISIS NUMERICO
775 Problemas Resueltos
Por Francis Scheid, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Boston University

ANALISIS VECTORIAL
480 Problemas Resueltos
Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst.

CALCULO DIFERENCIAL
1175 Problemas Resueltos
Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Dickinson College

CALCULO SUPERIOR
925 Problemas Resueltos
Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst.

CIRCUITOS ELECTRICOS
350 Problemas Resueltos
Por Joseph A. Edminister, M.S.E.E.,
Profesor Asociado de Ingeniería Electromecánica, University of Akron

CIRCUITOS ELECTRONICOS
160 Problemas Resueltos
Por Edwin C. Lowenberg, Ph.D.,
Profesor de Ingeniería Eléctrica, University of Nebraska

DINAMICA DE LAGRANGE
275 Problemas Resueltos
Por D. A. Wells, Ph.D.,
Profesor de Física, University of Cincinnati

DINAMICA DE LOS FLUIDOS
100 Problemas Resueltos
Por William F. Hughes, Ph.D.,
Profesor de Ingeniería Mecánica, Pennsylvania State U.

DISEÑO DE MAQUINAS
320 Problemas Resueltos
Por Hall, Holowenko, Laughlin
Profesores de Ingeniería Mecánica, Purdue University

CIENCIAS DE LA INGENIERIA
1400 Ecuaciones Básicas
Por W. F. Hughes, E. W. Gaylord, Ph.D.,
Profesores de Ing. Mec., Carnegie Inst. of Tech.

ECUACIONES DIFERENCIALES
560 Problemas Resueltos
Por Frank Ayres, Jr. Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Dickinson College

ESTADISTICA
875 Problemas Resueltos
Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst.

FISICA GENERAL
625 Problemas Resueltos
Por Carel W. van der Merwe, Ph.D.,
Profesor de Física, New York University

FUNDAMENTOS DE MATEMATICAS SUPERIORES
1850 Problemas Resueltos
Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Dickinson College

GENETICA
500 Problemas Resueltos
Por William D. Stansfield, Ph.D.,
Depto. de Ciencias Biológicas, Calif. State Polytech.

GEOMETRIA ANALITICA
345 Problemas Resueltos
Por Joseph H. Kindle, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, University of Cincinnati

GEOMETRIA DESCRIPTIVA
175 Problemas Resueltos
Por Minor C. Hawk
Jefe Departamento de Ingeniería Gráfica, Carnegie Inst. of Tech. *

GEOMETRIA DIFERENCIAL
500 Problemas Resueltos
Por Martin Lipschutz, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, University of Bridgeport

GEOMETRIA PLANA
850 Problemas Resueltos
Por Barnett Rich, Ph.D.,
Jefe del Depto. de Matematicas, Brooklyn Tech. H. S.

GEOMETRIA PROYECTIVA
200 Problemas Resueltos
Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Dickinson College

INTRODUCCION A LA CIENCIA DE LAS COMPUTADORAS
300 Problemas Resueltos
Por Francis Scheid, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Boston University

LINEAS DE TRASMISION
165 Problemas Resueltos
Por R. A. Chipman, Ph.D.,
Profesor de Ingeniería Eléctrica, University of Toledo

MANUAL DE FORMULAS Y TABLAS MATEMATICAS
2400 Fórmulas y 60 Tablas
Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst. *

MATEMATICAS FINANCIERAS
500 Problemas Resueltos
Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Dickinson College

MATEMATICAS FINITAS
750 Problemas Resueltos
Por Seymour Lipschutz, Ph.D.,
Profesor Asoc. de Matemáticas, Temple University

MATRICES
340 Problemas Resueltos
Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Dickinson College

MECANICA DE LOS FLUIDOS E HIDRAULICA
475 Problemas Resueltos
Por Ranald V. Giles, B. S., M.S. in C.E.,
Profesor de Ingeniería Civil, Drexel Inst. of Tech.

MECANICA TECNICA
460 Problemas Resueltos
Por W.E. McLean, B.S. in E.E., M.S.,
Profesor de Mecánica, Lafayette College
y E.W. Nelson, B.S. in M.E., M. Adm. E.,
Ingeniero Supervisor, Western Electric Co.

PROBABILIDAD
500 Problemas Resueltos
Por Seymour Lipschutz, Ph.D.,
Profesor Asociado de Matemáticas, Temple University

QUIMICA GENERAL
385 Problemas Resueltos
Por Jerome L. Rosenberg, Ph.D.,
Profesor de Química, University of Pittsburgh

RESISTENCIA DE MATERIALES
430 Problemas Resueltos
Por William A. Nash, Ph.D.,
Profesor de Ingeniería Mecánica, University of Florida

RETROALIMENTACION Y SISTEMAS DE CONTROL
680 Problemas Resueltos
Por J.J. Distefano III, A.R. Stubberud, I.J. Williams, Ph.D.,
Departamento de Ingeniería, University of Calif., at L. A.

TEORIA DE CONJUNTOS
530 Problemas Resueltos
Por Seymour Lipschutz, Ph. D.
Profesor Asociado de Matemáticas, Temple University

TEORIA DE GRUPOS
600 Problemas Resueltos
Por B. Baumslag, B. Chandler, Ph.D.,
Departamento de Matemáticas, New York University

TOPOLOGIA GENERAL
650 Problemas Resueltos
Por Seymour Lipschutz, Ph.D.,
Profesor Asociado de Matemáticas, Temple University

TRASFORMADAS DE LAPLACE
450 Problemas Resueltos
Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst.

TRIGONOMETRIA
680 Problemas Resueltos
Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Dickinson College

VARIABLE COMPLEJA
640 Problemas Resueltos
Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,
Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst.

VIBRACIONES MECANICAS
225 Problemas Resueltos
Por William W. Seto, B.S. in M.E., M.S.,
Profesor Asociado de Ingeniería Mecánica, San José State College